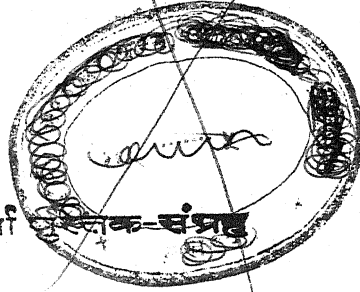
साँख्यिकी के सिद्धान्त एवं प्रयोग

(Statistics)

लेखक :—

महेन्द्र प्रताप सिंह, एम० ए०, एम० काम०

प्राध्यापक, डी० ए० वी० कालेज, कानपुर

प्रकाशक :

किशोर पब्लिशिंग हाउस,

परेड, कानपुर

१९५५]

[मूल्य १०।।) रुपया

बढ़ा दिया है। सन् १९५३ में योजना-आयोग द्वारा नियुक्त १७ सदस्यों की अनुसंधान सम्बन्धी योजना-समिति ने न्यादर्श अनुसंधान पर आधारित अनेक योजनायें बड़े बड़े अर्थशास्त्रियों और प्राध्यापकों की अध्यक्षता में चालू की हैं जो प्रमुख रूप से (अ) भूमि सुधार, सहकारिता और बड़े खेतों की व्यवस्था, (ब) बचत, विनियोग और नौकरी, और (स) प्रादेशिक विकास से सम्बन्धित हैं।

उपरोक्त कथन का उद्देश्य केवल यह है कि आज व्यावहारिक सांख्यिकी का स्वरूप भारत में बहुत बदल चुका है और सांख्यिकीय सिद्धान्तों एवं उनके प्रयोग पर कोई ऐसी पुस्तक नहीं है जो नवयुवक विद्यार्थियों को वर्तमान दशा से अवगत करावे। यद्यपि इस दिशा में प्रयत्न प्रारम्भ हो चुके हैं मातृभाषा में सांख्यिकीय सिद्धान्तों और उनके प्रयोगों पर पुस्तक लिखने का यह प्रयत्न एकदम नया है। 'आँग्ल भाषा से हिन्दी भाषा की ओर' जो लहर उठी है उसे पूरे प्रवाह से बहने देने के लिये आज आवश्यकता इस बात की है कि कठिन विजयों की पुस्तकें क्लिष्ट भाषा में न लिखी जायें। इस महान् आवश्यकता का लेखक ने प्रस्तुत पुस्तक में सदैव ध्यान रखा है। आचार्य रघुबीर, श्री अधौलिया एवं श्री बल्दुआ द्वारा निर्मित सांख्यिकी के शब्द-कोष में दिये गए पारिभाषिक शब्दों के प्रयोग के अतिरिक्त जहाँ तहाँ आवश्यकतानुसार कुछ संकेत-शब्द गढ़ लिये गए हैं। भाषा में जो भी क्लिष्टता आ गई है वह विषय की जटिलता और संकेत-शब्दों के प्रयोग के कारण है जोकि लेखक दूर नहीं कर सका है। परन्तु इस दोष को दूर करने के निमित्त जहाँ तहाँ अंग्रेजी में पारिभाषिक शब्द देने के अतिरिक्त लेखक ने पुस्तक के अन्त में एक शब्द-कोष भी दिया है जो विद्यार्थियों और प्राध्यापकों को विषय के अध्ययन एवं अध्यापन में बड़ा सहायक सिद्ध होगा। पुस्तक के परिशिष्ट के रूप में अन्य चीजों के अतिरिक्त राजकीय प्रकाशनों की एक विवरणात्मक सूची भी दी गई है जिसका वर्तमान पुस्तकों में सर्वथा अभाव रहा है या जहाँ कहीं भी ऐसा विवरण देने का प्रयत्न किया गया है वहाँ पुराने तथ्य दे दिए गए हैं।

प्रस्तुत पुस्तक में प्रयत्न इस बात का किया गया है कि सांख्यिकी जैसा जटिल विषय धारावाहिक रूप में प्रस्तुत किया जाए। पुस्तक के सभी अध्याय एक दूसरे से सम्बद्ध हैं और प्रत्येक सूत्र को हिन्दी एवं

अध्याय ५.

संख्या संकलन की पद्धतियाँ

प्राथमिक ढंग—प्रत्यक्ष स्वंय अवलोकन, परोक्ष मौखिक अनुसंधान, संवाददाताओं से सूचनाएँ प्राप्त करना, अनुसूचियों द्वारा संसूचकों से समंक प्राप्त करना, प्रगणकों द्वारा प्रश्नावली की सहायता से समंक प्राप्त करना, सांख्यिक विवरण एवं सांख्यिक आगणना, निदर्शन प्रणाली, सविचार प्रवरण, दैव-प्रवरण, स्तरित प्रवरण, पद्धति-पूर्ण प्रवरण, अंश प्रवरण, अनुक्रमिक प्रवरण, सम्भावना का सिद्धान्त–सांख्यिकीय नियमिता सिद्धान्त, महानुमाप जड़ता सिद्धान्त, अल्प संख्याओं की विलम्बना का सिद्धान्त, संख्या संकलन के द्वितीयक ढंग, अभ्यास प्रश्न··· ···३९–६३

अध्याय ६.

यथार्थता एवं अनुमान

(Accuracy and Approximation)

संपादन कार्य, यथार्थता, यथार्थता की अपेक्षित मात्रा, अनुमान—(अ) संख्यायें छोड़ कर अनुमान लगाना, (ब) संख्यायें जोड़कर अनुमान लगाना, (स) समीपतम इकाई तक पूर्णांक बनाना, सांख्यिकीय विभ्रम, अभिनत या संचयी विभ्रम, विभ्रमों का माप, द्वितीयक अंकों का सम्पादन कार्य, अभ्यास प्रश्न ·· ···६४–७३

अध्याय ७.

समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीकरण

(Classification & Tabulation of Data)

वर्गीकरण, वर्गीकरण के उद्देश्य—गुणात्मक वर्गीकरण, अंकात्मक वर्गीकरण, समयानुसार वर्गीकरण, स्थानानुसार वर्गीकरण, समंक मालायें, अंकात्मक मालायें, सारणीकरण, सारणीकरण के

अध्याय ९.

अपकिरण, विषमता और पृथुशीर्षत्व

(Dispersion, Skewness & Kurtosis)

अपकिरण का अर्थ, अपकिरण के माप—परिसीमा रीति, विचरण विस्तार (Range), विचरण विस्तार के लक्षण, चतुर्थांशांतर, विस्तार, चतुर्थांश विचलन (Quartile Deviation), चतुर्थांश विचलन के गुण, विचलन माध्य रीति—अपकिरण घात, मध्यक विचलन (Mean Deviation), विच्छिन्न एवं अविच्छिन्न मालाओं में मध्यक विचलन का परिगणन, मध्यक विचलन के लक्षण, प्रमाप विचलन, (Standard Deviation), विच्छिन्न एवं अविच्छिन्न मालाओं में प्रमाप-विचलन का ऋजु एवं लघु रीतियों द्वारा परिगणन, प्रमाप-विचलन के लक्षण व प्रयोग, अपकिरण के अन्य माप, विचरण-गुणक (Coefficient of Variation), घनक (Modulus), विचरण मापांक (Variance), सुतथ्यता (Precision), अपकिरण मापों का परस्पर सम्बन्ध, लारेंज वक्र, सामान्य वक्र (Normal Curve), सामान्य वक्र की विशेषतायें, विषमता (Skewness), विषमता का प्रथम माप और उसका विच्छिन्न एवं अविच्छिन्न मालाओं में परिगणन, विषमता का द्वितीय माप और उसका परिगणन, विषमता का तृतीय माप और उसका प्रयोग, विषमता-मापों के लक्षण, अंक-झुकाव (Kurtosis), अपकिरण, विषमता और अंक-झुकाव की तुलना । अभ्यास प्रश्न ··· ··· ···१५५–२०४

अध्याय १०.

सह-सम्बन्ध

(Correlation)

सह-सम्बन्ध का अर्थ, परिभाषा और माप—कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणक और उसका विच्छिन्न एवं अविच्छिन्न मालाओं में परिगणन, लघुरीति और उसका विच्छिन्न एवं

अध्याय १२.

गुण-सम्बन्ध
(Association of Attributes)

चल-समंक और गुण-समंक, समग्र (Universe) और उसका संभाजन, द्वन्द भाजन (Dichotomy) और बहुगुणी वर्गीकरण (Manifold Classification), गुण-सम्बन्ध सारणी, अज्ञात गुण-आवृत्तियों का परिगणन, संभाविता और आशंसा, स्वतंत्रता की कसौटी, गुण-सम्बन्ध गुणक, आँशिक गुण-सम्बन्ध, भ्रमात्मक गुण-सम्बन्ध, अभ्यास प्रश्न··· ··· ··· ···२७८–२९१

अध्याय १३.

आन्तरगणन और वाह्यगणन
(Interpolation & Extrapolation)

आन्तरगणन एवं वाह्यगणन के अर्थ एवं परिभाषायें, आन्तरगणन की रीतियाँ—(अ) बिन्दुरेखीय रीति, (ब) बीज-गणितीय रीति—(१) एकेन्द्र–वक्र अन्वायोजन रीति (Fitting a Parabolic Curve) (२) न्यूटन की प्रगामी अन्तर रीति (Method of Leading Differences), (३) परमितान्तर रीति (Binomial Method), (४) लैगरैंज की रीति, विभिन्न रीतियाँ उनके समीकार एवं परिगणन, अभ्यास प्रश्न··· ··· ···२९२–३११

अध्याय १४.

भारत में सांख्यिकीय सामग्री
(Indian Statistics)

सामग्री संग्रहण व्यवस्था, संग्रहण सम्बन्धी-व्यवस्था का जन्म एवं विकास, वर्त्तमान व्यवस्था और प्रगति, जनगणना (Census)–अर्थ एवं महत्व, भारतवर्ष की जनगणनाएँ, और उनकी कमियाँ सन् १९५१ की जनगणना का विस्तृत विवेचन, सन् १९५१ की जनगणना में निदर्शन प्रणाली का प्रयोग, जन्म-मृत्यु सम्बन्धी अंक Vi) tal Statistics),—वर्तमान व्यवस्था, राष्ट्रीय आय

त्रिबिमा चित्र, कोणीय चित्र (Angular Diagrams), चित्र-लेख, (Pictograms), श्री रूडोल्फ मोडले के नियम, सांख्यिकीय नक्शे (Cartograms), वक्रों द्वारा समंकों का प्रदर्शन—बिन्दु-रेखीय प्रणाली की उपयोगिता, प्राकृत माप-श्रेणी के वक्र, कूट-आधार रेखा, माप-श्रेणी परिवर्तन, अर्ध-छेदा या अनुपात माप-श्रेणी, बारम्बारता या आवृत्ति वक्र, अभ्यास प्रश्न ··· ··· ···३६७–४०५

अध्याय १६.

कालिक मालाओं का विश्लेषण

(Analysis of Time Series)

सुदीर्घकालीन प्रवृति—(१) मुक्तहस्त वक्र रीति (Free-hand Curve Method), (२) चलमाध्य रीति (Moving Average Method),—चल माध्यों के दोष, (३) सरल रेखा अन्वायोजन रीतियाँ—(अ) अर्ध-माध्यों की रीति, (ब) अल्पतम वर्गों की रीति, आर्तव या मौसमी विचरण—(१) आर्तव माध्य रीति, (Seasonal Average Method), (२) प्रवृति रीति (Trend Method), (३) चल माध्य रीति (Moving Average Method), (४) श्रृंखला मूल्यानुपात रीति (Chain Relatives Method), चक्रीय उच्चावचन—चक्रीय उच्चावचनों के ढंग—(१) ऋजुरीति (Direct Method), (२) अवशेष रीति (Residual Method), (३) हरात्मक विश्लेषण रीति (Harmonic Analysis), (४) चक्रीय माध्य रीति। व्यवसायिक पूर्वानुमान (Business Forecasting)—व्यवसायिक पूर्वानुमान लगाने की रीतियाँ—(१) प्रवृति विक्षेपण और वक्र-अन्वायोजन रीति, (२) व्यवसायिक चक्र या चक्रीय उच्चावचन (Business forecasting)—व्यवसायिक पूर्वानुमान रीति, (३) व्यवसायिक क्रियाओं का विश्लेषण और स्थिति तत्व रीति, (४) आधार निर्देशाँक रीति (Basic Indicators), (५) प्रमाप-विचलन के आधार पर पूर्वानुमान लगाने की रीति, अभ्यास प्रश्न ··· ··· ··· ··· ··· ··· ···४०६–४२४

"सांख्यिकी (समंक) अनेक कारणों द्वारा प्रभावित ऐसे तथ्यों का एक समूह है जिनका आंकिक विवरण यथार्थता प्राप्त करने की उचित रीतियों का प्रयोग करके संकलन अथवा अनुमान द्वारा दिया गया हो और जिन्हें एक दूसरे से सम्बन्धित किया जा सके। ऐसे तथ्यों का संकलन किसी पूर्व-निश्चित कार्य के निमित्त पद्धति पूर्ण ढंग से किया जाना चाहिए।"

इस परिभाषा से समंकों के निम्नलिखित लक्षण स्पष्ट हो जाते हैं:—

(१) समंक तथ्यों का एक समूह है—असम्बद्ध और अकेले तथ्य समंक नहीं कहलाते क्योंकि उनका अध्ययन समय, स्थान और स्थिति के अनुसार नहीं किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक जन्म, एक मृत्यु या एक आयु के अंक समंक न होंगे।

(२) समंकों पर अनेक कारणों का प्रभाव होता है। समंकों पर अनेक कारणों का प्रभाव रहता है जैसे उत्पत्ति सम्बन्धी समंकों पर जलवायु, भूमि, उत्पादन शक्ति, कच्चे माल पाने की सुगमता एवं परिवहन के साधनों द्वारा प्रदत्त सुविधाएँ प्रभाव डालती हैं।

(३) समंकों द्वारा तथ्यों को अंकों के रूप में व्यक्त करने में संग्रहण या अनुमान पद्धति का प्रयोग किया जाता है। ऐसे तथ्य जिनका विवरण 'अच्छा', 'खराब' या 'साधारण' आदि शब्दों से दिया जाए समंक नहीं कहलाते। केवल वे ही तथ्य समंक कहलाते हैं जो अंकों के रूप में रक्खे जा सकें और विधिपूर्ण रीति से एकत्र किये गए हों। संकलन करने में मुख्यतः दो ढंगों का प्रयोग किया जाता है—(अ) आगणना (Enumeration) जिसमें क्षेत्र के सभी पदों की गणना की जाती हैं और (ब) निदर्शन (Sampling) जिसमें कुछ प्रतिनिधि समंकों के आधार पर ही निष्कर्ष निकाल लिए जाते हैं। उन अंकों को भी हम समंक कहते हैं जिन्हें किसी कारण से संकलित न करके किसी अनुभवी दृष्टा द्वारा अनुमान लगा लिया गया हो। कभी कभी जब परिस्थितियों की विशेषता के कारण वास्तविक परीक्षा करना असंम्भव हो तो अनुमानों पर ही निर्भर रहना पड़ता है।

(४) समंकों का संकलन किसी पूर्व निश्चित कार्य के लिए यथार्थता प्राप्त करने के ढंगों के प्रयोग द्वारा रीत्यानुसार किया जाता है। यदि हमें कुछ ऐसे निष्कर्षों तक पहुँचना हो जो सामान्यतः लागू हो, तो हमें संकलन

समूहों को सहज एवं बुद्धि-गम्य बनाया जाता है। इनमें से प्रमुख ढंग निम्नलिखित हैं—समंक-संकलन, सम्पादन, परीक्षण, विभाजन, तुलना, सह-सबन्ध, आन्तरगणन इत्यादि। ये अंकों को सुगम एवं सूक्ष्म बनाने के हेतु प्रयोग किए जाने वाले यान्त्रिक तरीके हैं और इसी कारण इनका प्रयोग उचित रूप से करना चाहिए एवं इनके द्वारा उत्पन्न समंकों के विश्लेषण करने के लिए तर्क-शुद्ध बुद्धि की आवश्यकता है।

सम्बद्ध संख्याएँ अथवा व्यावहारिक सांख्यिकी (Applied Statistics) वे संख्याएँ अथवा समंक हैं जिन्हें हम किसी भी विशिष्ट क्षेत्र में सांख्यिक ढंगों के प्रयोग के द्वारा प्राप्त करते हैं। उदाहरणार्थ, श्रमसंख्याएँ, जनसंख्याएँ जीवनांक इत्यादि। सम्बद्ध संख्याएँ दो भागों में विभक्त की जा सकती हैं—(अ) वर्णनात्मक सम्बद्ध संख्याएँ और (ब) वैज्ञानिक सम्बद्ध संख्याएँ। वर्णनात्मक सम्बद्ध संख्याएँ वे समंक हैं जिनका सम्बन्ध ऐतिहासिक महत्व के तथ्यों से हो। इसका कार्य केवल समंकों का विवरण देना है। उदाहरणार्थ, वे सभी समंक वर्णनात्मक सम्बद्ध संख्याएँ हैं जिनका सम्बन्ध किसी भी अध्ययन क्षेत्र से हो परन्तु उद्देश्य केवल विवरणात्मक हो। वैज्ञानिक सम्बद्ध संख्याएँ वे समंक हैं जिन्हें किसी वैज्ञानिक उद्देश्य से एकत्रित किया गया हो अर्थात् जो किसी भौतिक, मानसिक अथवा सामाजिक सिद्धांत का प्रतिपादन करती हों। उदाहरणार्थ, यदि मृत्यु सम्बन्धी अंक एकत्रित किए जाएँ तो विभिन्न नगरों के समंकों के आधार पर हम एक सिद्धांत बना सकते हैं कि घने बसे हुए और व्यापारिक नगरों में अन्य नगरों की अपेक्षा मृत्युदर अधिक होती है।

सांख्यिकी एक प्रगतिशील विज्ञान है और जहाँ कहीं भी सांख्यिक अध्ययन की आवश्यकता होती है इसका महत्व बढ़ता ही जा रहा है। सांख्यिक ढंगों के प्रयोग द्वारा पेचीली घटनाओं और विस्तृत क्षेत्रों का अध्ययन आसान हो जाता है।

सांख्यिकी का उद्देश्य

अंग्रेज विद्वान बाडिंगटन* के अनुसार "सांख्यिक अनुसन्धान का मुख्य उद्देश्य भूतकालीन एवं वर्त्तमान तथ्यों की तुलना करके ये मालूम करना है

* "The ultimate end of Statistical research is to enable comparison to be made between past and present results with a view to ascertaining the reasons for changes which have taken place and the effect of such changes on the future." —Bodington.

समूहों को सहज एवं बुद्धि-गम्य बनाया जाता है। इनमें से प्रमुख ढंग निम्नलिखित हैं—समंक-संकलन, सम्पादन, परीक्षण, विभाजन, तुलना, सह-सबन्ध, आन्तरगणन इत्यादि। ये अंकों को सुगम एवं सूक्ष्म बनाने के हेतु प्रयोग किए जाने वाले यान्त्रिक तरीके हैं और इसी कारण इनका प्रयोग उचित रूप से करना चाहिए एवं इनके द्वारा उत्पन्न समंकों के विश्लेषण करने के लिए तर्क-शुद्ध बुद्धि की आवश्यकता है।

सम्बद्ध संख्याएँ अथवा व्यावहारिक सांख्यिकी (Applied Statistics) वे संख्याएँ अथवा समंक हैं जिन्हें हम किसी भी विशिष्ट क्षेत्र में सांख्यिक ढंगों के प्रयोग के द्वारा प्राप्त करते हैं। उदाहरणार्थ, श्रमसंख्याएँ, जनसंख्याएँ जीवनांक इत्यादि। सम्बद्ध संख्याएँ दो भागों में विभक्त की जा सकती हैं— (अ) वर्णनात्मक सम्बद्ध संख्याएँ और (ब) वैज्ञानिक सम्बद्ध संख्याएँ। वर्णनात्मक सम्बद्ध संख्याएँ वे समंक हैं जिनका सम्बन्ध ऐतिहासिक महत्व के तथ्यों से हो। इसका कार्य केवल समंकों का विवरण देना है। उदाहरणार्थ, वे सभी समंक वर्णनात्मक सम्बद्ध संख्याएँ हैं जिनका सम्बन्ध किसी भी अध्ययन क्षेत्र से हो परन्तु उद्देश्य केवल विवरणात्मक हो। वैज्ञानिक सम्बद्ध संख्याएँ वे समंक हैं जिन्हें किसी वैज्ञानिक उद्देश्य से एकत्रित किया गया हो अर्थात् जो किसी भौतिक, मानसिक अथवा सामाजिक सिद्धांत का प्रतिपादन करती हों। उदाहरणार्थ, यदि मृत्यु सम्बन्धी अंक एकत्रित किए जाएँ तो विभिन्न नगरों के समंकों के आधार पर हम एक सिद्धांत बना सकते हैं कि घने बसे हुए और व्यापारिक नगरों में अन्य नगरों की अपेक्षा मृत्युदर अधिक होती है।

सांख्यिकी एक प्रगतिशील विज्ञान है और जहाँ कहीं भी सांख्यिक अध्ययन की आवश्यकता होती है इसका महत्व बढ़ता ही जा रहा है। सांख्यिक ढंगों के प्रयोग द्वारा पेचीली घटनाओं और विस्तृत क्षेत्रों का अध्ययन आसान हो जाता है।

सांख्यिकी का उद्देश्य

अंग्रेज विद्वान बाडिंगटन* के अनुसार "सांख्यिक अनुसन्धान का मुख्य उद्देश्य भूतकालीन एवं वर्त्तमान तथ्यों की तुलना करके ये मालूम करना है

* "The ultimate end of Statistical research is to enable comparison to be made between past and present results with a view to ascertaining the reasons for changes which have taken place and the effect of such changes on the future." —Bodington.

कि जो भी परिवर्त्तन हुए हैं उनके क्या क्या कारण रहे हैं और इनके क्या क्या परिणाम भविष्य में हो सकते हैं ।" इस प्रकार हम कह सकते हैं कि सांख्यिकी का आर्थिक विकास एवं राष्ट्रीय समृद्धि से घनिष्ट सम्बन्ध है । इसके द्वारा हम वर्त्तमान एवं भूतकालीन तथ्यों का अध्ययन एक पूर्व-निश्चित उद्देश्य से करते हैं जिससे उनके आधार पर भविष्य में राष्ट्रीय समृद्धि बढ़े एवं आर्थिक विकास निर्विघ्न हो । भविष्य निर्माण के लिए सिद्धान्त एवं नीति के प्रतिपादन को ही हम राष्ट्रीय नियोजन (National Planning) कहते हैं । आज का युग 'योजना का युग' है और इस कारण हम सांख्यिकी के उद्देश्य से अपरिचित नहीं रह सकते । बिना समंकों के नियोजन असम्भव है और बिना सांख्यिक अनुमानों के योजना की प्रगति नहीं जानी जा सकती है ।

राष्ट्रीय नियोजन के अतिरिक्त सांख्यिकी के निम्नलिखित उद्देश्य हैं:—

(१) कठिन घटनाओं एवं तथ्यों को यथार्थ रूप में सहज प्रकार से समझाना (२) वैज्ञानिक नियमों का प्रतिपादन करके विद्या का विस्तार करना (३) सफल एवं निपुण शासन करने में सहायक होना (४) उत्पादन की वृद्धि में सहायक होना ।

सांख्यिकी की परिभाषा

"जितने लेखक उतनी परिभाषा" वाला नियम सांख्यिकी में भी लागू होता है । करीब सन् १८६९ ई० में क्यटले (Quetlet) ने १८० परिभाषाओं का एक संकलन किया था ।

एचनवाल के अनुसार "साँख्यिकी किसी भी राज्य से सम्बन्धित विवरणात्मक एवं ऐतिहासिक तथ्यों का एक संकलन है ।" श्री कीन्स महोदय के कथनानुसार एचनवाल वे प्रथम व्यक्ति थे जिन्होंने साँख्यिकी को एक विशिष्ट विद्या के रूप में सबसे पहले समझा ।

ह्वापस (Whappaus) ने साँख्यिकी को एक भौतिक विज्ञान के रूप में समझकर कहा कि यह "किसी भी भौतिक दशा के वर्णन हेतु एकत्रित ज्ञान समूह है जिसका कोई भी एक पूर्व-निश्चित उद्देश्य हो ।" डा० मायर्स

(Mayrs) के दृष्टिकोण से "सांख्यिकी मनुष्य के सामाजिक जीवन से सम्बन्धित वास्तविक तथ्यों के वैज्ञानिक एवं पद्धतिपूर्ण विवेचन के द्वारा कुछ समूह सम्बन्धी सिद्धान्तों का प्रतिपादन करती है।" वेबस्टर (Webster) ने भी इसी प्रकार की परिभाषा की है जिसके अनुसार "साँख्यिकी किसी भी राज्य में रहने वाले व्यक्तियों से सम्बन्धित तथ्यों का एक वर्गीकृत स्वरूप है, जिसका सम्बन्ध विशेष रूप से ऐसे तथ्यों से है जिन्हें अंकों, अंक-सारणीयों अथवा किसी अन्य वर्गीकृत रूप में रखा जा सके।"

उपरोक्त परिभाषाओं में एक ही अंतर्निहित तथ्य है कि सांख्यिकी एक समंक सम्बन्धी शास्त्र है, परन्तु सभी उसे केवल 'राज्य सम्बन्धी शास्त्र' कह कर इस विज्ञान के क्षेत्र को संकुचित कर देते हैं। आज इस शास्त्र का क्षेत्र 'राजकीय शास्त्र' की संकुचित सीमाओं को पार कर अत्यन्त विस्तृत हो गया है और उसके अन्तर्गत सभी क्षेत्रों में होने वाले सांख्यिकीय अध्ययन सम्मिलित हैं चाहे वे आकाश, पाताल, एवं पृथ्वी पर होने वाली घटनाओं के सम्बन्ध में हों।

प्रोफेसर ए० एल० बावले* (Bowley) के कथनानुसार "सांख्यिकी एक ऐसा शास्त्र है जो समाज में रहने वाले मनुष्यमात्र की क्रियाओं का अपनी समस्त प्रव्यक्तियों में अध्ययन करता है।" प्रोफेसर बावले स्वयं ही इस परिभाषा को अनुपयुक्त समझते हैं क्योंकि इसके अनुसार सांख्यिकी का क्षेत्र संकुचित हो जाता है और अध्ययन का क्षेत्र केवल मनुष्य और उसकी क्रियाओं तक ही सीमित रह जाता है। ले प्ले (Le Play) ने एक कुटुम्ब लेकर उसकी सभी प्रव्यक्तियों का अध्ययन किया था परन्तु उसके अध्ययन के फलस्वरूप प्राप्त किए गए निष्कर्ष सामान्य जीवन से विभिन्न पाये गए। सांख्यिकी व्यक्तिगत-विषमताओं को कोई महत्व नहीं देती अतएव यदि अनेक व्यक्तिओं और कुटुम्बों के अध्ययन के फलस्वरूप कुछ निष्कर्ष निकाले जाए तो वे महत्वशाली होंगे। इसके अतिरिक्त सांख्यिकी के क्षेत्र का विस्तार होने के कारण हम उसके अन्तर्गत न केवल एक सामाजिक प्राणी के प्रत्येक अंग का ही अध्ययन करते हैं वरन् जीव-विज्ञान, ज्योतिष्य विज्ञान एवं अन्य शास्त्रों के अध्ययन में भी इसके महत्व का अनुभव किया जाने लगा है।

---

* "Statistics is the science of the measurement of the social organism, regarded as a whole in all its manifestations".
—A. L. Bowley.

उपरोक्त परिभाषा के अतिरिक्त प्रोफेसर बावले अन्य परिभाषाओं की ओर संकेत करते हैं कि 'सांख्यिकी गणना करने का एक विज्ञान है' या सांख्यिकी एक माध्य सम्बन्धी (Science of Averages) शास्त्र है।' बाडिंगटन के कथनानुसार ये एक 'अनुमान एवं सम्भावना सम्बन्धी (Science of Estimates and Probabilities) शास्त्र है।' ये परिभाषाएं केवल उन सांख्यिक ढंगों की ओर संकेत करती हैं जिनके द्वारा यह शास्त्र कुछ प्रतिफलों एवं सिद्धान्तों का विवेचन करता है। बहुत से अंक होने पर उनकी गणना न करके केवल अनुमान ही लगा लिया जाता है और कम होने पर उन्हें सम्पूर्ण यथार्थता से गणना द्वारा ज्ञात किया जाता है। संकलन में प्रगणना (Enumeration) अथवा निदर्शन (Sampling) दोनों का ही प्रयोग अनुसंधानीय क्षेत्र की विषमताओं के अनुसार कर लिया जाता है। इसके अतिरिक्त महांकों को सूक्ष्म रूप देने के हेतु माध्यों (Averages) का प्रयोग किया जाता है जिनको देखकर सम्पूर्ण क्षेत्र का सामान्य रूप से ज्ञान हो सके। परन्तु इनके अलावा भी ऐसे अनेकों ढंग है जिनके द्वारा अधिक उत्तम और सहज रूप में समंकों का अर्थ स्पष्ट किया जा सकता है, उदाहरणार्थ, बिन्दुरेख (Graphs), चित्र (Diagrams), अपकिरण माप (Measures of Dispersion) इत्यादि। इस प्रकार हम देखते हैं कि गणना का उपयोग केवल समंकों के संकलन में किया जाता है और माध्यों का प्रयोग उनके विश्लेषण एवं विवेचन में। ये सांख्यिकी के कुछ ढंग हैं परन्तु सांख्यिकी नहीं। ये परिभाषाएँ कुछ सांख्यिक क्रियाओं की ओर संकेत करती है इस कारण अपूर्ण हैं।

संख्या-शास्त्रियों का एक समुदाय इस बात में विश्वास रखता है कि 'सांख्यिकी वह है जोकि वह करती है।' इनमें से प्रमुख विलियम किंग* (King) के कथनानुसार "सांख्यिकी संग्रहीत तथ्यों के विश्लेषण अथवा अनुमानों के संकलन द्वारा प्राप्त सामूहिक अथवा सामाजिक घटनाओं के अध्ययन करने का एक ढंग है।" लॉविट (Lovitt) इस शास्त्र की निम्न-

---

* 'The Science of Statistics is the method of judging collective, nautral or social phenomena from the results obtained by the analysis and enumeration or collection of estimates'.

—W. I. King.

लिखित परिभाषा करते हैं—"ये शास्त्र आंकिक तथ्यों के संकलन, वर्गीकरण एवं सारिणीकरण से सम्बन्धित एक अध्ययन है जिनके द्वारा घटनाओं का विवरण, विवेचन एवं तुलना की जाती है"* इन सांख्यिकों (Statisticians) के अनुसार सांख्यिकी अपने अन्तर्गत आने वाले सब ढंगों का एक वैज्ञानिक एवं सहज प्रकटीकरण है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि कुछ परिभाषाओं ने सांख्यिकी का क्षेत्र केवल एक राजकीय-विज्ञान के रूप में और कुछ ने केवल महत्वपूर्ण ढंगों तक परिसीमित कर दिया है। कुछ व्यक्तियों ने परिभाषा में वे सभी साँख्यिक ढंग सम्मिलित करने का प्रयत्न किया जिसका प्रयोग इस शास्त्र के अन्तर्गत किया जाता है। परन्तु हम स्पष्ट रूप से देख चुके हैं कि किसी भी शास्त्र के क्षेत्र में केवल वे यान्त्रिक ढंग ही नहीं आते जिनका प्रयोग उसके अन्तर्गत किया जाए वरन् वे प्रतिपादित नियम भी आते हैं जिनको उन ढंगों के आधार पर बनाया गया हो। उपरोक्त सभी परिभाषाओं में शास्त्र के एक आवश्यक अंग को छोड़ दिया गया हैं। कहीं भी शास्त्र के उद्देश्य के सम्बन्ध में नहीं कहा गया। सभी परिभाषाओं को सामने रखते हुए हम निम्नलिखित परिभाषा द्वारा इस शास्त्र को व्यक्त करेंगे जिसमें यह प्रयत्न किया गया है कि वह दोष रहित हो परन्तु सांख्यिकी एक प्रगतिशील विज्ञान है और उसे किसी भी स्थायी परिभाषा द्वारा नहीं बांधा जा सकता है।

> एक विज्ञान के रूप में सांख्यिकी किसी भी अनुसन्धानीय क्षेत्र से संबधित घटनाओं का आंकिक अध्ययन है जिसका प्रमुख उद्देश्य भूतकालीन अनुभवों का संग्रह, तुलना एवं सुसम्बद्ध करके उनके द्वारा प्रदत्त अनुभव के आधार पर भविष्य निर्माण के लिए योजनायें बनाना है और इस कार्य में ये शास्त्र कुछ साँख्यिक ढंगों का सहारा लेता है जैसे संकलन, संशोधन, वर्गीकरण, मध्यक, सहसम्बन्ध, आन्तरगणन, निर्वचन इत्यादि।

---

* 'It deals with the collection, classification and tabulation of numerical facts as the basis for explanation, description and comparison of phenomena'.

—Lovitt.

एक सांख्यिक के कार्य

अपने उद्देश्य की पूर्ति के लिए प्रत्येक सांख्यिक को कुछ क्रियाएँ करनी होती हैं—(अ) निरीक्षण (ब) परीक्षण (स) सारांशीकरण (द) विवेचन एवं (क) निर्वचन। सर्वप्रथम किसी भी क्षेत्र में होने वाली घटनाओं का निरीक्षण होना चाहिए और इसलिए सांख्यिक का प्रथम कार्य समस्या से सम्बन्धित समंकों का संकलन है। संकलन करते समय सांख्यिक अनुसंधानीय क्षेत्र की विशालता के अनुसार संकलन की पद्धति निश्चित करेगा। यदि क्षेत्र विशाल हो और वह स्वयं ही क्षेत्र में संकलन के समय उपस्थित न रह सके तो वह अनेक निरीक्षक (Investigators) अथवा प्रगणक (Enumerators) नियुक्त करके अपने आदेशों के अनुकूल समंक एकत्रित करवा लेगा। इन प्रतिनिधियों की नियुक्ति करते समय वह इस बात का ध्यान रखेगा कि वे पक्षपात रहित एवं सच्चे हों क्योंकि व्यक्तिगत अभिनति (Personal bias) अनुसन्धानीय क्षेत्र से प्राप्त समंकों की यथार्थता को विनष्ट कर देगी। संकलन करते समय यदि सांख्यिक के पास समय की कमी होगी तो सम्पूर्ण क्षेत्र में संगणना (Enumeration) करने के स्थान में वह निदर्शन (Sampling) को ठीक समझेगा।

सामग्री-संग्रहण के पश्चात् सांख्यिक उसका परीक्षण करेगा और यदि किन्हीं विभ्रमों (Errors) का प्रवेश होगया हो तो उनका संशोधन कर देगा। परीक्षण एवं संशोधन के द्वारा सांख्यिक को विभ्रम विमुक्त सामग्री मिलेगी जिनके आधार पर वह परिशुद्ध एवं यथार्थ सारांश निकाल सकता है।

विभ्रम-रहित सामग्री प्राप्त कर लेने पर सांख्यिक का वास्तविक कार्य प्रारम्भ होता है और वह उसे एक वर्गीकृत स्वरूप देने के पश्चात् समंक समूहों का सारांशीकरण करता है अर्थात् वह प्रतिनिधि संख्याओं के द्वारा समंकों के समूहों का अर्थ मध्यकों द्वारा व्यक्त करता है। यदि समंकों के आपस में या अपने मध्यकों से किसी प्रकार का विचलन हो तो ऐसे अपकिरण का भी सांख्यिक अध्ययन करता है।

सांख्यिक का कार्य महांको को कुछ सहज एवं बुद्धि-गम्य समंकों में संकुचित करना ही नहीं है वरन् वह संग्रहीत सामग्री का विशद विवेचन भी करता है अर्थात् वह इनके स्वरूप, लक्षण, सह-सम्बन्ध इत्यादि के सम्बन्ध में भी अध्ययन करता है।

अध्ययनीय क्षेत्र के समंकों का अध्ययन करने एवं उनका विशद विवेचन करने के पश्चात् उनसे परिणाम निकालने का कार्य अत्यन्त दुष्कर है जिसे निर्वचन (Interpretation) कहते हैं। निर्वचन करते समय भी सांख्यिक को पक्षपात रहित रहना चाहिए क्योंकि अभिनतिपूर्ण (Biassed) निर्वचन द्वारा भ्रमात्मक तथ्य भी सिद्ध किए जा सकते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि सांख्यिक के प्रमुख कार्य हैं—निरीक्षण, परीक्षण या संशोधन, साराँशीकरण, विवेचन एवं निवर्चन, और सभी कार्यों में उसका पक्षपात-रहित होना परमावश्यक है।

EXERCISES
अभ्यास प्रश्न

1. Discuss the importance of the study of Statistics in the present circumstances of India.

भारतवर्ष में आजकल की परिस्थितियों में सांख्यिकी के अध्ययन का महत्व समझाइये। (B. Com. Agra, 1938)

2. "Sciences without Statistics bear no fruit, Statistics without Science have no root"

Explain the above statement with necessary comments.

"विज्ञान बिना समंकों के फलदायक नहीं होते और समंक बिना विज्ञान के निर्मूल है।"

उपरोक्त कथन का विवेचन कीजिए। (M. A. Patna, 1943)

3. "Statistics affects everybody and touches life at many points. It is both a science and an art."

"समंक प्रत्येक व्यक्ति पर प्रभाव डालते हैं और जीवन के अनेक पहलुओं को छूते हैं। सांख्यिकी एक विज्ञान और कला दोनों ही हैं।"

उपरोक्त कथन की पुष्टि उदाहरण देते हुए कीजिए।

(B. Com. Agra, 1945)

4. Discuss the meaning and scope of statistics. Show the importance of statistics in any scheme of economic planning in India.

सांख्यिकी का अर्थ और क्षेत्र समझाइए और यह बतलाइए कि वह किस प्रकार से भारतवर्ष के किसी अर्थ-नियोजन की योजना में सहायक हो सकती है। (B. Com. Agra, 1945)

5. What are Statistical Methods ? Explain their scope and limitations.

Critically examine the following definition of statistics:—

"Statistics is the Science of Counting", Statistics is the science of the measurement of social organism in all its aspects."

सांख्यिकीय ढंग क्या होते हैं ? उनके क्षेत्र और सीमाएँ बतलाइए। निम्नलिखित सांख्यिकी की परिभाषाओं की समीक्षा कीजिए:—

"सांख्यिकी गणना सम्बन्धी विज्ञान है।"

"सांख्यिकी सामाजिक जीवन के सभी पहलुओं के माप करने वाला विज्ञान है। (B. Com. Agra, 1943)

6. Statistics is said to be both a science and an art, why ? What relation, if any, has statistics with other sciences.

सांख्यिकी को एक विज्ञान और कला दोनों ही कहा जाता है, क्यों ? इसका अन्य विज्ञानों से क्या सम्बन्ध है, समझाइए।

(B. Com. Agra, 1949)

अध्याय २.

सांख्यिकी के कार्य, उपयोग एवं महत्व

सांख्यिकी के कार्य

सांख्यिकी बड़े बड़े समूहों के सम्बन्ध को समंकों के द्वारा एक सूक्ष्म एवं भौतिक रूप प्रदान करती है संकलित समंकों को सहज एवं बुद्धिगम्य बनाने में सांख्यिक निम्नलिखित ढंगों का प्रयोग करता है।—(अ) विशाल समंक समूहों को एक महत्वशाली संख्या के रूप में परिवर्त्तित करके उसके द्वारा सामान्यतः समंक क्षेत्र के लक्षणों का प्रतिनिधित्व करने के लिए माध्य (Average) का प्रयोग— (ब) निदर्शन (Sampling) द्वारा विशाल समंक क्षेत्र को एक छोटा स्वरूप प्रदान करना जिससे उस समंक क्षेत्र के सभी लक्षण तो निर्दशित समुदाय में विद्यमान रहे और आगणना के कष्ट का भी निवारण हों। समंकों को सूक्ष्म करने के पश्चात् उनकी परस्पर तुलना की जाती है जिसमें 'समान समंकों का समान के साथ' सम्बन्ध जोड़ा जाता है। किन्हीं भी दो या अधिक समंकों के सह-सम्बन्ध को गुणक, मूल्यानुपात अथवा दरों के द्वारा स्पष्ट किया जाता है और इस प्रकार सांख्यिकी उसे एक गणित सम्बन्धी स्वरूप प्रदान करती है। सांख्यिकी व्यक्तिशः उदाहरणों के विशाल एवं कठिन समंक समूहों को तुलनीय दृष्टि से अधिक उपयुक्त बनाती है।

सांख्यिकी व्यक्तिगत अनुभवों का विस्तार करती है।—मनुष्य का ज्ञान केवल वहीं तक सीमित रहेगा, (यदि समंक न हो) जो कुछ वह देख, सुन व अनुभव कर सकता है। इस प्रकार मनुष्यमात्र का ज्ञान बहुत संकुचित होता है क्योंकि वह सामाजिक जीवधारी रचना का केवल एक बहुत छोटे से भाग का अध्ययन कर सकता है। परन्तु वह समंकों के द्वारा अन्य व्यक्तियों के अनुभव का भी उपयोग कर सकता है। इस प्रकार सांख्यिकी मनुष्यमात्र के ज्ञान एवं अनुभव के क्षेत्र का विस्तार करती है। बिना आंकिक विवेचन के हमारे विचार एवं आदर्श संदिग्ध, अनिश्चित एवं अस्पष्ट होंगे और यदि उनके अन्तर्निहित महत्व को पूर्णरूपेण समझाना अभीष्ट हो तो समंकों का सहारा

लेना ही होगा। संमक बहुत प्रभावशाली होते हैं और सर्वसाधारण शीघ्र ही उन पर विश्वास कर लेते हैं। श्री बावले के अनुसार, "कोई भी सांख्यिक अनुमान अच्छा या बुरा, यथार्थ या भ्रामक क्यों न हों, परन्तु करीब करीब प्रत्येक बार वह एक आकस्मिक प्रेक्षक के अनुभवों से अधिक यथार्थ होगा और उसे केवल सांख्यिक ढंगों द्वारा ही भ्रामक सिद्ध किया जा सकता है।"

अर्थशास्त्रीय सिद्वांतों में सांख्यिकी का महत्व

सांख्यिकी का अर्थशास्त्रीय सिद्धान्तों में भी बड़ा महत्व है और उसके प्रमुख कार्य निम्नलिखित हैं:—

(१) ये शास्त्र किसी भी राष्ट्र की आर्थिक स्थिति का वर्णन करने में सहायक होता है। इसके द्वारा भृति, मूल्य, निर्यात, आयात, उत्पति, राष्ट्रीय आय वितरण, जनसंख्या इत्यादि के सम्बन्ध में समंकों द्वारा ज्ञान एकत्रित किया जाता है। भावी सुधार योजनाएँ बनाने के लिए वर्त्तमान एवं भूत-कालिक स्थितियों का ज्ञान होना अति आवश्यक है। आज राष्ट्रीय योजना के युग में समंकों का एक बहुत ही महत्वपूर्ण स्थान है।

(२) ये शास्त्र विशिष्ट तथ्यों एवं अनुभवों के आधार पर आगमन प्रणाली (Inductive method) द्वारा सर्वमान्य आर्थिक सिद्धान्तों के प्रतिपादन में सहायक होता है।

(३) निगमन प्रणाली (Deductive method) के लिए ये शास्त्र सहायक अथवा पूरक का कार्य करता है। ये शास्त्र स्वयं ही आगमन प्रणाली का एक अंग है।

व्यापारिक ढंग के रूप में सांख्यिकी के कार्य

(१) इसके द्वारा व्यापार सम्बन्धी समाचार एवं सूचनाओं को समंक रूप में एकत्रित किया जा सकता है जिससे उनके यापन, वर्गीकरण एवं तुलना में आसानी हो।

(२) इसके द्वारा सूचनाओं और समाचारों का इस प्रकार से संग्रहण किया जाता है कि उनके महत्वशाली सूक्ष्म रूप बनाए जा सकें।

(३) ये शास्त्र एक ऐसी पद्धति निर्माण करने में सहायक होता है जिसके द्वारा भूतकालीन अनुभवों का विश्लेषण करके भावी घटनाओं का

एक सम्भावित क्रम निश्चित किया जा सके। व्यापार स्वयं ही एक सम्भावना है।

सांख्यिकी का महत्व एवं उपयोग

आजकल प्रत्येक क्षेत्र में सांख्यिकी का महत्व बढ़ रहा है। सांख्यिकीय ढंगों का प्रयोग ज्योतिष्य शास्त्र, जीव-विज्ञान, अन्तरिक्ष विज्ञान, सामाजिक-विज्ञान, अर्थशास्त्र एवं गणितशास्त्र में किया जाने लगा है। आजकल सबसे अधिक प्रगतिशील शास्त्र अर्थशास्त्र समझा जाता है और आज का युग आर्थिक नियोजन का युग है। बिना समंकों के नियोजन असम्भव है क्योंकि बिना उनकी सहायता के भूतकालिक एवं वर्त्तमान तथ्यों के वास्तविक स्वरूप का अध्ययन नहीं किया जा सकता और बिना इस अध्ययन के किया जाने वाला नियोजन राष्ट्र के लिए हानिकर है। इस प्रकार सांख्यिकी द्वारा प्रदत्त सामग्री योजना की आधारशिला है। इसके अतिरिक्त योजना बन जाने के उपरान्त उसके अनुकूल किए जाने वाले कार्य की सफलता नापने के लिए हमें फिर समंकों की सहायता लेनी पड़ती है।

सन् १९५१ में दिल्ली में अन्तर्राष्ट्रीय सांख्यिक सम्मेलन का उद्घाटन करते समय राष्ट्रपति श्री राजेन्द्रप्रसाद जी ने भारत की पंचवर्षीय योजना के सफलतापूर्वक चलाने के लिए सांख्यिकी के महत्व पर जोरदार शब्दों में कहा कि "कोई भी सरकार सांख्यिकीय अज्ञानता रहते हुए सफल नियोजन का विचार भी नहीं कर सकती है। पिछले कुछ वर्षों में भारत सरकार सांख्यिक ढंगों के विकास में उत्साह लेती रही है और देश में अनेक सांख्यिक संगठन बने। यद्यपि वैज्ञानिक और व्यावसायिक उन्नति ने संसार के दूरस्थ क्षेत्रों को काफी पास ला दिया है फिर भी आज संसार के सांख्यिक मानचित्र पर अनेकों अनजाने क्षेत्र पाये जाएँगे और अन्तर्राष्ट्रीय सहयोग की स्थापना में सांख्यिक सूचनाएँ न होना एक बहुत बड़ी रोक है।" इसी सम्मेलन में श्री पण्डित नेहरू ने भाषण देते हुए कहा कि "देश में इस समय अनेकों समस्याएँ हैं जिनका निराकरण करना आवश्यक है और इस कार्य के लिए यथार्थ समंकों का होना परमावश्यक है। यदि आज की स्थिति में कुछ भी परिवर्त्तन लाना अभीष्ट है तो बिना सांख्यिक ज्ञान के असम्भव होगा।"

सांख्यिकी की उत्पत्ति एक 'राजकीय शास्त्र' के रूप में हुई थी और आज भी उसका महत्व शासन प्रबन्ध के क्षेत्र में कम नहीं हुआ है। बिना

समंकों एवं तथ्यों के शासनकर्त्ता एक अन्धे व्यक्ति के समान है जो चल रहा है पर ये नहीं जानता कि कब गिर पड़ेगा। वह राज्य की आर्थिक स्थिति नहीं जान सकता। इसके अतिरिक्त देश के शासन के लिए प्रति वर्ष एक बजट बनाना आवश्यक है और वह बिना समंकों के नहीं बनाया जा सकता है। प्रायः ये कहा जाता है कि बजटों में जमा और नाम दोनों कभी ही आकस्मिक रूप से बराबर हो जाए तो बात दूसरी है अन्यथा अक्सर वे नहीं होते इस कारण समंकों की क्या आवश्यकता है। परन्तु ये ध्यान में रखना चाहिए कि बजट राष्ट्र का एक अनुमान सम्बन्धी आय व्ययक है और उसमें जमा और नाम के अनुमान दिए रहते हैं और बिना सांख्यिकीय ढंगों के सफल अनुमान करना असम्भव है। इसके अतिरिक्त कोई भी सरकार जब कोई नवीन नीति निर्धारित करती है तो जनता के मनोभावों को जानना चाहती है यदि जनता का विरोध अधिक होगा तो वह नीति परिवर्त्तन करना चाहेगी। ये कार्य सांख्यिक ढंग से किया जा सकता है और सम्बन्धित समंक एकत्रित करके उनके आधार पर नीति परिवर्त्तन किया जा सकता है। इस प्रकार सांख्यिकी राजकीय निरीक्षण करने एवं नई नीतियों के प्रतिपादन में सहायक होती है।

आज के युग में आर्थिक स्वतन्त्रता के सिद्धान्त का महत्व कम होता जा रहा है और हमारा झुकाव नियन्त्रण की ओर है जिससे व्यवसायियों के लाभ की दर में कमी की जा सके और अन्य वर्गों का लाभ हो। इस प्रकार व्यापारिक नीति में सांख्यिकी का महत्वपूर्ण स्थान है। व्यापारियों के दृष्टिकोण से लाभ बढ़ना उचित है और इसलिए उनके प्रयत्न विक्रय बढ़ाने व लागत कम करने की दिशाओं में होते हैं। अधिक विक्रय करने के लिए कम लागत पर अधिक उत्पत्ति की आवश्यकता है। इसके लिए उत्पादन के वैज्ञानिक ढंगों के प्रयोग की आवश्यकता होती है और किसी भी व्यवसाय में अभिनवीकरण बिना समंकों की सहायता के नहीं किया जा सकता। अभी तक समंकों का प्रयोग व्यवसायों में केवल आर्थिक विभाग तक ही सीमित रहा है जिसमें हिसाब का लेखा ब्यौरा रखा जाता था। परन्तु अब सांख्यिकी के क्षेत्र का विस्तार हुआ है और समंकों का प्रयोग व्यापार के संचालन, शासन, एवं विकास में किया जाता है। व्यापारियों को अनुमानों एवं सम्भावनाओं पर निर्भर रहना होता है, क्योंकि व्यापार "स्वयं ही एक व्यावहारिक आगणना है।" आजकल उत्पादन केवल उपभोग के लिए ही

सांख्यिकी केवल इनके आंकिक अंग का ही अध्ययन कर सकती है। प्रोफेसर बावले के अनुसार "किसी भी सामाजिक समस्या के निवारण में एक सांख्यिक का कार्य समंकों द्वारा मापन करना है और समंकों का सामाजिक तथ्यों में एक महत्वरहित स्थान है।"* इस प्रकार सांख्यिकी केवल आंकिक मापों तक ही परिसीमित है।

(२) समंक-समूहों के अन्तर्गत आने वाले अंक एक दूसरे से विभिन्न होते हैं। मध्यकों के प्रयोग से कठिन संख्याओं को सहज बनाया जाता है और उनकी अनेक असमानताएँ विलीन हो जाती हैं परन्तु सब नहीं। सांख्यिकी का कोई भी ढंग इन असमानताओं को पूर्णरूप से विनष्ट नहीं कर सकता। परन्तु इस कमी को हम एक बहुत बड़ी कमी नहीं कह सकते क्योंकि सांख्यिकी एक प्रगतिशील शास्त्र है और नये नये सांख्यिक ढंगों का आविष्कार होगा ऐसी आशा रखनी चाहिए।

(३) सांख्यिकी आगणना एवं अनुमानों पर आधारित है जो सम्भावनाओं पर निर्भर है। इस कारण यह एक विभ्रमयुक्त शास्त्र है और इसके नियमों को भी आकर्षण के भौतिक सिद्धांत के समान नियमों की श्रेणी में नहीं रहा जा सकता है। परन्तु ये कोई विशेष कमजोरी नहीं कही जा सकती है। अर्थशास्त्र के नियमों के अनुसार इसके नियम भी 'औसत रूप में यथार्थ' होते हैं और संभावित तथ्यों की ओर संकेत करते हैं।

(४) सांख्यिकी का प्रयोग समंकों के छलसाधन द्वारा भ्रामक सिद्धान्तों के प्रतिपादन के लिये किया जा सकता है क्योंकि 'समंकों' के ऊपर उनके अच्छे या बुरे गुणों की छाप नहीं लगी होती है।

समंकों का अविश्वास

वैज्ञानिक ज्ञान से शून्य व्यक्ति दो प्रकार के होते हैं—एक वे जो अन्वेषणों को विश्वास पूर्ण दृष्टि से देखते हैं और दूसरे जो उन्हें केवल एक 'अनुमान' ही समझते हैं। सांख्यिकी के ज्ञान से अनभिज्ञ व्यक्ति के विचार भी इसी प्रकार के होते हैं। कुछ लोगों के विचार में "समंक झूठ नहीं बोल

---

* "The Statistician's contribution to a sociological problem is only one of objective measurement and this is frequently among the less important of the data."

—A. L. Bowley

सकते" और कुछ लोगों के अनुसार "समंक सर्वांगी झूठ" हैं। एक समुदाय का विचार है कि "समंक कुछ भी सिद्ध कर सकते हैं" और दूसरे का निर्णय है कि "समंक कुछ भी सिद्ध नहीं कर सकते"।

"समंक कुछ भी सिद्ध कर सकते हैं" इस तर्क रहित एवं अविश्वासजनक विचार को हम पूर्णतया अकारण नहीं कह सकते क्योंकि किसी भी भोले भाले मनुष्य को समझाने के लिए समंकों की शक्ति यथेष्ट है। झूठे एवं स्वार्थी व्यक्तियों द्वारा अवैज्ञानिकरूप से प्रयुक्त समंकों से मनुष्य सदा ही सन्तुष्ट होता रहेगा जब तक वह यह नहीं जानता है कि उनका प्रयोग किसी छलसाधन के निमित्त हो रहा है क्योंकि समंकों के ऊपर तो सत्यासत्य की कोई छाप होती नहीं है। सांख्यिकी के ज्ञान से शून्य व्यक्ति अपनी अज्ञानता के कारण समंकों में अश्रद्धा रखता है एवं सन्देह युक्त दृष्टि से देखता है। समंक स्वयं कुछ भी सिद्ध नहीं कर सकते परन्तु "समंकों को कुछ भी सिद्ध करने के लिये प्रयुक्त किया जा सकता है।" अर्थात् समंकों के अवैज्ञानिक एवं स्वार्थपूर्ण छलसाधन के द्वारा कुछ ऐसे प्रतिफलों तक पहुँचा जा सकता है जो परिशुद्ध समंकों द्वारा अगम्य हों। "सांख्यिकी एक ऐसा विज्ञान है जिसके साधकों को एक कलाकार के समान आत्मबल का प्रयोग करना चाहिए।" एक कलाकार उसी प्रकार की वस्तुओं एवं रंगों के प्रयोग से अलग-अलग चित्र बना सकता है। यदि उसके विचार शुद्ध हैं और लोक कल्याण की दृष्टि से कला का उपयोग करना चाहता है तो तर्क शुद्ध एवं यथार्थ चित्र अंकित करेगा अन्यथा स्वार्थ-पूर्ण एवं असत्य चित्रों में अपनी कला नष्ट करेगा। इस प्रकार समंकों के प्रयोग में व्यक्तिगत विचारों का प्रभाव पड़ता है।

कुछ ऐसे अविश्वासी लोग भी होते हैं जो सांख्यिकी को झूठ बोलने की श्रेणी में रखते हैं और उनका विचार है कि "असत्य भाषण के तीन प्रकार हैं---झूठ, सफेद झूठ एवं समंक"। सांख्यिकी का महत्व दिन प्रतिदिन बढ़ता जाता है और अब प्रत्येक क्षेत्र में समंकों का प्रयोग होने लगा है। अपने तर्कों को अधिक प्रभावशाली बनाने के लिए राजनीतिज्ञ, अर्थशास्त्री, सामाजिक कार्यकर्त्तागण, एवं अनेक अन्य प्रकार के लोग समंकों का प्रयोग करने लगे हैं। समंकों में शक्ति अवश्य है जिसके छलसाधन द्वारा असत्य को सत्य सिद्ध किया जा सकता है। श्री एफ० सी० मिल्स के कथनानुसार "एक यन्त्र के रूप में सांख्यिक ढंगों का बुद्धिपूर्ण प्रयोग एवं उनके द्वारा प्राप्त प्रतिफलों का

तर्कशुद्ध विवेचन किया जाना अत्यन्त आवश्यक है।" भ्रामक तथ्यों पर विश्वास करने में प्रयोग करने वाले और समझने वाले दोनों की ही गलती होती है। प्रयोग करने वाले को "असत्यभाषी" न होना चाहिए और समझने वाले को "समंक देखकर ही सत्य न समझ लेना चाहिए क्योंकि उनके भी वाह्य एवं आन्तरिक मूल्य होते हैं।" सांख्यिकीय ढंगों पर आधारित और समंकों द्वारा विभूषित तर्कों पर विश्वास करने से पहिले निम्नलिखित बातों पर विचार करना चाहिए:—

(अ) प्राप्त किए गए समंकों का उद्गम क्या है और क्या उस पर विश्वास किया जा सकता है। (ब) समंकों का क्या अर्थ है और उनका क्या वास्तविक महत्त्व है। (स) क्या वे पूर्ण हैं, और यदि हों, तो उनका प्रस्तुत समस्या के निवारण में क्या स्थान होगा। (द) उन समंकों के सारांशीकरण की कौन सी पद्धति व्यवहृत की गई थी।

इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि समंकों को झूठ कहकर बदनाम न करना चाहिए। वरन् उनके भ्रामक उपयोग को रोकना चाहिए यदि निन्दा करना ही अभीष्ट हो तो हम अपूर्ण एवं असम्बद्ध समंकों की निन्दा करें नकि विज्ञान की। श्री विलियम किंग के अनुसार "सांख्यिकी एक अत्यन्त उपयोगी भृत्य है परन्तु केवल उनके ही लिए बहुमूल्य है जो उसका ठीक उपयोग कर सकें।" आज सांख्यिकी का महत्व प्रत्येक क्षेत्र में बढ़ता ही जा रहा है और आवश्यकता इस बात की है कि समंकों का सदुपयोग किया जाए। श्रीमान मार्शल के कथनानुसार "सांख्यिक तर्क प्रथम दृष्टि में बहुधा भ्रामक दिखलाई पड़ते हैं परन्तु तर्कशुद्ध विवेचन से सांख्यिक विभ्रम दूर हो जाते हैं।" यह कथन समंकों के यथार्थ उपयोग की ओर संकेत करता है कि समंकों का प्रयोग करते समय उनके तर्कशुद्ध विवेचन के द्वारा जान लेना चाहिए कि वे यथार्थ हैं अथवा नहीं।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. Discuss the importance of Statistics for National Planning in India.

भारतवर्ष के राष्ट्रीय नियोजन में सांख्यिकी का महत्व समझाइये।

(M. A. Agra, 1943)

2. Discuss briefly the different kinds of Statistical Methods and show the usefulness of the knowledge of statistics to business-men, scientists and economists.

विभिन्न सांख्यिकीय ढंगों का संक्षेप में विवरण कीजिए और व्यवसाइयों, वैज्ञानिकों एवं अर्थशास्त्रियों के लिए उनका महत्व समझाइये।

(B. Com. Agra, 1936)

3. Discuss fully the importance of Statistics as an aid to commerce.

वाणिज्य के सहायक के रूप में सांख्यिकी का महत्व विशद रूप से समझाइये ? (B. Com. Alld., 1942)

4. "Statistical Methods are most dangerous tools in the hands of the inexperts. Statistics is one of those sciences whose adepts must exercise the self-restraint of an artist."

Explain fully the significance of the above Statement.

"सांख्यिकीय ढंग किसी अनाड़ी के हाथ में बहुत ही भयंकर औजार के समान हैं। सांख्यिकी एक ऐसा विज्ञान है जिसके प्रयोगी को एक कलाकार के समान आत्म संयम रखना चाहिए।"

उपरोक्त कथन का आशय स्पष्ट कीजिए। (M. A. Patna, 1942)

5. Discuss the Scope, Utility and Limitations of Statistics.

सांख्यिकी का क्षेत्र, उपयोगिता और सीमाएँ समझाकर लिखिये।

(B. Com. Agra, 1937)

6. Discuss the importance of the study of statistics and show how it can help the extension of scientific knowledge, the establishment of sound business and the introduction of political reforms,

सांख्यिकी का महत्व समझाइये और यह स्पष्ट कीजिये कि किस प्रकार यह वैज्ञानिक ज्ञान के विस्तार, सुदृढ़-व्यवसाय संगठन, और राजनैतिक सुधार करने में सहायक हो सकती है।

(B. Com. Agra, 1942)

7. "Statistics should not be used as a blindman does a lamp post, for support instead of for illumination."

Comment on the above remark.

"सांख्यिकी का प्रयोग एक अन्धे के समान न करना चाहिए जो कि एक बिजली के खम्भे से प्रकाश की जगह केवल सहारा लेने का काम लेता है।"

उपरोक्त कथन की समीक्षा करिये।

(M. A. Agra, 1946.)

8. Write a short essay on the application of modern statistical technique to economic problems, illustrating your answer with reference to at least three concrete examples.

'आधुनिक सांख्यिकीय पद्धति द्वारा आर्थिक समस्याओं के निवारण' पर एक संक्षिप्त निबन्ध लिखिये और कम से कम ३ वास्तविक उदाहरण दीजिए।

(M. A. Agra, 1947)

9. Write an essay on "Statistics in the service of State."

"सांख्यिकी की राज्य के प्रति सेवायें" पर एक निबन्ध लिखिये।

(I.C.S. 1936).

10. "For preparing a well-considered scheme of economic planning with the object of reducing poverty of masses in India, correct statistical information is as essential as a correct diagnosis for a successful treatment of any chronic disease".

"भारतवर्ष की गरीबी को मिटाने के हेतु किसी भी अर्थ नियोजन की योजना के लिए यथार्थ सांख्यिकीय सूचनाओं की उतनी ही आवश्यकता है जितनी कि किसी असाध्य बीमारी के लिए सफल चिकित्सा की।"

उपरोक्त कथन की आवश्यक समीक्षा के साथ पुष्टि कीजिए।

(B. Com. Luck., 1937)

11. Give a few examples of the misuse of Statistics in India. How can the wrong use of Statistics be avoided ?

भारत में समंकों के दुरुपयोग के कुछ उदाहरण दीजिए और बतलाइये कि किस प्रकार इसे रोका जा सकता है ?

(B. Com., Agra, 1946)

12. "Figures never lie," "Statistics can be made to prove any thing." Comment on the above two Statements indicating the reasons for the existence of such divergent views regarding the nature and functions of Statistics.

"संमक कभी झूँठ नहीं बोलते," "समंकों का प्रयोग कुछ भी सिद्ध करने के लिए किया जा सकता है।" उपरोक्त दोनों कथनों की समीक्षा कीजिए और इस प्रकार की विरोधी विचारधाराओं के उद्गम के कारण स्पष्ट कीजिए।

(B. Com., Part II Agra, 1935)

अध्याय ३.

सांख्यिकी की उत्पत्ति एवं विकास

साँख्यिकी का वैज्ञानिक महत्व सर्वप्रथम तब समझा गया जब जन-समूहों एवं राज्यों का प्रादुर्भाव हुआ। जब जन-समूह निश्चित राष्ट्रों के रूप में एकता सूत्र में बँध गए तो शासन कर्त्ताओं को इस बात की आवश्यकता जान पड़ी कि भूमि-विभाजन, कर लगाने, प्रजा के वर्गीकरण करने एवं राष्ट्र की सैनिक स्थिति की शक्ति जानने के लिए सूचनाएँ एवं तथ्थों का संकलन किया जाए। प्रत्येक संकलन का उद्देश्य केवल राज सम्बन्धी नियोजन, शासन प्रबन्ध, इत्यादि, होने के कारण सांख्यिकी का प्रादुर्भाव एक राजकीय विज्ञान के रूप में हुआ था। समंकों का प्रयोग बहुत प्राचीन है और सर्व प्रथम की जाने वाली जनगणना और राष्ट्रीय आय-मापन का उदाहरण सन् ३०५० ईसा से पूर्व मिलता है जब कि मिश्र में पिरामिडों के बनाने के लिए उसकी आवश्यकता पड़ी थी। हेमसीज द्वितीय ने मिश्र की समस्त भूमि की गणना करवाई जिससे वह अपनी प्रजा में अधिक उत्तम प्रकार से भूमि वितरण कर सके। मध्ययुगीन राजाओं जैसे चार्लमेन, विलियम विजेता, जर्मनी के फ्रेडरिक द्वितीय और इँगलैंड के एडवर्ड द्वितीय द्वारा समय समय पर इसी प्रकार की गणनाएँ अनेकों प्रकार की समस्याओं के निवारणार्थ की गई। भारतवर्ष में भी मौर्यकाल एवं मुगल काल में सरकारी ढंग से समंकों का संकलन किया गया था। आइनें-अकबरी अकबर के शासन काल में राजा टोडरमल के द्वारा किए गए व्यक्तिगत अनुसंधानों के द्वारा व्युत्पन्न समंकों और तथ्यों का एक संकलन है। अकबर के शासनकाल में इस ग्रंथ का एक महत्वशाली स्थान रहा है।

धीरे धीरे मध्ययुगीन प्रभाव नष्ट होने लगा और उसके स्थान पर अन्वेषण युग का पदार्पण हुआ, जमींदारी प्रथा कमजोर पड़ने लगी और वाणिज्य का सर्वाङ्गीण विकास होने लगा। सभी देशों में प्राचीन वस्तु-विनिमय के सिद्धांत को मुद्रा ने हटा दिया और बड़े बड़े विद्वानों ने आर्थिक समस्याओं पर भी विचार करना प्रारम्भ कर दिया। आर्थिक एवं व्यापारिक समस्याओं के अध्ययन में समंकों की आवश्यकता पड़ने लगी और उनका संकलन इस दृष्टिकोण से भी किया गया।

सोलहवीं शताब्दी में अमेरिका की खोज एवं नए नए खनिज पदार्थों की तोज से व्यापार में महान उन्नति हुई और इस कारण सांख्यिकी का हत्व मुख्य रूप से मुद्रा विनिमय एवं ज्योतिष संबन्धी ज्ञान के विस्तृत करने ं बहुत बढ़ गया। रानी एलीजाबथ के मन्त्री सर टामस ग्रेशम ने मुद्रा ंबन्धी अनेकों समस्याओं का अध्ययन किया और अपना जगत प्रसिद्ध सिद्धांत नाया। बेकन ने अपनी महत्वशाली पुस्तक 'Economia' लिखी और वलियम स्ट्राफोर्ड ने इँगलैंड के दस समकालीन समस्याओं का एक विस्तृत ववरण अपनी पुस्तक में दिया। ज्योतिष के क्षेत्र में आकाशीय-पिण्डों के लन के सम्बन्ध में तथ्यों का संग्रहण किया गया जिनके आधार पर तारों के स्थान एवं ग्रहण सम्बन्धी खोज की जा सकना आसान हो गया। वलन के तीन प्रमुख सिद्धान्तों' का अन्वेषण केपलर ने किया जिसके आधार र न्यटन ने अपने जगत प्रसिद्ध 'गुरुत्वाकर्षण सिद्धान्त' का प्रतिपादन किया। ाय संबन्धी संन्नियम बनाने में भी सांख्यिकी एक आधार शिला बन गई और पेन के फिलिप द्वितीय, कोलबर्ट, लुई चौदहवें और अन्य व्यक्तियों ने भी इसी तु गणनाएँ करवाई।

सत्रहवीं शताब्दी के प्रारम्भ में सामाजिक एवं जीवधारी समंकों की ावश्यकता प्रतीत हुई और उसके संकलन के कारण सांख्यिकी के क्षेत्र का वस्तार हुआ। जन्म, मरण, विवाह संबन्धी समंकों का संकलन किया गया जसमें प्रोटेस्टैन्ट मतवालों ने बड़ा उत्साह लिया क्योंकि वे उनके आधार पर र्मसुधार काल में वर्ण--संकरता रोकना चाहते थे। स्ट्रासवर्ग विश्वविद्यालय ा प्रोफेसर जार्ज ओबरेक्ट ने १६१२ ई० में जीव एवं अपराध संबन्धी मंकों के संकलन करने के सम्बन्ध में एक योजना बनाई जिसका उद्देश्य रित्र सुधार करना और जनता को पेन्शन व जीवन बीमा के द्वारा सहायता रना था। १६६१ ई० में कैप्टेन जान ग्रांट ने जन्म एवं मरण संबन्धी मंकों का एक विश्लेषणात्मक अध्ययन किया। १६८१ ई० म कैस्पर न्यूमैन पैरिशों की पूर्व संचित सूचनाओं में से कुछ आवश्यक समंकों का संकलन कया और कुछ ऐसे तथ्यों की खोज की जिसने एडमंड हैले नामक ज्योतिषी ुवं वैज्ञानिक को सर्व थम "मरण तालिका" बनाने में बड़ी सहायता हुँचाई। ये तालिकायें ही जीवन बीमा की आधार शिलाएँ हैं तदुपरान्त म्स डाडसन् और टामस सिम्सन न अपने द्वारा बनाई गई मरण तालिकाओं

के आधार पर प्रिमियम टेबल बनाए। इस प्रकार सांख्यिकी ने जीवन बीमा की आधार शिला का काम किया।

अठारवीं शताब्दी तक सांख्यिकी का स्वरूप बदल चुका था और अब उसकी पहिचान केवल एक रह गई थी—समंकों का प्रयोग। सर विलियम पेटी, जान ग्रांट, ससमिल्च और अन्य समकालीन व्यक्तियों ने 'राजकीय गणित' के अन्तर्गत अपने अध्ययन किए। उनके सांख्यिक अध्ययन के बाद ही लेप्लेस, फोरियर, लैम्बार्ट, क्यूटले और अन्य शास्त्रियों ने १९ वीं शताब्दी में अनेक महत्वपूर्ण अनुसंधान किए।

जेम्स बरनौली ने सांख्यिकी का संबन्ध गणित शास्त्र के साथ और प्रगाढ़ कर दिया और उन्होंने ही "सम्भावना का सिद्धांत" प्रतिपादित करके उसे समंकों की सहायता से समझाया। इस सिद्धांत के दो विभाग हैं महांक जड़ता, नियम और सांख्यिक-नियमिता सिद्धांत जिनके आधार पर सांख्यिक की बीमा एवं व्यापार संबन्धी अनेकों अनुसंधान हो सके हैं। "संभावना के सिद्धान्त' को ससमिल्च एवं ग्धास ने अपने अध्ययन द्वारा अधिक विकसित किया और क्यूटले ने उसे आधुनिक स्वरूप प्रदान किया।

१९ वीं एवं २० वीं शताब्दियों में भी सांख्यिकी के क्षेत्र का विकास हुआ। जेम्स बरनौली द्वारा स्थापित सम्भावना के सिद्धान्त की प्रगति में नैप, लेक्सिस, सर फ्रांसिस गाल्टन और कार्ल पियरसन का प्रमुख स्थान हैं। जीव सम्बन्धी विज्ञान में भी सांख्यिक अध्ययन किया गया और गेटे, हेगल एवं कोम्टे की विचार धारा पर इसका काफी प्रभाव पड़ा। सुजनन विद्या (Eugenics) के प्रतिस्थापक श्री फ्रांसिस गाल्टन ने एक कुल से दूसरे में मानसिक और शारीरिक लक्षणों के संक्रामण (Transmission of characteristics) के सम्बन्ध में अध्ययन किया। कार्ल पियरसन ने अपनी पुस्तक (Grammer of Science) में यह स्थापित किया है कि विकास एवं पित्रा गति (Heredity) के शास्त्रों का आधार सांख्यिकीय अध्ययन ही है।

सांख्यिक ढंगों के क्षेत्र का विकास होता गया और यद्यपि १६ वीं और १७ वीं शताब्दी में ही आर्थिक समंक एकत्र किए जाते थे। १९वीं एवं २० वीं शताब्दी में उनका महत्व बहुत ही बढ़ गया। सर विलियम पेटी ने (Political Arithmetic) १६९० में छपवाई और ग्रिगोरी किंग ने माँग-पूर्ति का सिद्धान्त समझाने का प्रयत्न किया। एडम स्मिथ ने यह अनुभव

किया कि अर्थशास्त्र को तथ्यों पर आधारित करना चाहिए। आर्थर यंग ने अपने प्रवास के अनुभवों पर एक विस्तृत ग्रंथ लिखा, एडम ने गरीबों का इतिहास लिखा और माल्थस ने ऐतिहासिक तथ्यों में अनुसंधान के आधार पर विभिन्न कालों में एवं विभिन्न देशों में जनसंख्या के विस्तार पर प्रभाव डालने वाले कारणों का विस्तृत विवेचन किया। पेटी, आर्थर यंग और एडम द्वारा किये गये अध्ययन को एक मैक कुलोच और पोर्टर ने चालू रखा और ह्यूम व एडम स्मिथ ने विस्तृत किया। अब घटनाओं के ऐतिहासिक अंकों के मुकाबिले में तुलनात्मक अंकों को विशेष स्थान दिया जाने लगा है।

प्रतिष्ठित अर्थशास्त्री (Classical school) निगमन तर्क को मानते थे और आगमन प्रणाली पर अविश्वास रखते थे। उनके प्रभुत्वकाल में सांख्यिकी की उन्नति नहीं हो सकी उसे एक विशेष उत्तेजना उस समय मिली जब कि पूर्णतया सिद्धान्तिक आधारों के विरुद्ध एक अधिक व्यवहारिक एवं ऐतिहासिक पद्धति का विकास हो रहा था। ऐतिहासिक दल की स्थापना कोमटे ने १७९८ में की और उसके मानने वाले जर्मनी में रोशर, नाइज, हिल्डेब्रान्ड, स्कोमलर और इंग्लैंड में बैजहाट, लेस्ली और जेवन्स थे। इस दल का प्रभाव अनेक समकालीन अर्थ-शास्त्रियों पर पड़ा था जैसे रोजर्स, आरनाल्ड टायनबी, सिडविक, वाकर, कार्ल मार्क्स, एन्जेलस, राडबर्टस और लेनले। इस दल ने पहिले आगमन या अनुसंधान प्रणाली को ही वैज्ञानिक विश्लेषण की तर्क शुद्ध प्रणाली मानी परन्तु धीरे-धीरे इस निर्णय पर पहुँचे कि निगमन प्रणाली को भी हम प्रयोगों द्वारा निरीक्षण करके उपयोगी बना सकते हैं। स्कोमलर का निर्णय था कि "व्यक्तिगत कारणों से संबधित ज्ञान के संवर्धन के लिये हमें आगमन प्रणाली की आवश्यकता है परन्तु किसी भी निष्कर्ष पर पहुँचने के लिये संवाक्य की आवश्यकता होती है जिसका उपयोग निगमन में किया जाता है। आगमन और निगमन एक ही प्रेरणाओं, विश्वास एवं तार्किक आवश्यकताओं पर आधारित है।" उनके विचारानुसार विश्लेषण और निगमन, विवरण और भाविष्यावलोकन एक ही पद्धति की विभिन्न दिशाओं में किये जाने वाले स्वरूप हैं। उन अर्थशास्त्रियों ने जिन्होंने सांख्यिकी के विकास में सहायता दी है जेवन्स का प्रमुख स्थान है। उन्होंने आतर्व उच्चावचन (Seasonal Fluctuations), सुदीर्घकालीन प्रवृति (Secular Trend) एवं व्यवसायिक चक्रीय-उच्चावचन (Business cycles) पर महत्वपूर्ण अध्ययन किया। उनका वस्तुओं के मूल्य एवं उनके सह-सम्बन्ध

पर किया गया अध्ययन विशेष महत्व का है और इसी कारण उनका नाम
'निर्देशकों के पिता' पड़ गया है। उनका विचार था कि अर्थ शास्त्र को
सांख्यिकीय एवं ऐतिहासिक पद्धतियों द्वारा एक यथार्थ शास्त्र बनाया जा
सकता है।

अर्थ शास्त्र के गणित-सम्बन्धी दल ने आर्थिक सिद्धान्तों के विवेचन में
महत्वपूर्ण स्थान रखा है। कूर्नो, गोसें और ल्यून वालरस द्वारा स्थापित
एवं जेवन्स द्वारा प्रशंसित दल का विस्तार इंग्लैंड में मार्शल और एजवर्थ ने,
जर्मनी में लानहार्ड, आस्पित्ज और लीबेनन, इटली में पैरेटो और बोरोन ने
अमेरिका में इरविंग फिशर और रूस में बोरकेविच ने किया।

सांख्यिकी के सिद्धान्तों का विस्तार एवं विकास करने में आगस्टे मेटीजन
फ्रांसिस गाल्टन, यूल, जेम्स बर्टीलियन, बरनौली, बावले हूकर, एडम्स,
परसंस, विलियम किंग, और एफ० सी० मिल्स के प्रमुख स्थान हैं। उन्होंने
सांख्यिकी और अर्थशास्त्र में बहुत ही घनिष्ट सम्बन्ध स्थापित कर दिया है
और एक अलग शास्त्र के रूप में सांख्यिकी बहुत अधिक विस्तृत हो रही है।

भारतवर्ष में सांख्यिकी के विकास में प्रोफेसर पी० सी० महलानोबिस,
ाक्टर पी० वी० सुखात्मे और डाक्टर बी० के० आर० वी० राव का बहुत
ही महत्वपूर्ण स्थान रहा है। सांख्यिक अनुसंधान के क्षेत्र में भारतीय सांख्यिक
अनुसंधानशाला (Indian Statistical Laboratory) बहुत अच्छा कार्य
कर रही है। इस अनुसंधानशाला की स्थापना का श्रेय श्री महलानोबिस को
ही है। इसकी स्थापना १९३१ में की गई थी। भारतीय सांख्यिकी विद्यालय
(Indian Statistical Institute) की स्थापना सन् १९३२ में की
गई जिसका प्रमुख कार्य भारतवर्ष में सांख्यिकी के गम्भीर अध्ययन की
नींव डालना है। इस संस्था के संचालक भी प्रोफेसर महलानोबिस हैं।
भारतवर्ष में सर्व प्रथम साख्यिकी सम्मेलन (Statistical Conference)
सन् १९३७ में, लन्दन विश्व विद्यालय के प्रोफेसर आर० ए० फिशर की
अध्यक्षता में हुआ। इसके उपरान्त इस प्रकार के सम्मेलनों की व्यवस्था
करना अनुसंधानशाला का एक महत्वपूर्ण कार्य बन गया है। ये अनुसंधान
शाला 'संख्या' नामक एक पत्रिका प्रकाशित करती है जिसकी नीति के
विभिन्न पहलू हैं—(अ) सांख्यिकी के क्षेत्र का विशद विवेचन करना (ब)
समंकों के बीच सांख्यिकी के महत्व का ध्यान रखना, और, (स) सांख्यिक
ढंगों की अंतर्निहित एकात्मता की ओर इंगित करना। अनुसंधान शाला के

तीन प्रमुख कार्य हैं—(क) सलाहकारी, (ख) विद्यादान, एवं (ग) साँख्यिक अनुसंधान। इस अनुसंधान शाला ने प्रोफेशर फिशर द्वारा आविष्कृत भूमि प्रयोगों को भारतवर्ष की परिस्थितियों में उपयोगी बनाने का प्रयत्न किया और डा० सुखात्मे को अपनी एक पद्धति में इतनी सफलता मिली कि आज सरकार ने उसी पद्धति को प्राचीन "आनावारी पद्धति" के स्थान पर उपयुक्त माना है।

प्रोफेसर महलानोविस ने अंतरिक्ष विद्या (Metereology) और तत्संबंधी क्षेत्रों में अनेक महत्वपूर्ण अनुसंधान किए। स्वर्गीय सुधेन्धु शेखर बोस ने भी इसी क्षेत्र में कार्य किया और साँख्यिकी का प्रयोग सिंचाई योजनाओं एवं बाढ़ इत्यादि के रोकने के अनुसंधानों में किया गया।

डाक्टर आनन्डेल ने मानव जाति की उत्पति एवं विकास के सम्बन्ध में भारतीय और यूरोपियन जातियों का अध्ययन किया। उन्होंने सांख्यिकीय गुणकों की सहायता से बाह्य कलेवर सम्बन्धी अनेकों महत्वपूर्ण खोज की। इस प्रकार इस अनुसंधानशाला के विद्यार्थियों द्वारा मनुष्य-रचना शास्त्र (Anthropology) के क्षेत्र में सांख्यिकी का उपयोग किया। उन्होंने समंकों का प्रयोग मानस शास्त्र (Pscychology) एवं विद्या में भी किया। विभिन्न उम्र वाले व्यक्तिओं के बुद्धि-विषयक गुणक ज्ञात करने के लिए अनेकों समूह-प्रयोग किए और अनुसंधानशाला में वर्णाक्षरों की बारम्बारता की जाँच करने के लिए किसी अच्छी निदर्शन-प्रणाली की खोज की जा रही है।

इस अनुसंधानशाला के अन्तर्गत अर्थ शास्त्र सम्बन्धी अनेकों खोजें की जा रही हैं और अनेकों निदर्शन-खोज करने के अतिरिक्त नए निदर्शन ढंगों का आविष्कार भी किया गया है जिनसे फसलों की रिपोर्टें यथार्थ की जा सकें। कोलंम्बिया विश्व विद्यालय के प्रोफेसर होटेलिंग ने प्रोफेसर महलानोविस की योग्यता की बड़ी तारीफ करते हुए कहा था, "कि आज अमेरिका या कहीं भी कोई ऐसी योजना नहीं बनी जो यथार्थता एवं मितव्ययिता में इनकी प्रणाली का मुकाबिला कर सकें।"

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. Discuss the claims of Statistics to be regarded as a Science.

सांख्यिकी के विज्ञान कहलाने के औचित्य पर विचार कीजिए ।

(M. A., Agra, 1930)

2. "Modern Science as training the mind to an exact and impartial analysis of facts is an education specially fitted to promote sound citizenship". In the light of above statement consider the claim of Statistics and discuss the importance of Statistical method in the economic analysis of facts. Why then there should be any distrust of Statistics ?

"आधुनिक विज्ञान मष्तिष्क को तथ्यों के यथार्थ और पक्षपात शून्य विश्लेषण कर सकने की क्षमता प्रदान करता है और यह एक ऐसी शिक्षा है जो सुदृढ़ नागरिकता के निर्माण में सहायक होती है।" उपरोक्त कथन का ध्यान रखते हुए बतलाइये कि सांख्यिकी किस प्रकार आर्थिक तथ्यों के विश्लेषण में महत्व रखती है और उसका एक विज्ञान कहलाने का कितना अधिकार है ।

(M. Com., Alld., 1944)

3. "Statistics are the straw out of which, I like every other economist, have to make the bricks (Marshall)".

Explain in the light of above observation, the relation between Economics and Statistics, and discuss how far it is correct to say that the Science of Economics is becoming Statistical in its method.

"सांख्यिकी ऐसी सामग्री है जिससे अन्य अर्थशास्त्रियों के समान मुझे भी ईट बनाना है ।"

उपरोक्त कथन से सम्बन्ध रखते हुए अर्थशास्त्र और सांख्यिकी का सम्बन्ध स्पष्ट कीजिए और यह बतलाइये कि यह कहना कहा तक सच है कि अर्थशास्त्र के ढंग सांख्यिकीय होते जा रहे हैं ।

(M. Com., Alld., 1944)

4. "When you can measure what you are speaking about and express it in numbers, you know something about it, when you can not measure it, when you cannot express it in numbers your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind."

"जब आप उन तथ्यों का माप कर सकते हैं जिनके सम्बन्ध में आप बात कर रहे हैं तो आप का ज्ञान उसके सम्बन्ध में माना जा सकता है परन्तु जब आप उन्हें नाप नहीं सकते और अंकों में समझा नहीं सकते तो आपका ज्ञान न्यून और असंतोषजनक होगा।"

(Lord Kelvin)

लार्ड केल्विन के उपरोक्त कथन का अर्थशास्त्र में क्या स्थान है इसे स्पष्ट कीजिए।

(M.A., Agra, 1944)

5. Discuss how far the growth of Statistics was coeval with that of the national organisations?

राष्ट्रीय संगठनों के विकास के साथ ही साथ सांख्यिकी का प्रादुर्भाव हुआ इस तथ्य पर विचार कीजिए।

अध्याय ४.

सांख्यिकीय अनुसंधान

विभिन्न समस्याओं के निवारणार्थ समंकों के एकत्रित करने के लिए कोई एक ही पद्धति निश्चित नहीं की जा सकती है क्योंकि प्रत्येक समस्या से सम्बन्धित विभिन्न प्रकार के समंकों के संकलन की आवश्यकता होती है। परन्तु फिर भी प्रत्येक समस्या के अर्न्तगत भी हमको सांख्यिक ढंगों के प्रयोग में कुछ साम्यता मिलती है। यदि सामान्य रूप से कहा जाए तो निम्न-लिखित पद्धति क्रम की सभी सांख्यिक अनुसंधानों में आवश्यकता पड़ती है:— (अ) सामग्री का संकलन (ब) संग्रहीत सामग्री का वर्गीकरण (स) वर्गीकृत सामग्री का सूक्ष्मीकरण (द) निष्कर्षों की समालोचना एवं निर्वचन।

सांख्यिकी का कार्य समंकों के संकलन से प्रारम्भ होता है और निर्वचन संग्रहीत सामग्री के स्वरूप पर निर्भर रहता है। यदि संग्रहीत सामग्री में कुछ भूलें हुई हैं तो निष्कर्षों में विभ्रम, भूलें और गलतियाँ होना निश्चित है। इसलिए कार्य आरम्भ करने से पहिले हमें ठीक एवं तर्कशुद्ध समंक एकत्रित कर लेने चाहिए। संकलन करना कोई बहुत कठिन काम नहीं हें और इस कार्य में अनुसंधानकर्त्ता में सामान्य ज्ञान की कमी न होना चाहिए इसके अतिरिक्त उसका अनुभव स्वयं ही उसका मार्ग प्रदर्शन करेगा।

जब हम समंक एकत्र करने का कार्य प्रारम्भ करना चाहते हें तो अपने आप ही मन में कुछ प्रश्न उठने लगते हैं, उदाहरणार्थ,

(१) किसका संग्रहण करना है ?
(२) किस लिए संग्रहण अभीष्ट है ?
(३) कहाँ पर संग्रहण करना है ?
(४) किससे उसका संग्रहण करना है ?
(५) कितनी यथार्थता से युक्त सामग्री का संग्रहण करना है ?

ये प्राथमिक प्रश्न ही निम्नलिखित बातों की ओर संकेत करते हें जिन्हें सामग्री संकलन से पहिले ही तय कर लेना आवश्यक है अन्यथा यथार्थ समंक प्राप्त न हो सकेंगे।

(१) समस्या क्या है और उसकी परिभाषा ।
(२) समस्या की प्रकृति एवं उद्देश्य ।
(३) सभी उद्गमों की तालिका, जहाँ से समंक प्राप्त हो सकेंगे ।
(४) यथार्थता की कौन सी परिसीमाएं अपेक्षित हैं ।
(५) अनुसंधान का ढंग ।

सांख्यिक समस्या

अनुसंधानकर्त्ता का सबसे पहिला कार्य होता है प्रस्तुत समस्या की परिभाषा करना । उसे यह जान लेना चाहिये कि उसे किस कार्य क्षेत्र में कार्य करना है अर्थात् मानव समाज की समस्याओं के कौन से पहलू पर खोज करनी है । जब तक सांख्यिक स्वयं ही समस्या न समझेगा उसका अनुसंधान स्थिरता पूर्वक चल ही नहीं सकता है । कभी-कभी ऐसा भी हो सकता है कि वह अनुसंधान करते समय एक समान किन्तु असंम्बद्ध घटना की खोज करने में बहक जाए । समस्या की परिभाषा में थोड़ा भी परिवर्त्तन करने में पद्धति में भी बदल करने की आवश्यकता होती है । एक बार दी गई परिभाषा का पालन अनुसंधान के अन्त तक किया जाना चाहिए ।

समस्या की प्रकृति एवं उद्देश्य

प्रस्तुत समस्या की परिभाषा निश्चित करने के उपरान्त उसकी प्रकृति एवं उद्देश्य पर प्रकाश डालना आवश्यक है । इसके बिना वास्तविक संकलन का कार्य आरम्भ ही नहीं किया जा सकता क्योंकि किसी भी समस्या के उद्देश्य एवं प्रकृति ऐसे हो सकते हैं जिनके कारण एक विशिष्ट पद्धति का अपनाना आवश्यक हो जाए । उदाहरणार्थ, यदि किसी भी समस्या का उद्देश्य कुछ व्यक्तिओं के रहन सहन के खर्च के सम्बन्ध में जानकारी प्राप्त करना हो तो ऐसा आय-व्ययक अनुसंधानों (Family Budget Enquiries) द्वारा किया जा सकता है परन्तु यदि एक देश में रहने वाली समस्त जन-संख्या के स्त्री-पुरुष भेद, आय, जाति या धर्म इत्यादि के सम्बन्ध में विस्तृत विवरण की आवश्यकता हो तो एक जनगणना की आवश्यकता होगी । यदि एक छोटी खोज करना हो तो बड़ी और मँहगी पद्धति बेवकूफी होगी परन्तु एक बहुत बड़े क्षेत्र में एक साधारण अनुसंधान पद्धति बेकार सिद्ध होगी ।

अनुसंधान के उद्‌गमों का मूल्यांकन

किसी भी खोज के उद्देश्य, प्रकृति एवं क्षेत्र निश्चित कर लेने के बाद उससे सम्बन्धित सूचनाएं प्राप्त करने के उद्‌गमों का मूल्यांकन करना आवश्यक है। प्रायः सूचनाओं के दो उद्‌गम होते हैं— (अ) प्राथमिक (Primary) और (ब) द्वितीयक। प्राथमिक सामग्री वह कहलाती है जिसके संकलन में अनुसंधानकर्त्ता का स्वयं हाथ हो चाहे उसने स्वयं ही क्षेत्र में जाकर अथवा अपने प्रतिनिधियों द्वारा समंक एकत्र किए हों। द्वितीयक सामग्री वे समंक कहलाते हैं जिन्हें दूसरे ने एकत्र किया हो और जिनके संकलन में अनुसंधानकर्त्ता का कोई भी हाथ न हो। यदि द्वितीयक सामग्री भ्रामक हो तो उनसे उत्पन्न निष्कर्ष भी भ्रामक होंगे। इसलिए द्वितीयक सामग्री के प्रयोग करने से पहिले निम्नलिखित बातों पर विचार कर लेना आवश्यक है— (अ) उनके उद्‌गम, और उनकी यथार्थता (ब) सामग्री संकलन का ढंग (स) समस्या की प्रकृति एवं उद्देश्य और (द) सांख्यिकीय एकक एवं उसकी उपयुक्तता। श्री बावले के कथनानुसार "मुद्रित समंकों पर उनके बाह्य-मूल्य को देख कर ही विश्वास न कर लेना चाहिए वरन् उन्हें यथार्थ मानने से पहिले उनके अर्थ एवं सीमाएं जान लेना आवश्यक है।"

यथार्थता की सीमा

किसी भी खोज में अपेक्षित यथार्थता का प्रभाव उसके लिए निश्चित की जाने वाली पद्धति पर पड़ता है। यदि अधिक यथार्थ समंकों का संकलन अभीष्ट है तो अनुसंधान की पद्धति उससे विभिन्न होगी जिसके द्वारा हम केवल एक साधारण अनुमान लगा लेना चाहते हैं। समाज के किसी भी प्रत्यंग का हम यथार्थतम माप नहीं कर सकते हैं क्योंकि प्रत्येक एकक में उससे छोटे एककों के रूप में विभ्रम युक्त सामग्री मिलेगी। इसलिए हम केवल तुलनात्मक यथार्थता प्राप्त करना चाहते हैं। यथार्थता की परि-सीमाएं निम्नलिखित प्रकार से लिखी जा सकती हैं—

(अ) किसी भी टुकड़े की लम्बाई ५० गज़ है।

(ब) किसी भी टुकड़े की लम्बाई ५० गज और १ गज के भीतर ही कम या अधिक है।

(स) कपड़े की लम्बाई ५० गज $\pm$.५ गज है।

(द) कपड़े की लम्बाई ४९.५ गज और ५०.५ गज के भीतर है।

जब वास्तविक और अनुमानित समंकों में बहुत कम अन्तर होता है तो हम पूर्णांकों को ही अपेक्षित यथार्थता का मान दण्ड मान लेते हैं।

सांख्यिकीय माप-एकक

सांख्यिकी एक समंकों का शास्त्र है इसलिए उनके मापन के लिए किसी माप-एकक (Unit of Measurement) की आवश्यकता होती है। बिना माप-एकक के समंकों का संकलन असम्भव है। ये माप-एकक निश्चित एवं असंदिग्ध होने चाहिए नहीं तो अनुसंधान के उद्देश्य का हनन होगा और भ्रामक समंकों के एकत्रीकरण द्वारा असम्बद्ध निष्कर्षों का प्रतिस्थापन होगा। जो माप-एकक निश्चित किया जाए उसे अनुसंधान के अन्त तक प्रयुक्त करना चाहिए क्योंकि किसी भी खोज का यह उद्देश्य रहा करता है कि प्राप्त निष्कर्षों की तुलना की जा सके और तुलना केवल उन्हीं वस्तुओं की हो सकती है जो "समान लक्षणों वाली" हों। इस प्रकार उसी माप-एकक पर आधारित विभिन्न अनुसंधानों से प्राप्त समंकों की आपस में तुलना की जा सकती है।

माप एकक की परिभाषा अनुसंधान के उद्देश्य, प्रकृति एवं क्षेत्र पर निर्भर है। यदि किसी भी क्षेत्र में रहने वाले व्यक्तिओं की साक्षरता सम्बन्धी समंकों का संकलन अभीष्ट हो तो 'साक्षरता' शब्द की यथार्थ रूप से परिभाषा करना अति-आवश्यक है। यदि कुछ कपड़ा नापना है तो कोई माप-एकक निश्चित करना चाहिए। ऐसे कार्य के लिए गज़, फुट, इंच, सेन्टीमीटर या मिलीमीटर माप एकक हो सकते हैं। साधारणतया वे माप एकक सर्वोत्तम होते हैं जिनके सभी मनुष्य एक ही अर्थ लगाते हों। अस्पष्ट एककों द्वारा संकलित समंक अनुपयोगी सिद्ध होते हैं और उनसे कोई भी तर्क शुद्ध निष्कर्ष नहीं निकाले जा सकते हैं।

किसी भी सांख्यिकीय एकक में निम्नलिखित गुण होने चाहिए:—

(अ) यथार्थता और परिशुद्ध परिभाषा, (ब) अनुसंधान के उद्देश्य और प्रकृति के प्रति अनुकूलता (स) सहज एवं असंदिग्ध होना (द) स्थिर एवं निश्चित होना (क) तुलनीय एवं (ख) समान—समानता एक महान् गुण है और यदि माप एकक समान तथ्यों के लिए समान होंगे तो समंक भी यथार्थ एकत्र हो सकेंगे। इस नियम के अनुसार यदि माप-एकक अनुसंधानीय क्षेत्र के सभी मापों के लिए उपयुक्त न हों तो उसे छोटे छोटे वर्गों में ंट देना

चाहिए जैसे मजदूरी को हम 'पुरुषों की मजदूरी' 'स्त्रियों की मजदूरी' और 'बच्चों की मजदूरी' में बांट सकते हैं ।

माप एकक निम्नलिखित प्रकार के हो सकते हैं—

(अ) प्रगणन एकक (Units of collection)

(ब) विश्लेषण एकक और निर्वचन एकक (Units of analysis and interpretation)

प्रगणन एकक

प्रगणन अथवा संकलन एकक (Units of Collection) वे एकक होते हैं जिनके आधार पर समंकों का संकलन किया जाता है । ऐसे एकक दो प्रकार के होते हैं— (अ) साधारण और (ब) असाधारण। साधारण एकक माप करने का एक सरल एकक होता है जैसे, गज, फुट, इंच, इत्यादि। ऐसे एकक बहुत सहज, निश्चित एवं असंदिग्ध होते हैं और इसी कारण गलती होने की सम्भावना कम होती है। असाधारण या संयुक्त एकक दो साधारण एककों का संयुक्त स्वरूप है जिनकी निश्चित परिभाषा करना कुछ अधिक कठिन है । उदाहरणार्थ, साक्षर-व्यक्ति, साक्षर-बेकार, डिग्री-कालेज, पैसेन्जर-मील, कृषि-श्रमिक इत्यादि ।

विश्लेषण एवं निर्वचन एकक

जब किसी भी क्षेत्र से सम्बन्धित समंक एकत्रित कर लिए जाते हैं तो उनका विश्लेषण एवं निर्वचन किया जाता है जिससे समूह के लक्षणों का एक सूक्ष्म रूप में दर्शन किया जा सके। ऐसा करने के लिए प्रमुखतः (अ) गुणक (Coefficient) (ब) अनुपात (Ratio) और दरों (Rates) का प्रयोग किया जाता है। गुणक एक ऐसी संख्या है जिसे यदि कुल योग से गुणा किया जाए तो एक सम्बन्धित संख्या बतलाती है। यदि मृत्यु दर ५० प्रति सहस्त्र है तो गुणक .०५ होगा और यदि इस गुणक को १००० से गुणा किया जाए तो प्रतिफल ५० होगा। विभिन्न देशीय समंकों की तुलना करने अथवा देश के विभिन्न कालिक परिस्थितियों पर विचार करने में गुणक का एक महत्वपूर्ण स्थान है। अपराध, आत्महत्याएं, दुर्घटनाएं, इत्यादि को समझाने में गुणक का प्रयोग किया जा सकता है और उसका सूत्र निम्नलिखित है:—

$$\text{गु} = \frac{\text{सं}}{\text{यो}}$$

जहाँ 'गु' का अर्थ है गुणक, 'सं' का अपराध इत्यादि की संख्या और 'यो' का अर्थ है कुल व्यक्तियों का योग या जनसंख्या।

अनुपात या निष्पत्ति किन्हीं भी समान संख्या राशियों के सम्बन्ध को कहते हैं जब कि किसी एक को दूसरे के परिभाग के रूप में दिखलाया गया हो। दूसरे शब्दों में जब दो एक सी राशियाँ हों तो एक का दूसरे के साथ अनुपात एक को दूसरे से भाग देकर मालूम किया जा सकता है। जैसे अ:ब या। अ/ब यहाँ अ को पूर्वांग (Antecedent) और ब को उत्तरांग (Consequent) कहते हैं।

यदि पूर्वांग उत्तरांग के बराबर हो तो अनुपात को समता—निष्पत्ति कहते हैं।

यदि पूर्वांग उत्तरांग से बड़ा हो तो उसे एकाधिक-निष्पत्ति कहते हैं।

यदि पूर्वांग उत्तरांग से छोटा हो तो उसे एकोन-निष्पत्ति कहते हैं।

दर (Rate) एक ऐसा एकक है जो किसी भी संख्या को प्रतिशत या प्रति सहस्त्र बतला कर सरल बनाता है। उदाहरणार्थ, जन्म—दर, मृत्यु—दर, जीवन—दर इत्यादि हमेशा प्रति सहस्त्र लिखी जाती हैं।

इस प्रकार यह सिद्ध होता है कि निष्कर्षों के मालूम करने से पहिले संग्रहीत समंकों को सरल बनाने के लिए भी कुछ एककों की आवश्यकता होती हैं जिन्हें विश्लेषण एवं निर्वचन एकक कहते हैं। ये एकक पूर्व निश्चित एवं यथार्थ होने चाहिए।

समस्या की परिभाषा, प्रकृति एवं उद्देश्य के अनुसार एकक का चुनाव और यथार्थता की परिसीमाएं निश्चित कर लेने के बाद अनुसंधान की पद्धति तय करना एक महत्वपूर्ण कार्य है जिसका अध्ययन हम अगले अध्याय में करेंगे।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. What is a Statistical unit. Is it necessary that the data should be homogeneous ?

सांख्यिकीय एकक क्या होता है ? क्या ये आवश्यक हैं कि सामग्री समान हो ? (B. Com. Agra, 1939)

2. How should an economic survey of a village be organised ? What steps should be taken to gain the confidence of the people of that village ?

किसी भी गाँव में आर्थिक खोज की किस प्रकार व्यवस्था करनी चाहिए ? गाँव के व्यक्तियों के विश्वास को जीतने के लिए क्या प्रयत्न आवश्यक है ।

(B. Com., Agra, 1945)

3. "One of the aims of Statistics is to describe populations (through samples) and to this end statistical constants are calculated." Discuss this statement carefully and show how this end is sought to be achieved.

"सांख्यिकी के उद्देश्यों में से एक समग्रों को (न्यादर्शों के द्वारा) विवरण देना है और इसलिए सांख्यिकीय अचलपद बनाए जाते हैं ।" इस कथन का विवेचन कीजिए और बतलाइये कि समग्र के विवरण देने का कार्य सांख्यिकी किस प्रकार सम्पादित करती है ।

(I. C. S. 1936)

4. What do you understand by (i) composite units and (ii) units of analysis ? Explain their respective uses.

आप (अ) संग्रथित एकक और (ब) विश्लेषण एकक से क्या समझते हैं । उनके उपयोग समझाइये ।

5. Write a note on the purpose and use of Statistical Investigations ?

सांख्यकीय अनुसंधानों के उद्देश्य और उपयोग पर एक संक्षिप्त निबन्ध लिखिये ।

अध्याय ५.

संख्या संकलन की पद्धतियाँ

संख्याओं के संग्रहण की दो मुख्य पद्धतियाँ हैं— (अ) प्राथमिक ढंग जिसके अनुसार अनुसंधानकर्त्ता का स्वयं या उसके प्रतिनिधि का क्षेत्र में उपस्थित होना आवश्यक है। (ब) द्वितीयक ढंग जिसके अन्तर्गत अनुसंधान-कर्त्ता दूसरों के द्वारा एकत्र सामग्री का उपयोग करता है। प्राथमिक ढंग द्वारा संग्रहीत सामग्री प्राथमिक सामग्री कहलाती है और उसमें अधिक यथार्थता होती है और यदि न भी हो तो सांख्यिक को उसमें सम्भावित विभ्रमों का एक अनुमान होता है। यदि किसी भी समस्या-विशेष के लिए विभ्रम युक्त सामग्री दूषित प्रतिफल देगी तो ऐसी दशा में प्राथमिक सामग्री के गुण दोषों से जानकारी होने के कारण सांख्यिक उनका परिशोधन कर सकता है। यदि समस्या के असम्बद्ध पहलू पर विचार करना अभीष्ट है तो वह फिर से समंक एकत्रित करेगा। द्वितीयक ढंग से प्राप्त की गई सामग्री द्वितीयक सामग्री कहलाती है। द्वितीयक सामग्री के सम्बन्ध में सांख्यिक को कोई भी ज्ञान नहीं होता है और इसलिए ऐसी सामग्री द्वारा प्राप्त प्रतिफलों पर भी बहुत अधिक विश्वास नहीं किया जा सकता है। हो सकता है कि जब द्वितीयक समंक एकत्र किए गए थे प्रस्तुत समस्या आज की समस्या से बिल्कुल विभिन्न रही हो, समंक एकत्रित करने वाला प्रगणक एक पक्षपातपूर्ण व्यक्ति रहा हो, माप–एकक अस्थिर हो और एक ही माप–एकक का प्रयोग सम्पूर्ण अनुसंधान में न किया गया हो। ऐसी दशाओं में द्वितीयक सामग्री का प्रयोग खूब सोच विचार कर लिया जाना चाहिए और जहाँ भी सम्भव हो प्राथमिक समंकों का प्रयोग किया जाना श्रेयस्कर होगा। सांख्यिकी में ऐसे क्षेत्र जिनमें से समंक एकत्रित किए जाए समंक-समूह या समग्र (Universe or Population) कहलाते हैं।

प्राथमिक ढंग

समंक एकत्र करने के निम्नलिखित प्राथमिक ढंग हैं जिनके अनुसार सांख्यिक को समंकों का उपयोग करने से पहिले उनका संग्रह करना आवश्यक होता है:—

(१) प्रत्यक्ष स्वयं अवलोकन।
(२) परोक्ष मौखिक अनुसंधान।
(३) संवाददाताओं से सूचनाएं प्राप्त करना।
(४) अनुसूचियों द्वारा संसूचकों से समंक प्राप्त करना।
(५) प्रगणकों द्वारा प्रश्नावलियों की सहायता से सामग्री-संग्रहण करना।

(१) प्रत्यक्ष स्वयं अवलोकन

जहाँ तक सम्भव हो सांख्यिकीय तथ्य सांख्यिक द्वारा स्वयं ही एकत्र किए जाने चाहिए। इस पद्धति के अनुसार सांख्यिक का अनुसंधान के क्षेत्र में स्वयं उपस्थित रहना आवश्यक है। क्योंकि सांख्यिक प्राप्त समंकों का स्वयं ही प्रयोग करेगा इसलिए यदि वह स्वयं ही उन्हें एकत्र भी करे तो उनके गुण-दोषों से पूर्ण रूप से परिचित होने के कारण उनका आवश्यकतानुसार परिशोधन कर सकेगा। इस पद्धति की प्रकृति के कारण ही इसका क्षेत्र संकुचित है और इस ढंग का ऐसे स्थान में प्रयोग नहीं किया जा सकता जहाँ कि अनुसंधान का क्षेत्र विशाल हो और थोड़े ही समय में खोज समाप्त न की जा सके। ये पद्धति स्थानिक अनुसंधानों के लिये बहुत उपयोगी है क्योंकि वहाँ सांख्यिक समंक क्षेत्र में स्वयं ही उपस्थित रह सकता है। ये पद्धति दोषपूर्ण भी हो सकती है यदि सांख्यिक सच्चा व्यक्ति न हो क्योंकि उसके व्यक्तिगत पक्षपात (Bias) के कारण अभ्यानत समंक एकत्र किए जाएंगे और दोषपूर्ण समंकों के द्वारा प्राप्त प्रतिफल भी भ्रामक ही होंगे। इस पद्धति का प्रयोग इंग्लैण्ड में ले प्ले (Le Play) ने मजदूरों के आय-व्ययकों के अध्ययन में किया था। वह अपने जीवन काल में समय और शक्ति की कमी के कारण बहुत कम कुटुम्बों का अध्ययन कर सका था। इसका प्रमुख कारण यह था कि इस पद्धति के अनुसार उसका प्रत्येक अनुसंधान के क्षेत्र में रहना आवश्यक था। इस पद्धति के निम्नलिखित गुण-दोष हैं:—

गुण—(१) इस पद्धति को अपनाने में यथार्थतम समंकों का संकलन किया जा सकता है क्योंकि समंक क्षेत्र में अनुसंधानकर्त्ता का होना आवश्यक है।

(२) इस पद्धति का विशेष महत्व उस समय है जब कि अनुसंधान-कर्त्ता एक छोटे से क्षेत्र में खोज कर रहा हो और उसके पास समय भी इतना हो कि वह व्यक्तिगत समंकों को महत्व दे सके।

(३) क्योंकि अनुसंधानकर्त्ता स्वयं ही किसी विशिष्ट समस्या के लिए समंक एकत्र करता है वह संग्रहण में समस्या के उद्देश्य एवं प्रकृति का सदैव ध्यान रख सकता है।

दोष—(१) किसी भी बड़े अनुसंधान क्षेत्र में समंक एकत्रित करने के लिए ये पद्धति अनुपयुक्त है क्योंकि इसमें बहुत समय और धैर्य्य की आवश्यकता है।

(२) संग्रहीत सामग्री केवल अनुसंधानकर्त्ता के ही काम की होती है और उसमें उसकी अभिनति या पक्षपात की छाप होती है। वह अपने झुकाव के अनुसार सामग्री एकत्र करके कभी-कभी भ्रामक तथ्य भी सिद्ध कर सकता है।

(२) परोक्ष मौखिक अनुसंधान

जब अनुसंधान का क्षेत्र विस्तृत होने के कारण उपरोक्त पद्धति से काम नहीं चल सकता तो परोक्ष मौखिक अनुसंधानों का प्रयोग किया जाता है। इस प्रणाली के अन्तर्गत अनुसंधानकर्त्ता स्वयं ही समंक क्षेत्र में नहीं जाता है और अपने प्रतिनिधियों द्वारा सामग्री-संग्रहण करता है। वह या तो किसी व्यक्ति या कमेटी को अपने प्रतिनिधि रूप में समंक क्षेत्र में भेजता है जिसका कार्य कुछ निश्चित प्रश्नावलियों के अनुसार समंक एकत्रित करना है। यदि प्रतिनिधि के लिए सांख्यिक ने कोई प्रश्नावलियाँ निर्धारित नहीं की हों तो उन्हें पूर्ण अधिकार होता है कि अपनी इच्छानुसार सामग्री संग्रहण करें। प्रायः व्यक्तिगत अभिनति (Bias) को दूर करने के लिए सांख्यिक अनुसंधानकर्त्ताओं की सहायता के लिए प्रश्नावलियाँ बनाकर दे देता है। इससे एक अच्छाई और होती है कि समस्या के अनुकूल ही समंक एकत्र हो जाते हैं। प्रायः सरकार इसी प्रणाली का उपयोग करके जाँच समितियाँ बना देती है। जाँच समितियों के सामने जाने वाले व्यक्ति "गवाह" कहलाते हैं और ये समितियाँ उनकी 'गवाही' को एक वर्गीकृत रूप में सांख्यिक को भेज देते हैं। जब कोई भी समिति गवाही के लिए व्यक्तियों को निदर्शन प्रणाली के अनुसार छाँटती है तो इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि गवाहों में निम्नलिखित गुण हों—(अ) वे गवाही से सम्बन्धित तथ्यों का पूर्ण ज्ञान रखते हों और (ब) उन्हें अनुसंधान से सम्बन्धित व्यक्तिओं अथवा पार्टियों

में किसी की ओर कोई विशेष झुकाव न हो। इस पद्धति का श्रेय इसी बात में है कि गवाह कुल व्यक्तियों का प्रतिनिधित्व करते हैं कि नहीं। गवाही देने के योग्य कुटुम्बों का चुनाव एक 'पद्धति-पूर्ण न्यादर्श प्रणाली' (Systematic Sampling) द्वारा किया जाना चाहिए। बहुत से विश्व-विद्यालयों के प्रोफेसरों, सामाजिक कार्यकर्त्ताओं एवं अर्थशास्त्रियों द्वारा इस प्रकार के अनुसंधान किए गए हैं। नीचे एक ऐसे ही अनुसंधान से सम्बन्धित प्रश्नतालिका दी गई है:—

गवाही देने वाले मज़दूरों के रहन सहन के स्तर सम्बन्धी समंकों के संग्रहण के लिए निश्चित की गई प्रश्न तालिका।

कुटुम्ब के सरगना का नाम—
धर्म एवं जाति—
उत्पत्ति का प्रान्त एवं जिला—
छोड़ कर आने का कारण—
कुटुम्ब की बनावट—

	संख्याएं				सम्बन्ध
	पुरुष	स्त्रियाँ	लड़के	लड़कियाँ	
कमाने वाले					
आश्रित					

साक्षरता की सीमा—
कुटुम्ब की औसत मासिक आय—
कुटुम्ब का औसत मासिक व्यय—
खाना
कपड़ा

किराया
बिजली और कोयला
घरेलू आवश्यकताओं की वस्तुएं
मिश्रित खर्च

कर्जः—

कितना रु० कर्ज लिया——
कर्ज लेने का कारण——

उत्सव
शादियाँ
मृत्यु
बीमारी
बेकारी

रहने के मकानः——

विवरण
फैक्टरी से दूरी
सफाई
मकान मालिक और किराया

इस पद्धति के निम्नलिखित गुण हैं:——

(१) इस पद्धति के अनुसार यथार्थ समंक एकत्रित किये जा सकते हैं क्योंकि समंक क्षेत्र में अनुसंधानकर्त्ता के प्रतिनिधि स्वयं जाते हैं और सांख्यिक के द्वारा निर्धारित प्रश्नों के अनुसार ही समंक-संग्रहण कर सकते हैं।

(२) इस पद्धति के अनुसार कम समय में अधिक काम किया जा सकता है। विभिन्न क्षेत्रों में सांख्यिक अपने प्रतिनिधि नियुक्त करके उनके द्वारा एक बढ़े क्षेत्र में अनुसंधान कर सकता है। इसके अतिरिक्त इस पद्धति में न्यादर्श प्रणाली का भी प्रयोग किया जाता है इसलिए विशाल समंक क्षेत्रों को सूक्ष्म रूप से अध्ययन करके समय की बचत की जा सकती है।

इस पद्धति में निम्नलिखित दोष हैं:——

(१) क्योंकि सांख्यिक अपने प्रतिनिधियों को प्रश्नावली स्वयं ही बनाकर देता है उसकी वैयक्तिक अभिनति एवं पक्षपात का उसमें प्रवेश रहता ही है।

(२) बहुत बड़े क्षेत्रों में ऐसी योजना से काम नहीं चल सकता ह और समय की कमी भी इसके कार्य में बाधक होती है।

(३) संवाददाताओं से सूचनाएं प्राप्त करना

इस पद्धति के अनुसार स्थान-स्थान पर सांख्यिक अपने संवाददाता नियुक्त कर देता है जो अपने क्षेत्र से सम्बन्धित सूचनाएं उसके पास भेजते हैं। इन सूचनाओं को संपादित करके सांख्यिक उनका उपयोग कर सकता है। ये भी एक प्राथमिक ढंग है क्योंकि संवाददाता भी एक प्रकार से सांख्यिक के प्रतिनिधि होते हैं। ये पद्धति अधिकतर समाचार पत्रों और मासिक पत्रिकाओं के द्वारा प्रयुक्त की जाती है। इस पद्धति के निम्नलिखित गुण व दोष हैं:—

(१) इस पद्धति के अनुसार एकत्रित सामग्री पर विभिन्न संवाददाताओं की व्यक्तिगत अभिनति की छाप होती है और इस कारण अनेक सच्चे झूठे तथ्यों का संग्रहण हो जाता है। पक्षपातपूर्ण समंकों से हम केवल अभ्यानत निष्कर्षों तक ही पहुँच सकते हैं।

(२) ये पद्धति तुलनात्मक दृष्टि से कुछ अधिक खर्चीली है परन्तु यदि संवाददाता अवैतनिक हों तो ये सस्ती होगी। सस्ती पद्धति, यदि उसके द्वारा प्राप्त समंक सच्चे न हों तो, एक व्यर्थ प्रयास रह जाएगी।

(३) ये पद्धति समय की बचत करती है और कम समय में ही अनेकों क्षेत्रों से सूचनाएं प्राप्त की जा सकती हैं।

(४) इस पद्धति का प्रयोग उस समय अत्यन्त उपयोगी होता है जबकि शीघ्र ही एक अनुमानित प्रगणन की आवश्यकता हो या विभिन्न कालों में किन्ही विशिष्ट समंको के उच्चावचन (Fluctuations) का निर्देशन करना अभीष्ट हो।

(४) अनुसूचियों द्वारा संसूचकों से समंक प्राप्त करना

ये एक विस्तृत पद्धति है जिसके द्वारा सरकारी दफ्तरों में नियमित रूप से मजदूरी, आय-व्यय, बेकारी, रहन सहन के व्यय इत्यादि के सम्बन्ध में समंक संग्रहीत किए जाते हैं। इसी प्रकार कभी कभी कुछ व्यक्तिगत संस्थाएं भी समंक एकत्रित करती हैं। इस प्रणाली का उद्देश्य ये है कि ऐसे व्यक्तियों से सूचनाएं प्राप्त की जाए जिनके पास प्रस्तुत समस्या के सम्बन्ध में पूर्ण, परिशुद्ध एवं असंदिग्ध ज्ञान हो। जो व्यक्ति सूचनाएं देते हैं उन्हें संसूचक

(Informants) और वे फार्म जिन पर सूचनाएं दी जाती हैं उन्हें अनुसूची (Schedule) कहते हैं। अनुसूचियाँ बनाते समय सांख्यिक इस बात का ध्यान रखता है कि वे अत्यन्त सरल और प्रस्तुत समस्या से सम्बन्धित हों। पूछे गए प्रश्न सीधे, कम और सरल होने चाहिए और जहाँ तक हो सके उनके उत्तर 'हाँ' या 'नहीं' अथवा एक संख्या में हो सकें। ऐसे प्रश्न न पूछने चाहिए जिनसे संसूचक सावधान हो जाए कि उससे गुप्त सूचनाएं जानने का प्रयत्न किया जा रहा है। अनुसूचियाँ बन जाने के बाद उन्हें छपवा कर अनुसंधान के क्षेत्र में रहने वाले संसूचकों में बांट दिया जाता है और उनसे यह प्रार्थना की जाती है कि वे उन्हें भर कर एक निश्चित तिथि तक वापस कर दें। उन्हें इस बात का भी भरोसा दिला दिया जाता है कि उनसे प्राप्त सूचनाओं को गुप्त रखा जाएगा और कभी इस प्रकार से न छापा जायेगा कि कोई ये न जान सके कि ये समंक एक विशिष्ट व्यक्ति से सम्बन्धित हैं। इसके अतिरिक्त प्राप्त समंक संसूचकों के विरुद्ध प्रयुक्त न किए जाएंगे। ऐसा करने से इस पद्धति की यथार्थता बढ़ जाती है। इस पद्धति के निम्न-लिखित गुण दोष हैं:—

(१) इस प्रणाली के अनुसार बहुत कम व्यय करके भी एक विशाल समंक क्षेत्र में अनुसंधान किया जा सकता है अर्थात् केवल अनुसूचियों के छपवाने और उन्हें सम्बन्धित व्यक्तिओं में बँटवाने के खर्च करने की आवश्यकता पड़ती है।

(२) यदि एक अच्छी संख्या में अनुसूचियाँ वापस आ जाए तो एक अच्छा न्यादर्श (Sample) बन जाता है और उनसे यथार्थ निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। परन्तु दुःख इस बात का है कि ये अनुसूचियाँ बहुत कम वापस आती हैं और जो आती भी हैं उनमें या तो गलतियाँ होती हैं या वे अपूर्ण होती हैं। इसके दो कारण हैं—(अ) या तो संसूचकगण अनुसंधान में कोई दिलचस्पी नहीं लेते और या (ब) उन्हें ऐसा भ्रम रहता है कि व्यक्तिगत समंकों का उनके विरुद्ध प्रयोग न किया जाए और इस कारण वे गुप्त बातें छिपाते हैं। यदि संसूचकों को अनुसंधान का उद्देश्य भली प्रकार समझा दिया जाए और उन्हें इस बात का विश्वास दिलाया जाए कि उनके द्वारा दी गई सूचनाओं को गुप्त रखा जाएगा तो ये पद्धति एक बहुमूल्य पद्धति सिद्ध हो सकती है।

उत्तर प्रदेशीय सांख्यिकी विभाग की एक अनुसूची का नमूना नीचे दिया जा रहा है।

ECONOMICS & STATISTICS DEPARTMENT, U.P.

Enquiry into the Expenditure of Certain Professions, Kanpur.

न्यादर्श नं०

नाम

७/१५/२२ तारीखों को समाप्त होने वाले सप्ताह के लिये —

दिनांक	व्यय की मदे	मात्रा	व्यय रु०	आ०	पा०

सप्ताह में उपस्थित व्यक्तिओं की संख्या

	सप्ताह में कितने दिन वे कुटुम्ब में थे					
	१ दिन	२ दिन	३ दिन	४ दिन	५ दिन	६ दिन
पुरुष युवा						
स्त्री युवती						
१२ साल के नीचे बालक						
१२ साल के नीचे लड़कियाँ						

पता

हस्ताक्षर

दिनांक

संक्षिप्त आय-व्यय		व्यय
क्रम संख्या	मदें	रु० आ० पा०
१. खाना		
२. कपड़ा		
३. बिस्तर		
४. मकान		
५. घरेलू आवश्यकताएँ		
६. मिश्रित		
७. कुल व्यय		
८. कुल आय		
९. बचत (+)		
१०. कर्ज (—)		

(५) प्रगणकों द्वारा प्रश्नावली की सहायता से समंक प्राप्त करना

इस पद्धति के अनुसार अनेकों प्रगणकों (Enumerators) को नियुक्त करके सांख्यिक उन्हें एक प्रश्नावली देकर अनुसंधान क्षेत्र में भेज देता है। प्रगणकों का कार्य अनुसंधान क्षेत्र के अंतर्गत आने वाले प्रत्येक व्यक्ति के पास जाकर प्रश्नावली के अनुकूल प्रश्न पूछना और उनके प्रत्युत्तरों को लिख लेना होता है। सभी प्रत्युत्तरों को एकत्रित करके प्रधान सांख्यिक के पास भेज दिया जाता है। इस प्रकार के संग्रहण में कितना ही बड़े से बड़ा क्षेत्र लिया जा सकता है और इसके लिए केवल प्रगणकों की संख्या बढ़ाना होता है। प्राप्त किये गए समंक पूर्णरूप से यथार्थ होते हैं क्योंकि प्रगणकों को केवल यंत्रवत कार्य करना पड़ता है और उनकी व्यक्तिगत अभिनति का गणना पर कोई प्रभाव नहीं रहता। गुणात्मक दृष्टि से समकों का यथार्थ या भ्रामक होना प्रगणकों के चुनाव पर निर्भर रहता है। चुने गए प्रगणकों को सत्यभाषी, बुद्धिमान और कर्त्तत्वशील होना चाहिए और उन्हें साथ ही साथ ये अधिकार भी होना चाहिए कि वे अस्पष्ट एवं संदिग्ध उत्तरों को छोड़ दें। उन्हे पक्षपातरहित, व्यावहारिक एवं मिष्ट-भाषी होना चाहिए। बहुत से ऐसे मौके होते हैं जब कि संसूचक गुप्त प्रकार की सूचनाएँ देने से हिचकता है और ऐसी सूचनाएँ अनुसंधान के लिए बहुत उपयोगी होती हैं। यदि प्रगणक एक होशियार व्यक्ति है तो एक अनुत्साही व्यक्ति से भी गुप्त सूचनाएँ निकाल लेगा।

प्रश्नावली बनाते समय भी सांख्यिक को विशेष ध्यान रखना होता है क्योंकि प्रश्नावली ही एक ऐसी वस्तु है जो विभिन्न प्रगणकों के विवेक स्वातंत्र्य को परिसीमित रखती है। प्रश्नावली में रखे गए प्रश्नों में निम्न-लिखित विशेषताएँ होनी चाहिए—

(१) प्रश्न संख्या में कम होने चाहिए। यदि बहुत से प्रश्न होगें तो कदाचित ऐसा भी हो सकता है कि उत्तर देने वाले व्यक्ति कुछ भी प्रश्नों का उत्तर न देना चाहें।

(२) प्रश्नावली के प्रश्न उत्तर देने वाले के लिए सहज होने चाहिए।

(३) प्रश्न ऐसे होने चाहिए कि उनके उत्तर 'हाँ' या 'ना' या किसी छोटी-संख्या में दिये जा सकें।

(४) प्रश्न ऐसे न होने चाहिए जिनसे संसूचकों के मन में शंका उत्पन्न हो जाए। ऐसा होने से संसूचक खीझ जाते हैं और उत्तर नहीं देते इस प्रकार के प्रश्न शराब पीना, स्त्री की उम्र, इत्यदि के सम्बन्ध में होते हैं।

(५) जहाँ तक हो प्रश्न ऐसे भी हों जो किसी पूर्व प्रश्न द्वारा प्राप्त सूचना को पुष्ट करें।

(६) प्रश्न ऐसे हों जो प्रस्तुत समस्या के अधिकतम हलों को सामने ले आएं।

इस प्रणाली के निम्नलिखित गुण–दोष हैं:—

(१) ये प्रणाली बहुत खर्चीली है और प्रगणकों को यदि अवैतनिक रखा जाए तो वे यथार्थ समंक एकत्रित नहीं करते हैं।

(२) प्रत्येक व्यक्ति से अनुसंधानीय प्रश्न करने के कारण इस प्रणाली में समय भी अधिक लगता है और यदि समय अपने पास कम हो तो इसका उपयोग नहीं किया जा सकता है।

(३) क्योंकि प्रश्नावली संख्यिक स्वयं बनाकर ही प्रगणकों को देता है प्रणाली के द्वारा एकत्र समंक यथार्थ एवं परिशुद्ध होते हैं।

सांख्यिक विवरण एवं सांख्यिक आगणना

विभिन्न सांख्यिक पद्धतियों के प्रयोग से हम किसी भी विशाल समंक समूह की अंतर्निहित केन्द्रीभूत प्रवृति, उसके विभिन्न समंको के आपस में एवं केन्द्रीभूत प्रवृति से अपकिरण अथवा विचलन इत्यादि के सम्बन्ध में

जान सकते हैं। जहाँ तक हमारे निष्कर्षों का सम्बन्ध है हमको अनुसंधान में वास्तविक रूप में शामिल किए गए समंको पर निर्भर रहना होता है। परन्तु उन निष्कर्षों को हमे केवल उन समंकों तक ही सीमित नहीं रखना होता है वरन् अधिक विस्तृत क्षेत्र में उनके प्रयोग का अनुसंधान करना होता है। किसी भी समंक–समूह के लक्षणों की विवेचना करने वाली पद्धति को हम सांख्यिकीय विवरण (Statistical Description) कहते हैं। इस प्रकार की पद्धति हमारे लिए अधिक महत्व की नहीं क्योंकि हम किसी भी क्षेत्र के सभी तथ्यों के आधार पर जो भी निष्कर्ष निकालेंगे उसका प्रभाव अन्य क्षेत्रों में भी देखने का प्रयत्न करेगें और यदि एक विस्तृत क्षेत्र में हम उन निष्कर्षों का प्रयोग करते हैं तो केवल उसी समंक क्षेत्र के विवरण का कोई विशेष महत्व रह ही नहीं जाता। विवरण द्वारा प्राप्त यथार्थ निष्कर्षों का स्थान यदि अधिक विस्तृत क्षेत्रों में ढूँढा जाता है तो उन निष्कर्षों की यथार्थता कम होती जाती है और वे भी एक अनुमान मात्र रह जाते हैं। इस प्रकार हमारा प्रवेश सांख्यिकीय आगणना (Statistical induction) के क्षेत्र में हो जाता है। सांख्यिकीय आगणना का अर्थ ही है कि हम व्यक्तिगत अनुसंधानों द्वारा प्राप्त सामग्री का विस्तृत क्षेत्र में प्रयोग करें और उनसे कुछ नियमों या सम्भावनाओं का प्रतिपादन करें। अनुसंधानीय क्षेत्र के एक छोटे से भाग को लेकर हम जो भी आगणना करते हैं उसे पूर्व क्षेत्र के लिए अनुमानित सत्य मान लेते हैं और इसका आधार है 'सम्भावना का सिद्धान्त'। दूसरे शब्दों में सांख्यिकीय आगणना एक ऐसी पद्धति है जो अनुसंधानीय क्षेत्र के समस्त समंकों की गणना करने के कठिन कार्य के स्थान पर कुछ थोड़े से प्रतिनिधि समंकों के आधार पर ही समस्त क्षेत्र पर लागू होने वाले निष्कर्षों का प्रतिपादन करती है। इस प्रकार सांख्यिकीय आगणना ही निदर्शन प्रणाली की आधार शिला है।

निदर्शन प्रणाली

निदर्शन प्रणाली (Sampling) एक ऐसी प्रणाली है जिसके द्वारा बड़े बड़े समंक क्षेत्रों के एक छोटे से भाग का घना अध्ययन करके यथार्थ एवं सूक्ष्म चित्रण किया जाता है। किसी भी देश में रहने वाली असंख्य जनसंख्या के नए लगाए गए करों के प्रति विचार मालूम करने के लिए कोई भी सरकार इस पद्धति का प्रयोग कर सकती है और इसके लिए उसे केवल एक प्रतिनिधि न्यादर्श (Sample) के रूप में कुछ व्यक्तिओं के समूह लेकर उनके

विचार ज्ञात करने होगें। यदि हम पक्षपातरहित (Unbiassed) न्यादर्श लेगें तो चुने गए न्यादर्श की राशियों एवं समस्त समंक क्षेत्र की राशियों के लक्षणों में ऐक्य होगा और समान लक्षणों वाले समंको से हम ऐसे निष्कर्ष निकाल सकेगें जो न्यादर्श एवं सम्पूर्ण समंक क्षेत्र में एक ही प्रकार से लागू होगें। इसके लिए दो बातों की आवश्यकता है:—(अ) न्यादर्श के लिए चुने गए समंक बिना किसी पक्षपात या अभिनति के चुने गए हों अर्थात समंक क्षेत्र के सभी समंकों को चुने जाने की बराबर सम्भावना प्राप्त थी। (ब) चुना गया न्यादर्श समंक क्षेत्र की विशालता के अनूकूल हो। इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी भी समंक क्षेत्र के अंतंगत आने वाली घटनाओं के अध्ययन के दो ढंग हैं:—(अ) गणना पद्धति और (ब) न्यादर्श अथवा निदर्शन प्रणाली। गणना पद्धति में समंक क्षेत्र की गणना की जाती है और उनके द्वारा प्राप्त निष्कर्ष पूर्ण रूप से यथार्थ होते हैं। परन्तु ये ढंग दो कारणों से बहुत बड़े अनुसंधानों के लिए उपयोगी नहीं हैं—(१) प्रत्येक अंक की गणना और (२) अत्यधिक पूंजी की आवश्यकता। इस ढंग का प्रयोग बहुत धनी सांख्यिक ही कर सकते हैं। विशेष रूप से सरकार इस पद्धति का प्रयोग करती है क्योंकि उसके पास धन की प्रचुरता के अतिरिक्त जन-साधारण से समाज हित के लिए अवैतनिक कार्य करवा लेने की क्षमता होती है। निदर्शन प्रणाली में सम्पूर्ण क्षेत्र के केवल एक छोटे से भाग का ही अध्ययन किया जाता है परन्तु ये भाग सम्पूर्ण क्षेत्र का प्रतिनिधि हो इस कारण निश्चित प्रकार से चुनाव करना आवश्यक होता है। गणना पद्धति की तुलना में इस पद्धति में खर्च कम होता है और समय की भी बचत होती है। इस कार्य के लिए कम परन्तु अनुभवी व्यक्तियों की आवश्यकता है जबकि गणना पद्धति में बहुत से व्यक्तियों की आवश्यकता होती है चाहे वे कामचोर ही क्यों न हों।

निदर्शन प्रणाली की सफलता के लिए कुछ आवश्यकताएँ होती हैं। सर्वप्रथम ऐसा न्यादर्श (Sample) छांटना चाहिए कि उसमें चुने गए समंकों के वही लक्षण हो जो कि समग्र के अन्य समंको के हों। इस प्रकार का न्यादर्श तभी चुना जा सकता है जबकि समंक क्षेत्र के प्रत्येक समंक के चुने जाने की समान सम्भावना हो। सभी समंको की चुने जाने की समान सम्भावना तब हो सकती है जबकि सांख्यिक पक्षपातरहित हो। यदि दो या अधिक न्यादर्श उसी समंक क्षेत्र से छाँटे जाए तो उसमें भी समानता होनी चाहिए

साधारणतः न्यादर्श प्रवरण में संग्रहीत अंक एक दूसरे से स्वतन्त्र होने चाहिए। यदि दो प्रकार के समंक क्षेत्रों से न्यादर्श चुने जाएँ या विभिन्न कालो में समंक क्षेत्रों से न्यादर्श चुने जाए तो उद्गम क्षेत्रों के गुणों में और न्यादर्श के समंकों के गुणों में कोई महत्वपूर्ण विभेद न होना चाहिए। न्यादर्श में शामिल किये गए सभी समंको पर प्रभाव डालने वाले या नियंत्रक कारण एक ही प्रकार के होने चाहिए।

न्यादर्श प्रवरण के निम्नलिखित ढंग होते हैं:—

(१) सविचार प्रवरण (Couscions Sampling)
(२) सम सम्भाविक या दैव प्रवरण (Random Sampling)
(३) स्तरित प्रवरण (Stratified Sampling)
(४) पद्धतिपूर्ण प्रवरण (Systematic Sampling)
(५) अंश प्रवरण (Quota Sampling)
(६) अनुक्रमिक प्रवरण (Sequential Sampling)

सविचार प्रवरण

सविचार प्रवरण में हम समंक क्षेत्र के मानसिक विश्लेषण द्वारा केवल वे ही समंक एकत्रित करते हैं जो सम्पूर्ण क्षेत्र के सर्वाधिक प्रतिनिधि मालूम देते हैं। ये साँख्यिक द्वारा किया गया एक उद्देश्यपूर्ण प्रवरण होता है और जैसा भी उसे निष्कर्ष निकालना होता है उसी के उपयुक्त वह समंकों का चुनाव कर लेता है। इस पद्धति में अभिनत न्यादर्शों के चुनाव का डर रहता है और व्यक्तिगत अभिनति अथवा पक्षपात के कारण जानबूझ कर या अनजाने में भ्रमपूर्ण समंक एकत्र हो जाते हैं। ये पद्धति उस समय उपयोगी सिद्ध हो सकती है जब सांख्यिक प्रवरण करते समय उद्देश्य से प्रभावित होकर चुनाव करे परन्तु व्यक्तिगत अभिनति या पक्षपात को अलग रख दे।

दैव प्रवरण

दैव प्रवरण या सम-सम्भाविक प्रवरण ऐसी निदर्शन प्रणाली है जिसमें व्यक्तिगत महत्व को नष्ट कर दिया जाता है और उसके स्थान पर सम्भावना प्रतिष्ठित हो जाती है। चुनाव करते समय समंक क्षेत्र के समस्त समंको को चुने जाने की समान सम्भावना प्रदान कर दी जाती है अर्थात् सांख्यिक का व्यक्तिगत झुकाव किसी विशेष प्रकार के समंकों को चुनने का नहीं होता है। इस प्रकार चुनाव मनुष्य के हाथ से निकल कर दैवयोग से होता

हैं और इस सम्भावना के कारण इस पद्धति को दैव प्रवरण करते हैं। क्योंकि समंक क्षेत्र के बहुत से समंक एक दूसरे से विभिन्न होते हैं चुनाव करते समय विषम समंक चुने जाएँगे और यदि उनकी विषमताओं का औसत निकाला जाए तो कदाचित् एक ओर की विषमताएं दूसरी ओर की विषमताओं द्वारा दूर हो जाएगीं । औसत निकालने में व्यक्तिगत विषमताएं विनष्ट हो जाती हैं और न्यादर्श का औसत समंक क्षेत्र के औसत से मिलता जुलता होता है अर्थात न्यादर्श समंक क्षेत्र का एक प्रतिनिधि रूप होता है जिसके अंतर्गत आने वाले समंकों के वही लक्षण होते हैं जो समग्र के समंको में पाये जाएँ। इस प्रकार हम देखते हैं कि दैव प्रवरण 'सम्भावना' के सिद्धान्त के ऊपर आधारित है और इसी कारण हम न्यादर्शों पर विश्वास कर सकते हैं। दैव प्रवरण के अर्थ हैं बिना किसी पक्षपात के इधर उधर से समंको का चयन करना। क्योंकि आँख बन्द करके या बिना पक्षपात के किसी भी अंग से चयन किया जा सकता है इसलिये प्रवरित न्यादर्श में चुने गए समंकों में वे ही लक्षण पाये जाते हैं जो समग्र में हों।

दैव निदर्शन सविचार प्रवरण से उत्तम माना जाता है क्योंकि सविचार प्रवरण में सांख्यिक के व्यक्तिगत झुकाव या पक्षपात का प्रभाव रहता है और दैव प्रवरण में दैवयोग से प्रतिनिधि समंकों को एकत्रित करके उनके आधार पर निष्कर्ष निकाले जाते हैं । दैव प्रवरण पर निकाले गए निष्कर्ष गणना द्वारा प्राप्त निष्कर्षों के अत्यन्त समीप होते हैं।

स्तरित प्रवरण

कभी कभी एक ही समंक क्षेत्र में विभिन्न आकारों और लक्षणों वाले समंक पाये जाते हैं और निदर्शन करके हम यथार्थ निष्कर्ष के करीब नहीं पहुँच सकते हैं । ऐसी स्थिति में विषम समंक क्षेत्र को दो तीन या अधिक, विभागों में बांट देना चाहिए और उनमें समान लक्षणों वाले समंक रख देना चाहिए। इस प्रकार के विभाजन को स्तरन्तरण कहते हैं। स्तरन्तरण करने के पश्चात् प्रत्येक स्तर में से क्रमशः समंकों का चुनाव करना चाहिए । अंकों के चुनाव में सविचार या सम-संभाविक किसी भी पद्धति का प्रयोग किया जा सकता है। इस प्रकार के प्रवरण को स्तरित प्रवरण (Stratified Sampling) कहते हैं क्योंकि न्यादर्श प्रवरण से पहिले समंक क्षेत्र को विभिन्न स्तरों में बांटना आवश्यक होता है। इस पद्धति के द्वारा हम अधिक प्रतिनिधि न्यादर्श प्राप्त करके यथार्थ निष्कर्षों

तक पहुँच सकते हैं। ये पद्धति आजकल अधिक महत्वशाली होती जा रही है। इस पद्धति का विशेष गुण इस बात में है कि इसके अनुसार विषम समंक क्षेत्र को समान-गुणीय क्षेत्रों में बाँट कर उनसे प्रवरण किया जाता है जिससे न्यादर्श में किसी भी एक प्रकार के अंकों का जमाव नहीं होने पाता है।

पद्धतिपूर्ण प्रवरण

जब किसी भी समंक क्षेत्र में समंक किसी विशेष ढंग, काल, परिस्थिति अथवा स्थान के अनुसार विन्यस्त हों तो ये प्रणाली अत्यन्त सरल एवं सहज होती है। इस पद्धति के अनुसार किसी भी एक पद्धतिपूर्ण ढंग से चुनाव करना आवश्यक होता है परन्तु उसी ढंग को अन्त तक प्रयोग करना चाहिए, उदाहरणार्थ, यदि किसी एक क्लास में ५० विद्यार्थी ऊंचाई के अनुसार खड़े हैं तो हम न्यादर्श में प्रत्येक पाँचवे को चुन सकते हैं। इस प्रकार के चुनाव के लिए समंकों को काल, परिस्थिति अथवा स्थान के अनुसार विन्यसित (Arrange) करना आवश्यक है।

अंश प्रवरण

जहाँ अनेक प्रगणकों की सहायता से एक विशाल समंक क्षेत्र का न्यादर्श लेना होता है तो न्यादर्श के भी विभाग कर दिये जाते हैं और प्रत्येक प्रगणक को केवल उसके लिए निश्चित अंश का ही प्रवरण करना होता है। यदि अनसूचियाँ भरवा कर वापस मंगानी है तो प्रत्येक प्रगणक को कुछ अनुसूचियाँ एकत्रित करने का भार दे दिया जाता है और सभी प्रगणकों द्वारा एकत्रित सूचनाओं को मिला देने से न्यादर्श तैयार हो जाता है। इस पद्धति का प्रयोग करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि अनेक प्रगणकों के कारण समंकों के ऊपर व्यक्तिगत पक्षपात का प्रभाव न पड़े।

अनुक्रमिक प्रवरण

ये पद्धति साधारण प्रवरण नीति के प्रतिकूल है। सामान्य निदर्शन प्रणाली में किसी भी समंक क्षेत्र के कुछ अंक बिना पक्षपात के इधर उधर से चुने जाते हैं और फिर उनमें आ जाने वाले विभ्रम का अनुमान लगाया जाता है। यदि न्यादर्श में विभ्रम अधिक हो तो फिर से

न्यादर्श चुने जाते हैं। अनुक्रमिक निदर्शन में इसके प्रतिकूल पद्धति का प्रयोग किया जाता है। पहिले ही निदर्शन विभ्रम (Sampling error) का अनुमान करके उसके अनुसार न्यादर्श का आकार निश्चित किया जाता है। इस प्रकार अनुक्रमिक प्रवरण में यथार्थता की अपेक्षित मात्रा का निर्णय निदर्शन से पहिले ही कर लिया जाता है और फिर चुनाव संभाविक रीति से किया जाता है। निदर्शन विभ्रम के ऊपर ही न्यादर्श के आकार निश्चित होते हैं, उदाहरणार्थ, यदि किसी भी समंक क्षेत्र में १ लाख अंक हैं और दैव प्रवरण द्वारा एकत्रित न्यादर्श में १०,००० अंक हैं एवं सम्भावित विभ्रम १०० है। यदि हम केवल ५० विभ्रम ही रखना चाहें तो हमें न्यादर्श के अंकों की मात्रा बढ़ाना चाहिए। परन्तु अनुक्रमिक प्रणाली के अन्तर्गत हम पहिले से ही निश्चय कर लेते हैं कि संभावित विभ्रम क्या रखना है फिर उसके अनुसार ही न्यादर्श का आकार तय करते हैं। इस पद्धति का प्रयोग अधिकतर कृषि एवं जीव विज्ञान में किया जा रहा है।

उपरोक्त पद्धतियों में से किसी का भी प्रयोग समंक क्षेत्र के आकार-प्रकार पर निर्भर रहता है। यदि समंक क्षेत्र बहुत बड़ा है और उसमें विषम अंकों का बाहुल्य है तो स्तरित निदर्शन की आवश्यकता होगी जिसके अनुसार हम विषम समंक क्षेत्र को सम-स्तरों में बाँट कर न्यादर्श प्रवरण करते हैं। यदि समंक क्षेत्र समान अंकों का एक समूह है तो हम सामान्य या अंश पद्धति से दैव प्रवरण कर सकते हैं। सर्वोत्तम पद्धति तो दैव प्रवरण ही है जिसमे प्रत्येक अंक का समान महत्व होता है और प्रत्येक एक दूसरे से ऐसा मिल जाता है मानों उन्हें किसी घूमने वाले बक्स में रख कर घुमा दिया गया हो।

न्यादर्श की पूर्णता एवं समुचितता की जाँच करने के दो सिद्धांत हैं:— (अ) ज्यों ज्यों समंकों का औसत के दोनों दिशाओं में अपकिरण बढ़ता जाए न्यादर्श के समंकों की संख्या बढ़नी चाहिए क्योंकि अधिक मात्रा में समंक लेने पर ही उनकी विषमताएं औसत रूप में नष्ट हो सकेगी। (ब) हम जितना अधिक यथार्थ न्यादर्श लेना चाहें उतने ही अधिक अंक हमें न्यादर्श में शामिल करना होंगे अर्थात् यथार्थता के साथ-साथ न्यादर्श का आकार बढ़ाना आवश्यक है। ये दोनों ही सिद्धान्त 'सम्भावना के सिद्धान्त' के उप-प्रमेय 'महांक जडता नियम' व 'सांख्यिकीय-नियमिता' पर आधारित हैं। न्यादर्श की समुचितता जाँचने के लिए 'स्थिरता जाँच' की जा सकती है जिसके अन्तर्गत दो बातें की जा जाती हैं:— (अ) न्यादर्श को दो या अधिक

विभागों में दैव प्रवरण से बाँट देते हैं या (ब) पूर्ण समंक क्षेत्र में फिर से एक पक्षपातरहित न्यादर्श का चुनाव करते हैं। पुराने न्यादर्श के विभागों एवं नये और पुराने न्यादर्शों के लक्षणों की तुलना की जाती है और यदि तुलना में लक्षण एक ही प्रतीत होते हैं तो न्यादर्श ठीक है, नहीं तो न्यादर्श समुचित एवं पूर्ण नहीं माना जाता है। यदि न्यादर्श पूर्ण एवं समुचित न हो तो उसको बढ़ाने की आवश्यकता होती है। 'महांक जंडता नियम' के अनुसार ज्यों ज्यों न्यादर्श का आकार बढ़ेगा स्थिरता आएगी और न्यादर्श यथार्थता के समीप आता जाएगा। न्यादर्श में समंकों की संख्या बढ़ाने में इस सिद्धांत का ध्यान रखा जाता है कि "न्यादर्श की समुचितता एवं यथार्थता बढ़ती जाती है ज्यों ज्यों न्यादर्श के आकार का वर्ग मूल बढ़ता जाता है" इस प्रकार यदि द्विगुणित यथार्थता की आवश्यकता हो तो हमें न्यादर्श के आकार को चार गुणा बढ़ाना चाहिए।

सम्भावना का सिद्धांत

सम्भावना का अर्थ किसी भी अनिश्चित घटना के होने या न होने के सम्बन्ध में मस्तिष्क की भावना होती है। जब किसी भी अनिश्चित घटना के दोनों पहलुओं पर ही विचार कर लिया जाता है तो उस घटना के होने या न होने के सम्बन्ध में एक अनुमान लग जाता है जिसे आशंसा (Expectation) कहते हैं। इसी अनुमान या आशंसा को जब हम सांख्यिकीय रूप में देखते हैं तो उसे सम्भावना कहते हैं। इस प्रकार यदि कोई घटना दो प्रकार से घट सकती है और कोई भी निश्चित कारण नहीं कि यह समझा जा सके कि वह पहले प्रकार से ही घटेगी तो उसके किसी भी प्रकार से घटने की सम्भावना $\frac{1}{2}$ है। उदाहरणार्थ, यदि एक सिक्का उछाला जाय तो या तो चित्त गिरेगा या तो पट्ट और तीसरे प्रकार से नहीं गिर सकता। इसलिये चित्त और पट्ट गिरने की सम्भावना १:१ है या दोनों में से प्रत्येक की सम्भावना $\frac{1}{2}$ है।

यदि सौ बार सिक्के को उछाला जाय तो चित्त और पट्ट आने के लिये दोनों ही की आशंसा $\frac{1}{2} \times$ १००=५० होगी।

इसी प्रकार यदि किसी भी घटना के होने के चार विभिन्न ढंग हैं और सभी की बराबर स्थिति है तो किसी एक प्रकार से घटित होने की संभावना $\frac{1}{4}$ है और यदि १०० बार वह घटना घटित हो तो इस प्रकार से होने

आशंसा बराबर है $\frac{1}{4} \times १००=२५$ । दूसरे उदाहरण में यदि एक हजार गेंदों का एक ढेर हो जिसमें ६०० लाल और ४०० नीले रंग के गेंद हों तो उन्हें खूब हिला कर यदि पक्षपात रहित व्यक्ति उनमें से कोई एक गेंद उठाये तो लाल गेंद आने की सम्भावना ३:२ या ३/५ और नीले आने की सम्भावना २/५ होगी। यदि इसी प्रकार वह छांटता जाय और सौ गेंद निकाले तो लाल और नीले गेंदों का अनुपात कदाचित ६०:४० पाया जायेगा। इस प्रकार हम देखते हैं कि दैव प्रवरण के द्वारा प्राप्त किये गये न्यादर्श में वही अनुपात होगा जो कि समग्र (Universe) में था।

उपरोक्त विवरण एक गणित सम्बन्धी सिद्धांत का है 'जिसे सम्भावना का सिद्धांत' कहते हैं। यही सिद्धांत सांख्यिकी का आधार है। इस सिद्धांत के अनुसार, "यदि किसी बड़े समंक क्षेत्र से समुचित मात्रा में बिना पक्षपात के अंक छांटे जाँये तो औसत रूप में उनमें वे सब लक्षण विद्यमान होंगे जोकि समग्र (Universe) के अंकों में हैं और इस प्रकार के न्यादर्श (Sample) पर आधारित निष्कर्षों पर निर्भर रहा जा सकता है।" ये सिद्धान्त उसी समय उपयोगी सिद्ध होगा, जब कि दैव प्रवरण (Random Sampling) का सहारा लिया गया हो। यह नियम अन्य आर्थिक नियमों के समान सामान्य रूप से लागू होता है और इसके प्रयोग में कुछ अपवाद भी हो सकते हैं। न्यादर्श के प्रवरण से पहले संकलनकर्त्ता को यह देख लेना चाहिये कि समग्र के सभी अंक इस प्रकार मिला दिये गये हैं कि उनमें से प्रत्येक को चुने जाने का समान अधिकार प्राप्त है और किसी एक ही स्थान पर एक ही प्रकार के अत्यधिक अंकों का जमाव नहीं है। यह भी अत्यन्त आवश्यक है कि संकलनकर्त्ता या उसके प्रतिनिधि पक्षपात-रहित हैं और उनका झुकाव किसी विशिष्ट प्रकार के अंकों के चयन करने के लिये नहीं हैं।

इस सम्भावना के सिद्धान्त के निम्न लिखित चार उपसाध्य (Corrolaries) हैं—

१. सांख्यिकीय नियमिता सिद्धान्त (Law of Statistical Regularity)

२. महानुमाप जड़ता सिद्धान्त (Law of Inertia of Large numbers)

३. अल्प संख्याओं की विलम्बना का सिद्धान्त (Law of Persistence of Small numbers)

४. विचलन के क्रमिक ह्रास का सिद्धान्त, (Law of Decreasing Variation)

१. सांख्यिकीय नियमिता सिद्धान्त

इस नियम के अनुसार यदि किसी भी समंक क्षेत्र से बिना पक्षपात के इस प्रकार से अंकों का प्रवरण किया जाय कि प्रत्येक अंक को चुने जाने की समान सम्भावना प्राप्त हो तो चुना गया न्यादर्श उस समंक क्षेत्र का पूर्ण रूप से प्रतिनिधि होगा। अर्थात् न्यादर्श में चुने गए अंकों और समग्र के सभी अंकों के लक्षणों में समानता पाई जायगी। इस प्रकार की समानता होने का एक कारण है और वह यह कि छांटे हुए अंकों में यदि कुछ अंक बहुत बड़े होंगे तो कुछ बहुत छोटे भी, और उन सभी विषमताओं का सम्मिलित प्रभाव यह होगा कि एक प्रकार से सांख्यिकीय नियमिता निर्माण होगी, और सामान्यतः न्यादर्श का औसत समग्र के औसत के बराबर होगा। इसी सिद्धान्त के कारण अपराध, दुर्घटनाओं, आत्महत्याओं और जुआ खेलना इत्यादि में एक प्रकार की नियमिता दृष्टिगोचर होती है।

२. महानुमाप जड़ता सिद्धान्त

इस सिद्धान्त के अनुसार हम जितने ही अधिक अंक अपने न्यादर्श में शामिल करेंगे उतने ही अधिक यथार्थ निष्कर्ष पर पहुँच सकेंगे और न्यादर्श उतना ही अधिक विशुद्ध एवं विश्वस्त होगा। इसका आधार यह है कि यदि समंक क्षेत्र में विभिन्न आकार वाले अंक हैं तो इस बात की सम्भावना रहेगी कि कुछ अंक यदि एक दिशा में विचरण करेंगे तो कुछ विपरीत दिशा में भी विचलित होंगे, जिसके कारण विभिन्न दिशाओं में होने वाली विषमताओं का सम्मिलित प्रभाव हमें उसी औसत तक पहुँचने में सहायक होगा जो कि पूरे समग्र का होना चाहिए। इस प्रकार यदि हम न्यादर्श के अंकों की संख्या बढ़ाते जाँय तो अनुमान विभ्रम (Error) कम होता जायगा और यथार्थता की मात्रा बढ़ती जायगी। दूसरे शब्दों में महानुमापों में अधिक स्थिरता अथवा जड़ता होती है जिसके कारण विभ्रम नहीं रह जाता। यदि एक दिशा में बहुत से अंक विचरण करते हों तो अधिक समंकों को न्यादर्श में सम्मिलित करने की योजना असफल सिद्ध होगी और घटने के बजाय विभ्रम बढ़ेगा।

३. अल्प संख्याओं की विलम्बना का सिद्धान्त

इस नियम के अनुसार यदि किसी भी समग्र में कुछ ऐसी अल्प संख्यायें हैं जो अन्य अंकों से बहुत अधिक विचलित होती हों तो हम चाहे कितना भी बड़ा न्यादर्श क्यों न लें, ऐसी संख्याओं का प्रतिनिधित्व उसमें भी पाया जायगा। दूसरे शब्दों में कुछ अल्प संख्यायें न्यादर्श में विलम्बना करती हैं और अवश्य ही पाई जायगी। विषमता निवारण के सिद्धान्त का उन पर कुछ भी प्रभाव न पड़ेगा।

४. विचलन के क्रमिक ह्रास का सिद्धान्त

इस नियम के अनुसार ज्यों ज्यों हम चुने हुये अंकों की संख्यायें न्यादर्श में बढ़ाते जाते हैं त्यों त्यों अंकों की लक्षणात्मक विभिन्नतायें कम होती जाती हैं और विभिन्नताओं के क्रमिक ह्रास की इस प्रकृति को हम पिछले न्यादर्शों अथवा समग्र के अंकों से तुलना करके मालूम कर सकते हैं। इस सिद्धान्त के एक अनुभवी प्रयोग द्वारा न्यादर्श के आकार के निर्णय करने में सहायता मिलती है।

इस प्रकार सम्भावना के सिद्धान्त का महत्व हम भलीभाँति समझ सकते हैं। इसी सिद्धान्त पर बीमा कम्पनियों का सारा कार्य आधारित है। प्रीमियम निश्चित करने के लिये मरण-तालिकायें (Mortality Tables) बनानी आवश्यक होती हैं। मरण-तालिकायें बनाने के लिय आवश्यक सामग्री दो प्रकार से प्राप्त होती है—(अ) जन गणना की रिपोर्टों से वा पिछले अनुभवों के संचित ज्ञान से। मरण-तालिका में उम्र, वर्ष के प्रारम्भ में जीवित व्यक्तियों और वर्ष के प्रारम्भ में मरने वाले व्यक्तियों की संख्या दी रहती हैं। यदि वर्ष के अन्त में मरने वालों की संख्या को वर्ष के प्रारम्भ में जीवित रहने वालों की संख्या से भाग दे दिया जाय तो मरणशीलता की दर मालूम हो जायगी, जिसके आधार पर बीमा कम्पनियाँ अपने प्रीमियम की दरें निश्चित करती हैं। जब कोई बीमा कम्पनी जीवन बीमा करती है, तो इस बात की सम्भावना रहती है कि उसके द्वारा बीमा किये गये व्यक्तियों में से कुछ शीघ्र मर जायेंगे। महानुमाप जड़ता नियम बीमा कम्पनियों को और अधिक जीवन बीमा करने के लिये उत्साहित करता रहता है क्योंकि जितना ही अधिक बीमा किया जायगा उतनी ही हानी होंने की सम्भावना कम होती जायगी।

संख्या संकलन का द्वितीयक ढंग

द्वितीय ढंग (Secondary Method) में द्वितीयक उद्गमों से प्राप्त सामग्री का उपयोग किया जाता है और संकलनकर्ता और प्रयोग कर्त्ता एक ही व्यक्ति नहीं होते। ऐसे समंकों को समाचार पत्रों, पाक्षिक, एवं सरकारी रिपोर्टों के आधार पर एकत्रित करके उनके द्वारा निष्कर्षों पर पहुँचा जाता है। द्वितीयक सामग्री ऐसी सामग्री है जो कि केवल संकलन-कर्त्ता के लिये ही प्राथमिक हो और जिसे निष्कर्ष निकालने वाला अपने कार्य के लिये प्राथमिक मान ले। प्राथमिक और द्वितीयक ढंगों का अन्तर केवल यथार्थता का अन्तर है। समंकों के विश्लेषण होने के पहले जितने अधिक हाथों से हो कर वे गुजरेंगे उतना ही भ्रामक अनुमान होता जायगा। ऐसे व्यक्ति जिन्होंने स्वयं ही संख्याओं का संकलन न किया हो प्रायः उनका अन्तर्निहित अर्थ ठीक प्रकार से नहीं समझ सकते। इसलिये हो सकता है कि उनके द्वारा प्राप्त किये गये निष्कर्ष यथार्थता से बहुत दूर हों।

द्वितीयक समंकों के महत्वपूर्ण उद्गम स्थान निम्नलिखित हैं:—

(१) सरकारी सूचना क्षेत्र

(अ) केन्द्रीय विभागों द्वारा प्रकाशित सामग्री। सरकारी कमेटियों की रिपोर्टें। व्यापारी बुलेटिन और जाँच-कमेटियों की रिपोर्टें। सरकारी शासन सम्बन्धी आज्ञायें।

(ब) राजकीय एवं स्थानीय समंक, म्यूनिस्पैलिटी, कृषि संस्थायें, श्रमिक आफ़िस, सेवाकार्य संस्थायें, बैंकों इत्यादि के द्वारा प्रकाशित सामग्री।

(२) व्यवसायिक समुदायों द्वारा प्रकाशित सामग्री। चेम्बर आफ़ कामर्स, ट्रेड यूनियन, मिल मालिक संघ इत्यादि द्वारा प्रकाशित सामग्री।

(३) अनुसन्धान-शालाओं के द्वारा प्रकाशित सामग्री। विश्वविद्यालयों, आर्थिक व्यूरो इत्यादि के द्वारा प्रकाशित सामग्री।

(४) सामयिक समाचार पत्रों, पाक्षिक एवं मासिक पत्रिकाओं, व्यापार एवं आर्थिक पत्रिकाओं में छपे समाचार।

(५) अनुसन्धान-कर्त्ताओं के प्रकाशन।

(६) महत्वशाली विद्वानों के अप्रकाशित प्रलेख।

(७) बाजार—भाव।

प्रोफेसर बावले के कथनानुसार "बिना अर्थ और सीमायें समझे हुये मुद्रित समंकों को उनके बाह्य कलेवर से ही यथार्थ न समझ लेना चाहिये और उन पर आधारित प्रत्येक तर्क की कटु समलोचना करना श्रेयस्कर मानना चाहिये"। श्री० कोनर महोदय ने बावले के इस विचार की पुष्टि की है और कहा है कि "यदि कोई भी व्यक्ति दूसरे के द्वारा संकलित समंकों का प्रयोग सशंक भाव से नहीं करेगा तो उसके लिये यथार्थ निष्कर्ष तक पहुँचने में अनेक बाधायें होंगी"।

द्वितीयक सामग्री की कुछ कमियाँ निम्नलिखित बातों पर निर्भर हैं:—

(१) न्यादर्श में समुचित अंक न लिये गये हों।

(२) समंकों के संकलन में संदिग्ध एवं अनुचित शब्दों या परिभाषाओं का प्रयोग किया गया हो।

(३) माप एवं विश्लेषण एककों (Units) की कोई स्थायी परिभाषा न रखी गई हो।

इन्हीं कारणों से मुद्रित सामग्री के उपयोग करने वाले संख्या-शास्त्रियों को चाहिये कि वे निम्नलिखित बातों पर पूर्व-विचार कर लें।

(१) संकलित सामग्री कौन कौन से उद्गमों से प्राप्त की गई थी।

(२) संकलन की कौन सी पद्धति अपनाई गई थी और कौन से माप एकक एवं विश्लेषण एककों का प्रयोग किया गया था।

(३) पूर्व अनुसन्धान का उद्देश्य एवं प्रकृति क्या थी।

(४) संख्या या संकलन करते समय निदर्शन (Sampling) अथवा गणना (Census) कौन सी प्रणाली का प्रयोग किया गया था।

(५) सम्पूर्ण खोज में यथार्थता की अपेक्षित परिसीमा क्या रही थी।

(६) पूर्व--संग्रहक की यथार्थवादिता एवं झुकाव की क्या सीमा थी, अर्थात् वे पक्षपातरहित व्यक्ति थे या नहीं।

(७) पूर्व खोज में कितना समय लगा था ?

सभी प्रकार के समंकों का प्रयोग करने से पहिले उन्हें भली भाँति सम्पादित कर लेना चाहिये जिससे यह मालूम हो सके कि वे पूर्ण और समुचित, यथार्थ और समान हैं अथवा नहीं।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. Explain the different methods used in the collection of statistical data. Discuss the respective advantages and disadvantages of these methods.

सामग्री संग्रहण के विभिन्न ढंगों को समझाइये और उनके परस्पर गुण-दोषों पर विचार कीजिए।

(B. Com., Agra, 1938).

2. How far do the results of statistical investigation depend upon correct sampling ? Compare the different methods used to secure representative data.

कहाँ तक आपके विचार से सांख्यिकीय अनुसंधान के निष्कर्ष यथार्थ निर्दशन प्रणाली पर निर्भर होते हैं। प्रतिनिधि समंक एकत्र करने के विभिन्न ढंगों पर विचार कीजिए।

3. Mention the methods that are generally used in collecting data. Explain their respective merits and the conditions in which they may be used.

सामग्री संकलन के प्रायः प्रयोग में आने वाले ढंगों का विवरण दीजिए और उनके परस्पर गुण-दोषों पर विचार करते हुए उन विशेष परिस्थितियों का उल्लेख कीजिए जिनमें उनके प्रयोग आवश्यक हों।

(B. Com., [S] Agra, 1948).

4. State and Explain the Law of Statistical regularity and the Law of Inertia of Large numbers. How do these laws help the investigators.

सांख्यिकीय नियमिता नियम और महानुमाप जड़ता सिद्धान्त को समझाइये और ये बतलाइये कि वे अन्वेषकों को किस प्रकार सहायता पहुँचाते हैं।

5. Compare the advantages and disadvantages of the Census method (complete enumeration) and the sample method of collecting statistics.

सामग्री संकलन की संगणना और न्यादर्श पद्धतियों के गुण-दोषों की तुलना कीजिए।

(B. Com., Cal., 1937.)

6. How far does the reliability of a random sample vary with (i) the size of the sample (ii) the degree of variation in the universe ?

दैव प्रवरण द्वारा लिए गए न्यादर्श की यथार्थता पर (अ) न्यादर्श की आकृति और (ब) समग्र में अपाकरण की मात्रा किस प्रकार प्रभाव डालती हैं इस पर विचार कीजिए।

(P.C.S. 1948)

7. Briefly describe the method of random sampling and comment on its use in social investigation.

दैव प्रवरण की पद्धति को संक्षेप में लिखिये और उसके सामाजिक अनुसंधानों में प्रयोग पर विचार कीजिए।

(M. Com., Agra, 1945)

8. What method would you employ in the collection of data when the field of enquiry is (a) small, (b) fairly large, (c) very large, with due regard to accuracy, labour and cost.

सामग्री संग्रहण के किस ढंग का आप प्रयोग करेंगे यदि अनुसंधानीय क्षेत्र (अ) छोटा हो, (ब) काफी बड़ा हो, (स) बहुत बड़ा हो। किसी भी ढंग की सिफारिश करते समय आप यथार्थता, श्रम और लागत का ध्यान रखिये।

(B. Com., Agra, 1947)

9. Discuss the advantages of Direct Personal investigation as compared with the other methods generally used in collecting data.

'व्यक्तिगत स्वयं अवलोकन' की अन्य सामग्री संकलन की रीतियों से तुलना कीजिए और गुण-दोषों का निरूपण कीजिए।

(B. Com., [S] Agra, 1950)

10. Distinguish between a census and a sample enquiry and briefly discuss their comparative advantages Which

of these methods would you prefer for calculating the total wages of workers in a given industry ?

संगणना और निर्देशन अनुसंधानों के गुण दोष बतलाते हुए तुलना कीजिए और बतलाइये कि किसी एक निश्चित उद्योग में काम करने वाले मजदूरों की कुल मजदूरी निकालने के लिए आप किस पद्धति का प्रयोग करेंगे और क्यों ? (M. Com. Agra, 1946)

11. Briefly describe the statistical problem involved in a marketing survey of an agricultural crop like rice or wheat in India.

भारतवर्ष के किसी कृषि उत्पादन (जैसे चावल, या गेहूँ) के बाजार सम्बन्धी अनुसंधान में सांख्यिकीय समस्या का विवरण कीजिए।

(M. Com., Agra, 1945).

12. It has been found necessary to collect quickly certain essential statistics suitable for estimating rural indebtedness in a Province of the size of Madras.

Draft a Questionnaire not exceeding 12 questions. Also give the forms of three statistical tables for which you would like to give priority in compilation.

ये आवश्यक समझा गया है कि मद्रास के बराबर प्रान्तों में ग्रामीण कर्ज के सम्बन्ध में अनुमान लगाने के लिए योग्य समंक शीघ्र ही एकत्र किए जाए।

१२ प्रश्नों के भीतर ही एक प्रश्नावली बनाइये और तीन ऐसी सांख्यिकीय सारणीयों के नमूने दीजिए जिनको आप आगणना करते समय प्राथमिकता देगें। (I.A.S., 1947).

13. "In making house-to-house enquiry everything depends upon the skill, tact, and reliability of the investigators". Prove the correctness of the above remark in collecting the family budgets of cultivators in U.P.

"घर–घर अनुसंधान करने में सभी कुछ प्रगणकों की योग्यता होशियारी और विश्वास पर निर्भर होता है।" उपरोक्त कथन की पुष्टि उत्तर प्रदेश के किसानों के पारिवारिक आय-व्ययकों के संग्रहण का उदाहरण लेकर कीजिए। (B. Com. Agra 1947)

अध्याय ६.

यथार्थता एवं अनुमान

व्यक्तिगत अभिनति या पक्षपात एवं अस्थिर माप-एककों (Units) के प्रयोग के कारण, संकलित समंकों में विभ्रम (Errors) हो सकते हैं। यदि विभ्रमयुक्त समंकों के प्रयोग से निष्कर्ष प्राप्त किये जायेंगे तो वे भी भ्रामक होंगे। इसलिये संग्रहीत समंकों के उपयोग करने से पहिले उनका सम्पादन (Edit) करना अति आवश्यक है। सम्पादन कार्य (Editing of data) का अर्थ यह है कि संग्रहीत समंकों की अपेक्षित यथार्थता और सम्मिलित किये गये अनुमानों के सम्बन्ध में समुचितता मालूम की जाय। सम्पादन कार्य का यह भी उद्देश्य है कि यह मालूम किया जाय कि समंक प्राप्त करने में (अ) पक्षपात रहित संकलन किया गया था या नहीं, (ब) माप एकक में कोई गड़बड़ी तो नहीं थी, और (स) वही माप एकक अनुसंधान के अन्त तक प्रयुक्त हुये थे अथवा नहीं। यदि प्राप्त समंक उचित न समझे जाँय तो फिर से संख्या संकलन का कार्य किया जाना चाहिये नहीं तो अनुचित समंकों के प्रयोग से केवल भ्रामक निष्कर्षों का ही प्रतिपादन किया जा सकेगा। यदि संसूचकों (Informants) एवं प्रगणकों (Enumerators) ने बिना प्रश्नों को स्वयं समझे ही या उसके अर्न्तनिहित अर्थों के प्रतिकूल संगणना की हो तो फिर से सरल एवं सहज प्रश्नावलियों के आधार पर समंकों का संकलन करना चाहिये।

इस प्रकार हम देखते हैं कि सामग्री के सम्पादन में निम्नलिखित बातों की परीक्षा कर लेनी चाहिये।

(१) संख्या संकलन के वही माप-एकक सम्पूर्ण अनुसंधान में व्यवहृत हुये हैं या नहीं।

(२) संकलनकर्त्ताओं ने पक्षपातरहित संकलन किया है अथवा नहीं।

(३) क्या प्रश्नावलियों में दिये गये प्रश्नों के उत्तर देने से पहिले उत्तर देने वालों को प्रश्न समझा दिये गये थे या नहीं।

(४) यथार्थता की परिसीमा और अनुमानों के प्रयोग के सम्बन्ध में पूर्व-निश्चित धारणायें बना ली गई थीं या नहीं।

यथार्थता (Accuracy)

सांख्यिकी एक ऐसा शास्त्र है जो विशाल समंक समूहों का अध्ययन करता है। इसी कारण इसकी पद्धतियाँ संभावना के सिद्धांत पर आधारित हैं। प्रायः विशाल समंक-समूहों के अध्ययन में यथार्थ गणनाओं की अपेक्षा अनुमानों की आवश्यकता होती है। इसी प्रकार भविष्य के सम्बन्ध में प्रवृत्तियों का अध्ययन करते समय हमें सम्भावनाओं या अनुमानों पर ही निर्भर रहना होता है। जब कभी हमें व्यक्तिगत अभिनति का प्रभाव दूर करना होता है तो दैव प्रवरण पर आधारित अनुमान पक्षपातपूर्ण संगणना की अपेक्षा अधिक उत्तम होता है। व्यवसायिक समंकों की तुलना में सामाजिक एवं भौतिक समंक अधिक यथार्थ होते हैं क्योंकि व्यापारी की शक्ति के बाहर बहुत से ऐसे कारण हुआ करते हैं जो माँग और मूल्य पर प्रभाव डालते रहते हैं। यथार्थता स्वयं ही एक तुलनात्मक शब्द है, और सांख्यिकी तुलनात्मक यथार्थता पर ही अधिक ध्यान देती है। वास्तव में ऐसे किसी भी शास्त्र में जहाँ अंकों के प्रयोग से तथ्यों का संकलन किया जाता है पूर्ण यथार्थता प्राप्त करना सम्भव नहीं है। उदाहरणार्थ, यदि एक साधारण फुट से १/१० इंच तक पदार्थ नापा जा सकता है तो सेन्टीमीटर और मिलीमीटर स्केल से क्रमशः १/१० मीटर या १/१० मिलीमीटर तक अंक जाने जा सकते हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि साधारण फुट की अपेक्षा सेन्टीमीटर स्केल और सेन्टीमीटर स्केल की अपेक्षा मिलीमीटर स्केल के नापों में अधिक यथार्थता पाई जाती है। परन्तु क्या यह हम कह सकते हैं कि मिलीमीटर स्केल का नाप ही पूर्ण रूप से यथार्थ है। नहीं, क्योंकि नापने के ढंगों में उन्नति हो सकती है और किसी नये आविष्कृत मापन यन्त्र के द्वारा अधिक तुलनात्मक यथार्थता प्राप्त की जा सकती है। इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि तुलनात्मक यथार्थता ही आवश्यक है और वही प्रगतिशील यथार्थता है।

सांख्यिकी में ऐसे बहुत से ढंगों का प्रयोग किया जाता है जो या तो किसी समंक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति की ओर संकेत करने वाले सूक्ष्म स्वरूप बतलाते हैं या महत्वपूर्ण प्रवृत्तियों का सुन्दर दिग्दर्शन करते हैं। किसी भी समंक-वटन (Frequency distribution) को समझाने के लिये बिन्दु रेखाओं (Graphs), चित्रों (Diagrams) या चित्रलेखों (Pictograms) की सहायता ली जाती है। इन सभी उदाहरणों में न तो पूर्ण यथार्थता

सम्भव ही है और न अपेक्षित ही है। हम किसी भी देश की राष्ट्रीय आय प्रति व्यक्ति या मनुष्य की आयु प्रतिदिन या जनसंख्या प्रति सहस्त्र जान कर ही सन्तुष्ट हो जाते हैं। इस प्रकार उपरोक्त विवेचना से हम निम्नलिखित तथ्यों पर पहुँचते हैं:—

(१) संकलन में आदर्श यथार्थता सम्भव नहीं, क्योंकि इस कार्य में प्रायः बहुत से प्रगणकों की आवश्यकता होती है जिनकी अपनी अलग अभिनति (Prejudice) हुआ करती है।

(२) पूर्ण यथार्थता यदा कदा ही पाई जा सकती है और इस कारण हमें समग्र के बड़े होने, समय की कमी, और धन के अभाव के कारण पूर्ण यथार्थता के समीप की तुलनात्मक यथार्थता पर ही विश्वास कर लेना चाहिये।

(३) भौतिक एवं सामाजिक शास्त्रों के अन्तर्गत आने वाले उदाहरणों में तुलनात्मक यथार्थता अधिक होती है और व्यापारिक समंकों में कम, क्योंकि व्यापारी को माँग पूर्ति में बहुत से बाहरी कारणों का सामना करना पड़ता है जिन पर उसका बस नहीं होता। उसकी हानि या लाभ का आधार ही अनिश्चितता है।

(४) विज्ञान एवं गणित के ढंगों में दिन प्रतिदिन उन्नति होती जा रही है और उनके कारण समंकों की यथार्थता भी बढ़ती जा रही है। इसलिये हम यथार्थता को प्रगतिशील यथार्थता कह सकते हैं।

(५) इस प्रकार सर्वोत्तम पद्धति वह है जिसमें अपेक्षित यथार्थता की सीमा एवं मात्रा का पहले ही से निर्णय कर लिया जाता है और फिर उसी मात्रा को संकलित समंकों में लाने का प्रयत्न किया जाता है।

यथार्थता की अपेक्षित मात्रा

कार्य आरम्भ करने से पहिले अपेक्षित यथार्थता की परिसीमा एवं मात्रा निश्चित कर लेना आवश्यक है और यह निम्नलिखित बातों पर निर्भर होती हैं। (अ) अनुसंधान का विषय एवं उद्देश्य, (ब) सम्भावित यथार्थता और (स) समंक संकलन की व्यवहृत पद्धति।

कभी कभी यथार्थता की परिसीमा एवं मात्रा संकलनकर्त्ता स्वयं निश्चित नहीं कर सकता और परिस्थितियाँ उनका निर्णय करती हैं। यदि

किसी जनसंख्या की गणना की जाय तो प्रतिशत यथार्थता पाना असम्भव है, परन्तु यदि किसी छोटी पुस्तक के आकार का नाप लिया जाय तो प्रति इंच, प्रति सेन्टीमीटर या प्रति मिलीमीटर यथार्थता प्राप्त की जा सकती है। ऐसी परिस्थितियों में जहाँ यथार्थता की परिसीमा और मात्रा निश्चित नहीं की जा सकती, संकलनकर्त्ता को प्राप्य सम्भावित यथार्थता तक पहुँचने की कोशिश करना चाहिये।

अनुमान (Approximations)

कभी कभी विशाल समंक भ्रामक होते हैं और इस कारण पूर्णांकों का प्रयोग करना अधिक उपयुक्त होता है। इनके प्रयोग से जोड़, बाकी, गुणा, भाग करने एवं तुलना करने में बड़ी आसानी होती है। पूर्णांकों के प्रयोग से विभ्रम (Error) की सम्भावना भी कम रहती है। अतः अनुमान द्वारा विभ्रम कम किया जा सकता है। यदि कोई संख्या समीपतम इकाई (१०) तक पूर्णांक बनाई जाय तो ±५ ऐसी परिसीमायें बतलाता है जिनके भीतर ही विभ्रम पाया जायगा। इस प्रकार यदि ४९० पूर्णांक है तो सम्भावित विभ्रम (Possible Error) ४९५ और ४८५ के बीच में पाया जायगा।

अनुमान लगाने के प्राय: ३ ढंग होते हैं—

(अ) संख्यायें छोड़ कर अनुमान लगाना,

(ब) संख्यायें जोड़ कर अनुमान लगाना,

(स) समीपतम इकाई तक पूर्णांक बना कर अनुमान लगाना।

(अ) संख्यायें छोड़ कर अनुमान लगाना

यदि दो या अधिक बड़ी संख्यायें दो हों, तो संख्या छोड़ कर अनुमान लगाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, ३,४५,९०० को केवल ३४५; २,४९,५२६ को केवल २४९; और ७,२९,२०९ को केवल ७२९ मान लिया जाय। इस ढंग में विभ्रम की सम्भावना बहुत अधिक होने के कारण इसका प्रयोग बहुत कम किया जाता है।

(ब) संख्यायें जोड़ कर अनुमान लगाना

यदि दो या अधिक बड़ो संख्यायें दी हों तो उन्हें आगे वाली इकाई में १ जोड़ कर पूर्णांक बनाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, ३,५५,९०० को

३५६; २,४९,५२६ को २५०; और ७,२९,२०९ को ७३० लिया जा सकता है । इस ढंग के अनुसार भी छोड़ी जानी वाली संख्याओं का कोई ध्यान नहीं रखा जाता । केवल ऊपर वाली संख्या में एक जोड़ दिया जाता है । ऐसे अनुमानों भी विभ्रम की सम्भावना अधिक है ।

(स) समीपतम इकाई तक पूर्णांक बनाना

यह ढंग सबसे अधिक प्रयोग में लाया जा सकता है । इसमें यदि निम्न इकाई ५ या ५ से अधिक है तो उच्च इकाई में एक जोड़ कर पूर्णांक बना लिया जाता है, अन्यथा उच्च इकाई के बाद की ५ से कम सभी संख्याओं को छोड़ दिया जाता है । इस प्रकार ३,४५,९०० को ३४६; २,४९, ५२६ को २५० और ७,२९,२०९ को ७२९ लिया जा सकता है । विभ्रम की सम्भावना इस प्रकार अनुमान लगाने में बहुत कम हो जाती है । इसके प्रयोग से हिसाब लगाने में बहुत आसानी होती है और बड़ी संख्याओं से उत्पन्न भ्रम भी दूर हो जाता है ।

ऐसे प्रत्येक ही उदाहरण में जिसमें अनुमान लगाया गया हो, कुछ न कुछ अनुमान सम्बन्धी विभ्रम (Error of Estimation) हो जाता है । यह विभ्रम वास्तविक संख्या एवं अनुमानित संख्या का अन्तर होता है । यदि वास्तविक संख्या अनुमानित संख्या से अधिक हो तो इस अन्तर को अनुलोम विभ्रम (Positive Error) और यदि इसके प्रतिकूल हो तो उसको विलोम विभ्रम (Negative Error) कहते हैं । इस प्रकार के विभ्रमों की सम्भावना अनुमान की प्रणाली पर निर्भर रहती है । समीपतम इकाई तक पूर्णांक बनाने की अनुमान पद्धति सर्वोत्तम है क्योंकि इसके द्वारा व्युत्पन्न राशियों में विभ्रम होने की सबसे कम सम्भावना होती है । परन्तु जब वास्तविक संख्यायें ऐसी हों कि उनका प्रयोग किया जा सके तो अनुमानों का प्रयोग न करना चाहिए ।

सांख्यिकीय विभ्रम (Statistical Errors)

वास्तविक संख्या और अनुमानित संख्या के अन्तर को सांख्यिकीय विभ्रम कहते हैं, जिनकी उत्पत्ति निम्नलिखित कारणों से हो सकती है—(अ) गलत अनुमान, (ब) पक्षपातपूर्ण आगणना, (स) विश्लेषण के एककों में असमानता, (द) संकलित अंकों का समुचित न्यादर्श न होना, (य) माप एककों का अनियमित एवं अनुचित होना । विभ्रम को 'अशुद्धि'

नहीं कहा जा सकता, क्योंकि अशुद्धि का कारण कोई प्रारम्भिक भ्रान्ति हो सकती है। सांख्यिकीय विभ्रमों के तीन मूलभूत कारण हैं—(अ) प्रारंभिक दोष, (ब) अपर्याप्तता, (स) छलसाधन। प्रारम्भिक दोष के कारण उत्पन्न विभ्रम को उद्गम विभ्रम (Error of origin) कहते हैं और उनकी उत्पत्ति के प्रायः निम्नलिखित कारण होते हैं— (अ) मापन यंत्र में दोष, (ब) संकलनकर्ता की अभिनति और पक्षपात, (स) अयोग्य प्रगणकों अथवा सूचना देने वाले संसूचकों का प्रश्नावलियों को या अनुसंधान के उद्देश्य, क्षेत्र एवं प्रकृति को न समझना। अपर्याप्तता विभ्रम (Error of inadequacy) ऐसे विभ्रमों को कहते हैं जिनकी उत्पत्ति का कारण है न्यादर्श में सम्मिलित किये गए अंकों का समुचित व पर्याप्त न होना अथवा संकलित सूचनाओं की कमी। ऐसे विभ्रमों को सम सम्भाविक न्यादर्श (Random Sampling) या अनुक्रमिक न्यादर्श (Sequential Sampling) को अपना कर दूर किया जा सकता है। मापन या अवलोकन में दक्षता की कमी के कारण कभी कभी अनजाने में विभ्रम उत्पन्न हो जाते हैं, जिन्हें प्रहस्तन विभ्रम या छलसाधन विभ्रम (Error of Manipulation) कहते हैं। इनकी उत्पत्ति गलत अनुमानों और अनुपयुक्त संकलन की पद्धति के अपनाने के कारण भी हो सकती है। इन्हें भी दूर किया जा सकता है।

सांख्यिकीय विभ्रमों के वर्गीकरण के अनुसार दो प्रकार के विभ्रम होते हैं:—(अ) अभिनत विभ्रम या संचयी विभ्रम (Biassed or Cumulative error), (ब) अनभिनत विभ्रम या पूरक विभ्रम (Unbiassed or Compensatory error)।

अभिनत या संचयी विभ्रम

अभिनत या संचयी विभ्रमों की उत्पत्ति निम्नलिखित कारणों से होती है:—(अ) प्रगणकों के पक्षपातपूर्ण व्यवहार से, (ब) माप-दंड में उपस्थित खराबी के कारण और, (स) व्यक्तिगत स्वाभाविक अभिनति के कारण। इस प्रकार के विभ्रम एक ही दिशा में होते जाते हैं और उनकी प्रकृति संचयी होती है। इस कारण जितने ही अधिक माप हम लेते जायेंगे उतना ही अभिनत विभ्रम बढ़ता जायगा और जब हम सम्पूर्ण क्षेत्र को नाप लेंगे तो यह विभ्रम महानतम होगा। इस प्रवृत्ति के कारण अभिनत विभ्रम

को संचयी विभ्रम भी कहा जाता है। यदि किसी मापदंड से हम कपड़ा नाप रहे हैं, और वह २ इंच छोटा है तो प्रत्येक नाप में हम २ इंच की गलती करते जायेंगे और विभ्रम की प्रकृति संचयी होगी। कभी कभी प्रगणकों के स्वभावजन्य अभिनति के कारण भी विभ्रम संचयी होता जाता है। इस प्रकार यदि किसी व्यक्ति का स्वभाव है कि वह अतिशयोक्ति करे तो अनुसन्धान क्षेत्र में अंक एकत्र करते समय भी उसके स्वभाव का प्रभाव उसके द्वारा संग्रहीत सामग्री में परिलक्षित होगा।

अनभिनत विभ्रम या पूरक-विभ्रम

दैव प्रवरण या पक्षपातरहित संकलन या मापन के कारण उत्पन्न विभ्रमों की प्रकृति पूरक होती है, क्योंकि उनका आधार 'सम्भावना का सिद्धान्त है'। इन विभ्रमों का कारण कुछ ऐसी परिस्थितियाँ हैं जिनके ऊपर प्रगणकों का कोई भी नियंत्रण नहीं होता है और संकलन अथवा मापन करते समय उन्हें ऐसे विभ्रमों की किंचित मात्र भी आशंका नहीं रहती। इस प्रकार के विभ्रम दोनों ही दिशाओं में होते हैं और अनुलोम (Positive) और विलोम (Negative) विभ्रम एक दूसरे के पूरक होने के कारण अंत में प्राप्त सामग्री में लघुतम विभ्रम रह जाता है। इस प्रकार यदि एक पक्षपातरहित व्यक्ति एक दोषरहित तराजू का प्रयोग करता है तो यह सम्भव है कि अनजाने में नापते समय कभी कम नापे और कभी अधिक। परन्तु अंत में उसके द्वारा नापी गई वस्तु में बहुत अधिक विभ्रम न मिल सकेगा—इसका कारण क्या है?—कभी तो वह दो छँटाँक कम नाप जायगा और कभी १½ छटाँक अधिक, तदुपरान्त एक छटाँक कम और २½ छँटाँक अधिक। इस प्रकार विभ्रम एक दूसरे को पूर्ण करते रहेंगे और अंत में प्राप्त सम्पूर्ण माप प्रायः यथार्थ ही होगी। अनभिनत विभ्रम की पूरक प्रकृति के के कारण ही हम उसे पूरक विभ्रम भी कह सकते हैं। जितने ही अधिक अंक न्यादर्श में लिये जायेंगे पूरक प्रवृत्ति के कारण अनभिनत विभ्रम कम होता जायगा। क्योंकि दैव प्रवरण में 'महानुमाप जड़ता नियम' के अनुसार बड़ा न्यादर्श लेने से संकलन में अधिक स्थिरता आ जाती है।

विभ्रमों की माप

विभ्रमों की माप दो प्रकार से की जा सकती हैः—(अ) निरपेक्ष रूप से और सापेक्ष रूप से। जब विभ्रम की माप निरपेक्ष रूप से की जाती है

तो वह निरपेक्ष विभ्रम कहलाता है। निरपेक्ष विभ्रम (Absolute Error) वास्तविक माप एवं अनुमानित माप के अन्तर को कहते हैं, अर्थात निरपेक्ष विभ्रम=वास्तविक माप—अनुमानित माप। यथा,

नि० वि०=वा—अ

उदाहरणार्थ, यदि वास्तविक माप २ इंच है और अनुमानित माप १·८ इंच, तो निरपेक्ष विभ्रम + २″ होगा और इसे अनुलोम होने के कारण अनुलोम निरपेक्ष विभ्रम (Positive absolute error) कहा जायगा। यदि वास्तविक माप १·८ इंच होगा, तो इसे विलोम निरपेक्ष विभ्रम (Negative absolute error) कहा जायगा।

सापेक्ष विभ्रम (Relative Error) वास्तविक माप और अनुमानित माप के अन्तर और अनुमानित माप के अनुपात को कहते हैं, अर्थात् दूसरे शब्दों में निरपेक्ष विभ्रम को यदि अनुमानित माप से भाग दिया जाय तो प्राप्य गुणक को हम सापेक्ष विभ्रम कहेंगे। अपने उदाहरण में यदि निरपेक्ष विभ्रम २ इन्च है और अनुमानित माप १·८ इन्च तो सापेक्ष विभ्रम बराबर होगा,

$$\frac{\cdot२''}{१\cdot८''} = \cdot ११''$$

दूसरे शब्दों में सापेक्ष विभ्रम बराबर है,

$$\frac{\text{निरपेक्ष विभ्रम}}{\text{अनुमानित माप}} = \frac{\text{वास्तविक माप–अनुमानित माप}}{\text{अनुमानित माप}}$$

यथा,

$$\text{सा. वि.} = \frac{\text{वा} - \text{अ}}{\text{अ}}$$

यदि सापेक्ष विभ्रम को हम प्रतिशत लिखें तो उसे प्रतिशत विभ्रम (Percentage Error) कहेंगे। सापेक्ष विभ्रम ऐसी दशा में अनुलोम होगा, जब वा>अ और विलोम होगा यदि वा<अ ।

द्वितीयक अंकों का सम्पादन कार्य

द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने से पहले उनका सम्पादन करना आवश्यक है। इस सम्पादन कार्य में उनके संकलन और प्रारम्भिक विश्लेषण सम्बन्धी विभ्रम मालूम करके जहाँ तक हो सके दूर करने का प्रयत्न करना चाहिये जिससे प्राप्त सामग्री अनुसन्धानीय समस्या के पूर्णतः अनुरूप एवं उपयोगी हो। समंकों में समता होनी चाहिए और यदि समता

नहीं है तो विषम समंक क्षेत्र को समान स्तरों में विभाजित कर लेना चाहिए ।

द्वितीयक सामग्री के सम्पादन में निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना आवश्यक है,

(१) समंकों के उद्‌गम स्थान ।

(२) संकलन में प्रयुक्त माप एवं विश्लेषण एकक ।

(३) प्राथमिक अनुसन्धान की मुख्य समस्या, प्रकृति, एवं उद्देश्य ।

(४) यथार्थता की अपेक्षित परिसीमा और उसका सम्पूर्ण अनुसन्धान में प्रयोग ।

(५) अनुसन्धान की अवधि ।

(६) प्राथमिक अनुसन्धान में कार्य करने वाले प्रगणकों की कार्य के लिए सिद्धता ।

प्राथमिक एवं द्वितीयक सामग्री के सम्पादन कार्य के समाप्त हो जाने पर और उनके विभ्रमों को यथा सम्भव दूर कर देने के बाद उनका वर्गीकरण किया जाता है, जिससे उनके अर्न्तनिहित लक्षण स्पष्ट हो जायें ।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. Distinguish between (a) Absolute and Relative Errors and (b) Biassed and Unbiassed Errors. Discuss the effects of these errors and explain the steps that are taken to meet the effects.

(अ) निरपेक्ष और सापेक्ष विभ्रम, (ब) अभिनत और अनभिनत विभ्रम में भेद स्पष्ट कीजिए । उपरोक्त विभ्रमों के प्रभाव और उनको दूर करने के उपाय समझाइये ।

2. (a) Discuss the main sources of errors in Statistics and their effects.

(b) State the various methods of Approximation and their utility in Statistics.

(अ) सांख्यिकी में विभ्रमों के प्रमुख उद्गमों और उनके प्रभावों का विवरण दीजिए।

(ब) अनुमान लगाने के विभिन्न ढंग और उनकी उपयोगिता समझाइये।

(B. Com., Agra, 1940)

3. Give a few instances of Biassed Errors in the publications of the Govt. of India. How can these errors be avoided.

भारत सरकार के कुछ प्रकाशनों में अभिनत विभ्रमों का उदाहरण दीजिए और बतलाइये कि उन्हें किस प्रकार दूर किया जा सकता है।

(M.A., Agra, 1949)

4. Discuss the standard of accuracy required in statistical calculations. To what extent should Approximation be used.

सांख्यिकीय गणनाओं में यथार्थता के अपेक्षित स्तर के विषय में विवरण दीजिए। अनुमानों का कहां तक उपयोग करना चाहिए।

(M. A., Agra, 1949)

5. What precautions should be taken in the use of published statistics.

मुद्रित सामग्री के उपयोग में किन बातों का ध्यान रखना चाहिए।

(B. Com., Agra, 1949)

6. In what way does a statistical error differ from a mistake ? What classes of errors are there and how may they be measured?

अशुद्धि और विभ्रम में क्या अंतर है। विभ्रम कितने प्रकार के होते हैं और उन्हें किस प्रकार नापा जा सकता है।

(B. Com., Alld., 1943)

7. "It is never safe to take Published Statistics at their face value, without knowing, their meaning and limitations." Elucidate the statement.

"प्रकाशित सामग्री को बिना उनके अर्थ और सीमाएं समझे हुए उनके बाह्य मूल्य के अनुसार ही समझ लेना एक बहुत बड़ी भूल है" उपरोक्त कथन का विस्तारपूर्वक विवेचन कीजिए।

अध्याय ७.

समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीकरण
(Classification and Tabulation of Data)

वर्गीकरण

जब संग्रहीत सामग्री का सम्पादन हो चुकता है और उसमें आ जाने वाले विभ्रमों को दूर कर दिया जाता है तो वर्गीकरण की आवश्यकता इसलिये पड़ती है कि समंकों के मुख्य लक्षण पूर्णतया स्पष्ट हो जायें। वर्गीकरण एक ऐसी रीति है जिसके द्वारा किसी भी समग्र के अंक उम्र, जाति और सामाजिक परिस्थिति के अनुसार इस प्रकार से वर्गों में बांट दिये जाते हैं कि उनकी ओर देखते ही संख्याशास्त्र से अनभिज्ञ व्यक्ति को भी समग्र के लक्षणों का पूर्ण ज्ञान हो जाता है। कभी कभी संग्रहीत सामग्री में बहुत से तथ्य इतने सम्बन्धित होते हैं कि यदि वर्गीकरण न किया जाय तो उनका कोई भी महत्व न होगा।

श्री एल० आर० कोनर महोदय के अनुसार "वर्गीकरण वस्तुओं को वास्तविक या भावों के अनुसार कुछ संभागों में समभाजित करने की क्रिया कहते हैं, जिसके द्वारा समान गुणों वाली वस्तुयें एक साथ रखी जाती हैं। इस प्रकार का वर्गीकरण विभिन्नताओं के बीच में समान वस्तुओं को खोजकर उन्हें एक साथ करने का कार्य करता है।" यह संक्षिप्तिकरण का एक ऐसा ढंग है जो समग्र के अन्तर्गत आने वाले समंकों को उनके लक्षण, गुणों और समानताओं के अनुसार विभिन्न स्तरों में विभाजित करता है। ऐसा वर्गीकरण करने से पहिले समग्र का उद्देश्य एवं अर्थ ठीक ठीक समझ लेना अत्यन्त आवश्यक है।

वर्गीकरण के उद्देश्य

(१) यह किसी भी समग्र के अन्तर्गत आने वाले तथ्यों में समानता एवं विषमता को स्पष्ट करता है।

(२) इस रीति के द्वारा अनावश्यक समंकों को छोड़ देने के कारण तथ्य सरल और सुगम हो जाते हैं।

(३) इसके द्वारा ऐसे समंकों को ठीक प्रकार से समझा जा सकता है, जिन्हें एक साधारण बुद्धि का मनुष्य बेकार और विशालकाय जान कर छोड़ सकता है।

(४) इसके द्वारा तुलना करने के योग्य अंशों का पता लग जाता है और इस ओर भी संकेत हो जाता है कि निष्कर्ष किस प्रकार निकाले जा सकते हैं।

(५) इसके द्वारा संख्याओं का उनके गुणों के अनुसार तर्कशुद्ध विन्यास (Arrangement) किया जा सकता है।

वर्गीकरण जिस प्रकार समंक-संकलन में एक प्राथमिक आवश्यकता है उसी प्रकार समंक-विश्लेषण में भी उसका एक महत्वपूर्ण स्थान है। समंक-संकलन करने से पहिले एक योजना तैयार होनी चाहिये जिसमें उन सभी मदों का वर्गीकृत विवरण होना चाहिये जिनके अन्तर्गत समंक एकत्रित करना अभीष्ट हो। परन्तु यदि कभी इस प्रकार का वर्गीकरण संख्या संकलन के समय न किया जा सका हो और प्राप्त समंक-समूह ऐसा हो कि उसे समान स्तरों में विभाजित किया जा सके तो मध्यकों (Averages), अपकिरण गुणकों (Coefficients of Variation) या विषमता-गुणकों (Coefficients of Skewness) के द्वारा विश्लेषण करने से पहिले वर्गीकरण अवश्य कर लेना चाहिये।

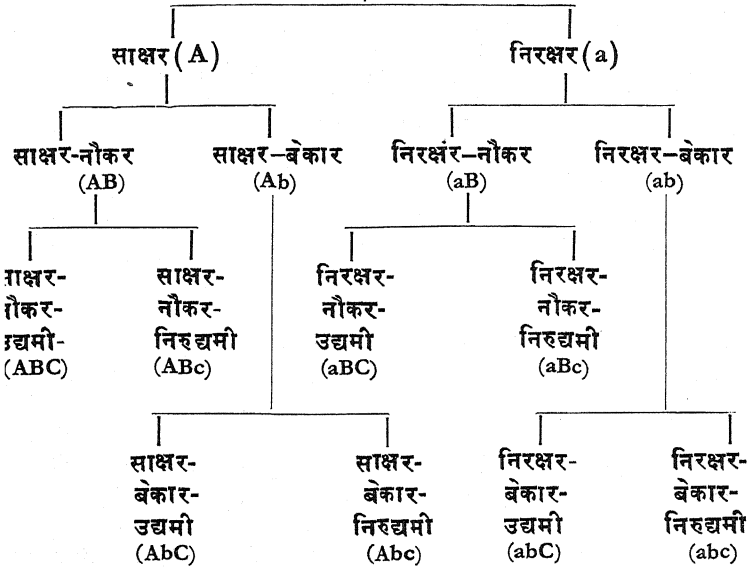
वर्गीकरण विचार करने की एक ऐसी शैली है जिसका रूप अनुसंधान के उद्देश्य पर निर्भर रहता है। यदि अनुसंधान में किसी भी वस्तु से सम्बन्धित संकलन एकक को समभाजित करके किया गया हो तो उन समभाजित एककों द्वारा एकत्र सामग्री को मिला देना चाहिये। उदाहरणार्थ, यदि कुल चल मुद्रा का परिमाण मालूम करना है और इसके लिये एक एकक के विभिन्न समभागों का प्रयोग किया गया था जैसे टंक मुद्रा, नोट, हुंडी, बैंक ड्राफ्ट इत्यादि, तो उन सबसे प्राप्त अंकों को एक में मिला देना चाहिये।

उपरोक्त विवरण से वर्गीकरण का महत्व स्पष्ट हो जाता है। बिना वर्गीकरण के प्राप्त समंक समूहों का विश्लेषण असम्भव सा जान पड़ता है और यदि निष्कर्ष प्राप्त होंगे भी तो उनमें यथार्थता की न्यूनता होगी। उचित वर्गीकरण संकलनकर्ता की बुद्धि और अनुभव पर निर्भर होता है

और एक आदर्श वर्गीकरण में विशालता, स्थिरता, असंदिग्धता और लचीलापन इत्यादि गुण पाये जाते हैं। वर्गीकरण का मुख्य उद्देश्य यह है कि "समान वर्गों में समान अंक ही रखे जाँय" इस लिये जितना उत्तम वर्गीकरण होगा वर्गों में उतने ही प्रतिनिधि समंकों का चुनाव किया जायगा और अयोग्य तथा असम्बद्ध अंक छोड़ दिये जायेंगे। जितने अधिक वर्ग होंगे उतनी ही अधिक असमानता पाई जायगी परन्तु उतनी ही पूरक प्रवृत्ति की भी सम्भावना होगी। वास्तव में वर्गीकरण आवश्यक अंकों को एकत्रित करना और एकत्रित सामग्री में आवश्यक अंकों को छाँटना ये दोनों ही कार्य करता है। वर्गीकरण चार प्रकार का हो सकता है; (अ) गुणात्मक, (Qualitative), (ब) अंकात्मक (Quantitative) (स) सामयिक या समयानुसार (Temporal), (द) स्थानानुसार (Spatial)।

(१) गुणात्मक वर्गीकरण

इस प्रकार का वर्गीकरण समंकों के विवरणात्मक स्वरूप पर निर्भर रहता है। विवरणात्मक लक्षण केवल विभिन्न समंकों के गुणों की ओर संकेत करते हैं और धर्म, जाति, प्रान्त, उम्र इत्यादि के सम्बन्ध में हो सकते हैं जिनमें गुणात्मक दृष्टि से विभिन्नतायें पाई जाती हों। इन्हीं विभिन्नताओं के कारण इस प्रकार के विवरणात्मक लक्षणों का गुणात्मक रूप से विभाजन किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, समग्र को साक्षर-निरक्षर, नौकरी पेशा-बेकार, स्त्री-पुरुष, अन्धे-दृष्टिवान, इत्यादि में बाँटा जा सकता है। यदि उपरोक्त प्रकार से एक गुण के दो भाग किये जाँय तो उसे साधारण वर्गीकरण या द्वन्द-भाजन वर्गीकरण (Dichotomy) कहते हैं। यदि एक ही गुण को दो उपगुणों में बाँट कर उन उपगुणों को फिर से संभाजित किया जाय तो बहुगुण–वर्गीकरण (Manifold Classification) कहते हैं।

निम्न तालिका से द्वन्द–भाजन एवं बहुगुण-वर्गीकरण स्पष्ट रूप से समझ में आ जाते हैं। गुण सम्भाजन करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि प्रत्येक तथ्य को किसी भी उपगुणों में रखते समय उस उपगुण की परिभाषा का पूर्ण ध्यान रखा जाता है या नहीं। यदि उपगुण की परिभाषा ही ठीक प्रकार न की जाय तो वर्गीकरण निरर्थक होगा।

(२) अंकात्मक वर्गीकरण

यह वर्गीकरण संग्रहीत तथ्यों के अंकात्मक लक्षणों के अनुसार किया ना सकता है और कुछ ऐसे संभाग (Classes) बना दिये जाते हैं, जिनमें उन संभाग–सीमाओं के अर्न्तगत आने वाले सभी समंक रखे जा सकें। इस प्रकार गुणात्मक वर्गीकरण को हम अंकात्मक वर्गीकरण में बदल सकते हैं, यदि प्रत्येक गुण तथा उपगुण से सम्बन्धित तथ्यों को अंकों के रूप में लिख दिया जाय अर्थात् प्रत्येक गुण के अर्न्तगत आने वाले तथ्यों के लिए कुछ आंकिक सीमायें बना दी जाँय। उदाहरणार्थ, वर्षों में उम्र, भार, मन सेर-छँटाक में, या ऊँचाई गज-फुट-इंच में क्रमशः नापी जा सकती हैं।

अगले पृष्ठ पर दी गई तालिका में उम्र और भार सम्बन्धी प्रत्येक समंक राशि को विशिष्ट समूहों में बाँट दिया गया है और प्रत्येक अंक-समूह की परिसीमायें निश्चित की गई हैं। इस प्रकार के वर्गीकरण को संभागान्तर वर्गीकरण (Classification according to Class–intervals), प्रत्येक संभाग को संभागान्तर (Class-interval), उनकी

परिसीमाओं को संभाग-सीमायें (Class-limits), प्रत्येक के अन्तर्गत आने वाले व्यक्तियों या वस्तुओं की संख्या को संभाग–बारम्बारता (Class-frequency) और संभाग की परिसीमाओं के अन्तर को संभाग-विस्तार या संभाग-अन्तर (Magnitude or interval) कहते हैं । दोनों संभाग की सीमाओं के बीच के अंक को मध्य-विन्दु (Mid-point) कहते हैं ।

अंकात्मक वर्गीकरण

उम्र (वर्षों में)		भार (पौण्ड में)	
संभाग	व्यक्ति–संख्या	संभाग	संख्या
१०–२०	५	८०-९०	१०
२०–३०	७	९०-१००	२०
३०–४०	१०	१००-११०	२५
४०–५०	४	११०-१२०	१०

इस प्रकार यदि किसी भी स्थान में ५० व्यक्ति रहते हैं जिनकी उम्र २० से ४० साल के बीच में है तो (२०–४०) को एक संभागान्तर कहेंगे, जिसकी संभाग-सीमायें २० एवं ४० हैं । ५० को उस संभाग की बारम्बारता कहेंगे और २० व ४० के अन्तर को संभाग-विस्तार । इस संभाग में मध्य-विन्दु ३० होगा ।

किसी भी समंक समूह में जहाँ संभागान्तर का प्रयोग किया जाय, प्रत्येक संभागान्तर बराबर विस्तार का होना चाहिए क्योंकि इससे औसत और प्रतिनिधि निष्कर्ष मालूम करने में सहायता मिलेगी । कभी कभी संभाग समान विस्तार के नहीं होते हैं । ऐसा उस समय होता है जब कि समान संभागों में समंक-समूहों को संभाजित करने से बहुत से समंक कुछ थोड़े से ही संभागों में जमाव कर लेते हैं । यदि विषम संभाग ऐसी अवस्था में न लिए जायेंगे तो अनेक समंकों के अनुचित जमाव के कारण हो सकता है कि प्रतिनिधि उत्तर न प्राप्त हो सके परन्तु जहाँ संभागों का आगे विश्लेषण करना अभीष्ट हो बराबर संभागों को लेकर ही बढ़ना चाहिए । कभी-कभी संभागान्तरों की सीमायें अनिश्चित सी रख दी जाती हैं, "जैसा दस साल से

नीचे", "५० साल से ऊपर"। ऐसी तालिका को विवर्तमुखी-सारिणी (Open-end Table) कहते हैं।

संभागान्तरों को दो प्रकार से लिखा जा सकता है—(अ) अपवर्जी रीति (Exclusive method) के अनुसार और (ब) समावेशिक रीति (Inclusive method) के अनुसार। यदि किसी संभाग की उच्च सीमा ही अपने अगले वाले संभागान्तर की निम्न सीमा हो और इसी रीति से अन्य संभाग रखे गए हों तो उसे अपवर्जी रीति कहते हैं। जैसे १०-२०, २०-३०, ३०-४० और ४०-५० इत्यादि। इसे अपवर्जी रीति इसलिए कहते हैं कि किसी संभागान्तर के अन्तर्गत उसकी उच्च सीमा के नीचे सभी समक रखे जाते हैं, परन्तु ठीक उच्च सीमा के बराबर वाले अंक अपवर्जित समझे जाते हैं, और उन्हें अगले संभाग में रख दिया जाता है। इस प्रकार १० से लेकर १९·९९ तक के अंक प्रथम संभाग में रखे जायेंगे। परन्तु ठीक २० वाला समंक अगले संभाग (२०-४०) में रखा जायगा।

यदि दोनों परिसीमाओं के बराबर वाले समंक उसी संभाग में रखे जांय तो इस रीति को समावेशिक रीति कहते हैं क्योंकि एक ही संभाग में दोनों ही संभाग-सीमाओं के बराबर समंको का समावेश हो सकता है। उदाहरणार्थ, ०–९, १०–१९, २०–२९ इत्यादि। इस रीति का प्रयोग अस्पष्ट होने के कारण कम किया जाता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि संभागांतर के प्रयोग में हमें निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना चाहिये।

(१) जहां तक हो सके संभागांतर बनाते समय उसकी उच्च एवं निम्न सीमाओं के रूप में संभाग की वास्तविक संख्यायें ही ली जानी चाहिये।

(२) संभागान्तर का विस्तार समुचित होना चाहिये जिससे उसमें विभिन्न माप के अंक सम्मिलित होकर एक दूसरे की विषमताओं को दूर कर सकें।

(३) जहां तक हो सके प्रत्येक संभाग में समान अंक ही रखना चाहिये परन्तु कभी कभी विषम बिस्तार वाले संभागों का प्रयोग करना आवश्यक हो जाता है जबकि किसी विशिष्ट संभाग में अधिक अंको का जमाव रोकना अभीष्ट होता है। जहां तक हो सके विवर्तमुखी सारिणी (Open-end Table) का प्रयोग न किया जाना चाहिये।

(४) जहां तक हो सके अपवर्जी रीति का प्रयोग करना चाहिये क्योंकि वह दूसरी की अपेक्षा सरल व सुगम है।

(३) सयमानुसार वर्गीकरण

जब संकलित तथ्यों का दिन, महीनों या वर्षो अथवा ऐतिहासिक क्रम के अनुसार विन्यास किया जाता है तो उसे समयानुसार वर्गीकरण कहते हैं। उदाहरणार्थ, भारत के इतिहास को हम विभिन्न कालों में बाँट सकते हैं और प्रत्येक काल के तथ्यों को उनके अन्तर्गत रख सकते हैं।

(४) स्थानानुसार वर्गीकरण

जब समंको का विभाजन स्थान अथवा भौगोलिक स्थिति के अनुसार किया जाय तो उसे स्थानानुसार वर्गीकरण कहते हैं। उदाहरणार्थ, जनसंख्या, उत्पादन और जन्म-मरण दर इत्यादि को प्रांतों के अनुसार बांट सकते हैं।

समंक मालायें (Statistical series)

समंक माला अंकों का एक ऐसा तर्कशुद्ध क्रमानुसार विन्यास है जिसमें समान लक्षणों वाले या प्रतिकूल लक्षणों वाले परन्तु समान क्षेत्रीय अंक एक साथ रखे जाते हैं। कालान्तर माला (Temporal series) एक ऐसी समंक माला है जिसमें समंको का काल, समय या ऐतिहासिक क्रम के अनुसार विन्यास किया जाता है। स्थानिक माला (Spatial Series) में तथ्यों का विन्यास भौगोलिक क्रम के अनुसार किया जाता हैं। परिस्थिति माला (Condition series) एक ऐसी समंक माला है जिसमें संकलित तथ्यों को उनकी विशेष परिस्थिति के अनुसार लिखा जाता है उदाहरणार्थ, समंको को उम्र, उँचाई, लम्बाई और भार इत्यादि के अनुसार बढ़ते हुये या घटते हुये क्रम से लिखा जाय।

अंकात्मक मालायें (Quantitative series)

ये दो प्रकार की हो सकती हैं—(अ) खंडित माला या विच्छिन्न माला (Discontinuous or Discrete series), (ब) सतत या अविच्छिन्न माला। प्राय: व्यक्तिगत अंको को उचित यथार्थता से नापा जा सकता है और उन्हे एक माला का रूप दिया जा सकता है। प्रत्येक समंक एक दूसरे से एक पूर्णांक के बराबर विचलन करता है और जब सभी समंको को एक माला या श्रेणी का रूप दे दिया जाता है तो प्रत्येक समंक के रूप में कोई गणित सम्बन्धी अविछिन्नता नहीं रहती। इस कारण ऐसी माला को विच्छिन्न या

खँडित माला कहते हैं। परन्तु इसके विपरीत बहुत से अंक ऐसे होते हैं जिन्हें व्यक्तिगत रूप से पूर्णतम यथार्थता से नापा नहीं जा सकता और सभी समंक आपस में बहुत कम विचलन करते हैं तो उन सबको एक ही संभाग में रख सकते हैं। इस प्रकार प्राप्त की गई माला के संभागों में गणित सम्बन्धी अविच्छन्नता बनी रहती है जिसके कारण उसे आविच्छन्न माला कहते हैं। इन दोनों प्रकार की मालाओं का अन्तर निम्नलिखित सारणी से स्पष्ट हो जाता है।

विच्छिन्न माला (Discrete Series)		अविच्छिन्न माला (Continuous Series)	
उम्र (Age)	बारम्बारता (Frequency)	उम्र-संभाग (Class-intervals)	बारम्बारता (Frequency)
२५	१५	१०–२०	१५
२६	२०	२०–३०	२०
२७	१७	३०–४०	१७
२८	१२	४०–५०	१२
२९	३	५०–६०	३
३०	५	६०–७०	५

विच्छिन्न माला का प्रयोग उस समय किया जाता है जब कि कुल समंकों की संख्या काफी कम हो और उनके प्रदर्शन में श्रंखला को सूक्ष्म बनाने की किसी भी विधि के प्रयोग की आवश्यकता न हो। अन्य सब परिस्थितियों में अविच्छिन्न माला का प्रयोग करना चाहिये। संग्रहीत समंक स्वयं ही स्पष्ट कर देते हैं कि किस प्रकार की माला से काम चलेगा। उदाहरणार्थ, ब्याज की दर को एक विच्छिन्न माला के ही रूप में रखना चाहिये, क्योंकि ब्याज की दर प्रायः एक पूर्णांक ही होती है और उत्पादन, मजदूरी इत्यादि को अविच्छिन्न माला के रूप में दिखाया जा सकता है।

सारिणीकरण (Tabulation)

सम्पादन और वर्गीकरण के उपरान्त संग्रहीत सामग्री को तालिकाओं और सारिणी के रूप में क्रमानुसार रखते हैं जिससे उसके लक्षण और अधिक स्पष्ट और सुगम हो जायें। श्री होरेस सेक्राइस्ट महोदय के कथनानुसार "वर्गीकरण द्वारा किये गये संग्रहीत सामग्री के विश्लेषण को एक स्थायी

स्वरूप देने के कार्य को हम सारणीकरण कहते हैं जिसमें समान लक्षणों वाले समंकों को तुलना करने के लिये पास पास रखा जाता है।" इसलिये सारणीकरण संग्रहीत समंकों के वर्गीकरण और विश्लेषण एवं विवेचन के बीच की वस्तु है। कोनर महोदय के विचार से सारणीकरण संकलित समंकों को क्रमानुसार प्रदर्शित करने का ऐसा ढंग है जिसके द्वारा समस्या के अन्तर्गत आने वाली चीजें अधिक स्पष्ट हो जाती हैं। इस प्रकार सारणीकरण का मुख्य उद्देश्य सम्पादित एवं वर्गीकृत सामिग्री को एक ऐसा स्वरूप प्रदान करना है जिससे विश्लेषण करने में आसानी हो और महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले जा सकें।

सारणीकरण के लाभ

(१) सारणी में उन्हीं शीर्षक अथवा अनुशीर्षकों को बार बार दोहराने की आवश्यकता नहीं रह जाती और एक अधिक तर्क शुद्ध एवं पद्धतिपूर्ण ढंग से समंकों का विन्यास किया जा सकता है।

(२) केवल शीर्षकों में संक्षिप्त करके उनके द्वारा एक कठिन एवं विशाल समग्र को सारणी सरल और सुगम संख्यायें बना देती हैं।

(३) सारणीकरण से विश्लेषण, औसत निकालने और सह-सम्बन्ध (Correlation) की जाँच करने में सुविधा होती है।

सारणी के भेद

प्राय: सारणी कई प्रकार से बनाई जाती है और उनका चुनाव समंकों के उद्देश्यों के अनुसार किया जाता है। सर्वसाधारण सारणी (General Purpose Table) में विशाल समंक समूहों का प्रदर्शन उनके लक्षणों को शीर्षकों के रूप में लिख कर किया जाता है। विशिष्ट-उद्देश्य-सारणी (Special Purpose Table) संग्रहीत तथ्यों के विश्लेषण, सह-सम्बन्ध या गुण-सम्बन्ध के दिग्दर्शन के लिये किसी निश्चित उद्देश्य से बनाई जाती है। जहाँ बहुत से असबन्ध तथ्यों को छोड़ना श्रेयस्कर हो इस प्रकार की सारणी एक सारांश सारणी का कार्य करती है।

प्राथमिक सारणी (Primary Table) में प्राथमिक संकलन द्वारा एकत्रित समंकों का प्रयोग किया जाता है और इसका उद्देश्य भावी संदर्भ से लिये सामग्री को एक वर्गीकृत रूप में रखना है।

व्युत्पन्न सारणी (Derivative Table) एक ऐसी सारणी है जिसे संकलित सामग्री पर कुछ प्रयोग कर लेने के बाद बनाया जाता है। उदाहरणार्थ, प्रयोग या औसत निकालने के बाद जो समंक प्राप्त होते हैं, उन्हें यदि एक सारणी के रूप में रख दिया जाय तो वह सारणी व्युत्पन्न समंकों पर आधारित होने के कारण व्युत्पन्न सारणी कहलायेगी। इस प्रकार की सारणी का प्रयोग विशेष रूप से निर्वचन (Interpretation) के लिये किया जाता है। एक साधारण और व्युत्पन्न माला का अन्तर निम्नलिखित तालिका से स्पष्ट हो जाता है।

प्राथमिक सारणी (Primary Table)		व्युत्पन्न सारणी (Derivative Table)	
उम्र (Age)	बारम्बारता (Frequency)	उम्र (Age)	प्रतिशत (Percentage)
२१	२०	२१	१०
२२	३५	२२	१७.५
२३	५०	२३	२५
२४	५५	२४	२७.५
२५	४०	२५	२०

सारणी के अंग

सारणी में निम्नलिखित मुख्य अंग होते हैं—

(१) शीर्षक (Title), (२) अनुशीर्षक (Captions), (३) अनुलेख (Stubs), (४) लकीरें तथा खाली स्थान (Lines and spaces), (५) समंकों का विन्यास (Arrangement of items)

सारणी का शीर्षक ऐसा होना चाहिये कि उसका उद्देश्य पूर्णरूप से स्पष्ट कर दे। शीर्षक सूक्ष्म होना चाहिये क्योंकि लम्बे शीर्षक लोग पढ़ना नहीं चाहते पर संक्षिप्तता के लिये स्पष्टता का बलिदान न किया जाना चाहिये।

सारिणी के अनुशीर्षक (Caption) प्रत्येक स्कम्भ (Column) के ऊपर दिये जाने वाले शीर्षक होते हैं। और इस प्रकार लिखे जाते हैं कि प्रत्येक स्कम्भ में दिखलाये गये समंकों की प्रकृति स्पष्ट हो जाय। यदि समंक किसी एक विशेष माप—एकक (Unit of measurement) के अनुसार लिखे गए हों तो अनुशीर्षक के साथ ही उसे भी लिख दिया जाता है। यदि एक ही माप-एकक पूरी सारिणी में प्रयुक्त हुआ तो उसे सारिणी के ऊपर ही लिख दिया जाता है। यदि विभिन्न स्कम्भों में विभिन्न अनुशीर्षक दिए गए हों तो उन्हें स्कम्भों के प्रारम्भ में लिख देना चाहिए। जैसे, "मजदूरी रुपयों में," "भार पौंड में," "ऊँचाई फुटों में," और "लम्बाई गजों में," ।

अनुलेख (Stub) प्रत्येक बेंड़ी लाइन के विवरण को कहते हैं। प्राय: अनुलेख के स्कम्भ के ऊपर भी उसका अनुशीर्षक दिया जाता है और इस स्कम्भ की चौड़ाई अनुलेख की लम्बाई के ऊपर निर्भर रहती है।

रूल डालना और स्थान छोड़ना भी सारिणी बनाने में विशेष महत्व रखते हैं। क्योंकि इनके द्वारा ही हम सारिणी में आकर्षण ला सकते हैं। इसलिए यदि पहले रूल और रिक्त स्थानों का एक आकर्षक खाका बना लिया जाय और फिर उसमें समंक भरे जाँय तो कदाचित एक अच्छी सारणी बन सकेगी।

सारिणी में समंकों का विन्यास भी एक आवश्यक वस्तु है। शीर्षकों और अनुशीर्षकों के अतिरिक्त समंकों का किसी तर्कशुद्ध पद्धति से बढ़ते हुए (Ascending) या घटते हुए (Descending) प्रकार (Order) से विन्यास करना आवश्यक होता है, क्योंकि किसी कौशलपूर्ण ढंग से विन्यस्त समंक बिखरे हुये समंकों की अपेक्षा अधिक स्पष्ट एवं सुगम होते हैं। जब कुछ स्कम्भों में रखे गये समंकों की तुलना करना अभीष्ट हो तो ऐसे स्कम्भों को पास पास रखना चाहिये। कभी कभी ऐसे तथ्यों को सारिणी में शामिल करना कठिन हो जाता है जिनके बहुत कम समंक हों तो उन्हें एक मिश्रित तथ्य (Miscellaneous) में रखा जा सकता है। सारिणी के भीतर अंकों का वर्णात्मक, दिवसात्मक, भौगोलिक, इत्यादि किसी भी प्रकार से विन्यास किया जा सकता है। यदि कोई अनियमितता हो या विवरण की अपूर्णता हो तो सारिणी के अन्त में एक नोट दिया जा सकता है। जहाँ तक सम्भव हो सारिणी को स्वयं पूर्ण होना चाहिये और

'फुटनोटों' पर निर्भरता अच्छी नहीं । यदि द्वितीयक सामग्री का प्रयोग किया जाये तो संदर्भ और उद्गम देना आवश्यक होता है जिससे अन्वेषक प्रवृत्ति वाले व्यक्ति उसके मूल्यांकन में अपनी बुद्धि एवं शक्ति का पूर्ण प्रयोग कर सकें ।

सारिणी के प्रकार

(१) साधारण सारिणी (Simple Table) एक ऐसी सारिणी है जिसमें विभिन्न समंकों के केवल एक ही लक्षण का विवेचन होता है । इस सारिणी को एकाकी सारिणी या प्रथमक्रम सारिणी भी कहते हैं । निम्नलिखित सारिणी एक ऐसी सारिणी का उदाहरण है, जिसमें किसी बड़े कालेज के विद्यार्थियों की संख्या के सम्बन्ध में सूचना दी गई है । इस सारिणी के द्वारा केवल एक ही प्रश्न का उत्तर मिलता है कि किस विभाग में कितने विद्यार्थी हैं और उनके व्यक्तिगत गुणों के सम्बन्ध में कोई भी धारणा नहीं बनती ।

विभाग	विद्यार्थियों की संख्या
१. वाणिज्य	
२. विज्ञान	
(अ) भौतिक विज्ञान	
(ब) रसायन शास्त्र	
(द) जीव विज्ञान	
३. कला	
(१) अंग्रेजी	
(२) अर्थशास्त्र	
(३) राजनीति	
(४) हिन्दी	
(५) दर्शनशास्त्र	
(६) इतिहास	
(७) भूगोल	
(८) संस्कृत	
४. प्रशिक्षण सिद्धान्त	
५. सन्नियम	
योग	

(२) द्विघात सारणी (Double Table) में एक ही प्रकार के समंकों के किन्हीं दो गुणों का वर्णन होता है जैसे निम्नलिखित सारणी के द्वारा हम विद्यार्थियों की विभागानुसार संख्या जानने के अतिरिक्त यह भी जान सकते हैं कि उनमें से प्रति विभाग कितने पुरुष और कितनी महिलायें हैं।

विभाग	विद्यार्थियों की संख्या		योग
	पुरुष	महिलाएं	
१. वाणिज्य			
२. विज्ञान			
३. कला			
४. प्रशिक्षण शास्त्र			
५. सन्नियम			
योग			

(३) त्रिघात सारणी (Treble Table) में उसी संभाग के तीन गुणों का विवरण होता है जैसे हम निम्न सारणी से विद्यार्थी समुदाय के सम्बन्ध में तीन बातें जान सकते हैं—(अ) विभिन्न विभागों में पढ़ने वाले विद्यार्थियों की संख्या, (ब) विद्यार्थियों की प्रकृति, (स) विद्यार्थियों के रहने का स्थान।

विभाग	विद्यार्थियों की संख्या				योग
	पुरुष		महिलाएं		
	क्षात्रावासी	शहरी	क्षात्रावासी	शहरी	
१. वाणिज्य					
२. विज्ञान					
३. कला					
४. प्रशिक्षण शास्त्र					
५. सन्नियम					
योग					

(४) बहुगुणी सारणी (Manifold Table) ऐसी सारणी को कहते हैं जो किसी एक संभाग को ३ से अधिक गुणों में विभाजित करती हो, जैसे निम्नलिखित सारणी चार बातें बतलाती है:— (अ) विद्यार्थियों की विभागों के अनुसार संख्या, (ब) उनकी प्रकृति, (स) निवास-स्थान और (द) उम्र।

विभाग	उम्र-संभाग	विद्यार्थियों की संख्या				योग
		पुरुष		महिलाएं		
		क्षात्रावासी	शहरी	क्षात्रावासी	शहरी	
१. वाणिज्य	१०–२० २०–३० ३०–४० ४०–५०					
योग						
२. विज्ञान	१०–२० २०–३० ३०–४० ४०–५०					
योग						
३. कला	१०–२० २०–३० ३०–४० ४०–५०					
योग						
कुल योग						

सारिणीकरण के नियम

सारिणी पूर्ण एवं स्पष्ट होना चाहिये और प्रत्येक सूचना के लिये निश्चित स्कम्भ होना चाहिये। यदि अधिक स्कम्भों की आवश्यकता पड़े तो संकलनकर्त्ता अपनी विवेक बुद्धि से उन्हें बढ़ा सकता है, परन्तु ऐसा करने में इस बात का ख्याल रखना चाहिये कि समंकों का जितना विवेचनात्मक संभाजन होगा उतने ही अच्छे निष्कर्ष निकाले जा सकेंगे।

(२) सारिणी इस प्रकार की बनाई जानी चाहिए कि उन्हें देखते ही सूचनायें शीघ्र समझ में आ जायें। सारिणी तर्कशुद्ध होनी चाहिए और उसमें ऐसे ही तथ्यों का समावेश करना चाहिए जो आपस में सम्बन्धित हों चाहे वे सम या विषम समग्र से प्राप्त किए गए हों। ऐसी सारिणी जो कठिन एवं विशाल हो, उसे कई भागों में विभाजित कर देना चाहिए और विभिन्न समंकों की तुलना करने की दृष्टि से कई व्युत्पन्न सारिणी बना लेनी चाहिए।

(३) शीर्षक, अनुशीर्षक एवं अनुलेखों को इस प्रकार सजाना चाहिए कि उनके साधारण एवं विशिष्ट गुण तथा उद्देश्य स्पष्ट हो सकें।

(४) सारिणी का शीर्षक छोटा, स्पष्ट एवं असंदिग्ध होना चाहिए।

(५) जिसमें प्राथमिक और व्युत्पन्न समंक (प्रतिशत, औसत, योग, इत्यादि) साथ साथ दिए गए हों, ऐसी सारिणी में उन्हें पास पास रखना चाहिए, जिससे उनका अर्थ शीघ्रता से समझ में आ सके और उनकी तुलना भी की जा सके।

(६) स्कंभों और अनुलेखों का सम्बन्ध योग्य संभाजन द्वारा स्पष्ट कर देना चाहिए।

(७) बहुगुणी सारिणी में अनुलेखों और स्कंभों की क्रम संख्यायें दे देनी चाहिए जिससे वे ठीक समझ में आ सकें और जहां तक हो सके बेकार स्थान न छोड़ा जाय। कोई भी सारिणी इतनी बड़ी न होनी चाहिए कि उसे एक ही बार में न देखा जा सके।

(८) यदि सारिणी को पूर्ण बनाने के लिए आवश्यक सूचनाओं में से कुछ गायब हों तो इस सम्बन्ध में सारिणी के अन्त में एक नोट दे देना चाहिए।

(९) यदि सारिणी में द्वितीयक समंकों का उपयोग किया गया हो तो ऐसे अंकों का उद्गम स्थान का संदर्भ दे देना चाहिए जिससे उसे पढ़ने वाला समंकों की उपयोगिता के सम्बन्ध में धारणायें बना सके।

(१०) सारिणी में विभिन्न प्रकार की मोटी व पतली रेखाओं का प्रयोग इसलिए करना चाहिए कि उसके उपयोग करने वालों को उसका प्रयोजन भली प्रकार समझने में सुविधा हो।

(११) स्कंभों और अनुशीर्षकों के एककों की स्पष्ट रूप से परिभाषा करनी चाहिए और उन्हें स्कंभों के प्रारम्भ में दिखलाना चाहिए।

(१२) बहुधा देखा जाता है कि पूर्व-निश्चित विभागों में सभी समंक नहीं रखे जा सकते। इस कारण एक "मिश्रित" स्कंभ का भी आयोजन करना चाहिए।

(१३) जहां तक हो सके इस प्रकार का प्रयत्न करना चाहिए कि इकाई के नीचे इकाई, दहाई के नीचे दहाई, और सैकड़े के नीचे सैकड़े के अंक लिखे जाँय।

(१४) यदि बहुत बड़े और कठिन अंक हों तो उन्हें लाख या हजार तक पूर्णांक बना लेना चाहिए। इससे तुलना करने में आसानी होती है।

(१५) यदि किसी विशिष्ट स्कंभ या अंक पर जोर देना अभीष्ट हो तो विभिन्न चिन्हों का प्रयोग किया जा सकता है, कभी कभी अधिक स्थान छोड़ कर, मोटा लिखकर या लाल स्याही के प्रयोग द्वारा अंकों को महत्व दिया जाता है।

बारम्बारता सारिणी

जब विच्छिन्न (Discrete) या अविच्छिन्न (Continuous) समंक मालाओं (Series) को सारिणी के रूप में रख दिया जाता है तो ऐसी सारिणी को चल समंकों की बारम्बारता–सारिणी या आवृत्ति–सारिणी (Frequency Table of Variables) कहते हैं। चल समंक ऐसी कोई एक माला है जिसमें विचलन करने वाली संख्याओं अथवा उन परिसीमाओं का प्रयोग किया जाता है जिनके भीतर वे विचलन करें। बारम्बारता या आवृत्ति सारिणी तीन प्रकार की हो सकती है:— (अ) समंक–विन्यास, (Array) या विच्छिन्न सारिणी, (ब) अविच्छिन्न–सारिणी और (स) संचयी आवृत्ति-सारिणी (Cumulative Frequency Table)।

किसी भी समग्र में सम्मिलित समंकों के द्वारा एक आवृत्ति-सारणी आसानी से बनाई जा सकती है। उदाहरणार्थ, किसी कक्षा के तीस विद्यार्थियों के अर्थशास्त्र में क्रमशः निम्नलिखित नम्बर आये हैं—२०, १५, १६, १८, २५, ३०, ४५, २७, १५, २९, ३५, ४२, ४५, १७, १५, २०, २५, २६, २९, ३५, ३६, ३७, ४१, ४२, ४४, ४६, ४०, ३५, १५। यदि इन समंकों को निम्नलिखित रूप में लिख दिया जाय तो उसे विच्छिन्न-आवृत्ति-सारणी (Discrete frequency table) कहेंगे।

आकार (Size)	आवृत्ति (Freq.)	आकार (Size)	आवृत्ति (Freq.)	आकार (Size)	आवृत्ति (Freq.)
१५	४	२७	१	४०	१
१६	१	२९	३	४१	१
१७	१	३०	१	४२	२
१८	१	३५	३	४४	१
२०	२	३६	१	४५	२
२५	२	३७	१	४६	१
२६	१				

उपरोक्त विवरण से अविच्छिन्न-आवृत्ति-सारणी (Continuous frequency table) बनाया जा सकता है। नीचे अविच्छिन्न-आवृत्ति-सारणी बनाने की अपवर्जी (Exclusive) एवं समावेशिक (Inclusive) रीतियाँ समझाई गई हैं।

अपवर्जी रीति (Exclusive Method)

आकृति (SIZE)	बारम्बार आने की संख्या (NO. OF OCCURRENCES)	आवृत्ति (FREQ.)
१५ – २०	~~IIII~~ II	७
२० – २५	II	२
२५ – ३०	~~IIII~~ II	७
३० – ३५	I	१
३५ – ४०	~~IIII~~	५
४० – ४५	~~IIII~~	५
४५ – ५०	III	३

समावेशिक रीति (Inclusive Method)

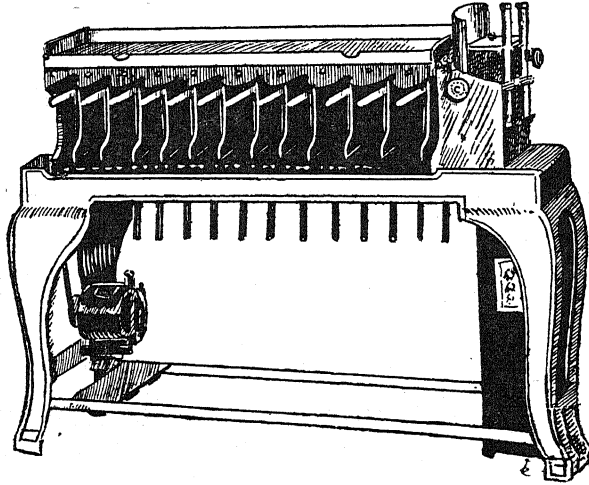
आकृति (SIZE)	बारम्बार आनेकी संख्या (NO OF OCCURRENCES)	आवृत्ति (FREQ.)
१५–१९	~~IIII~~ II	७
२०–२४	II	२
२५–२९	~~IIII~~ II	७
३०–३४	I	१
३५–३९	~~IIII~~	५
४०–४४	~~IIII~~	५
४५–४९	III	३

इस प्रकार प्राप्त की गई आवृत्ति-सारणी को हम संचयी-आवृत्ति-सारणी (Cumulative frequency table) में भी परिवर्तित कर सकते हैं।

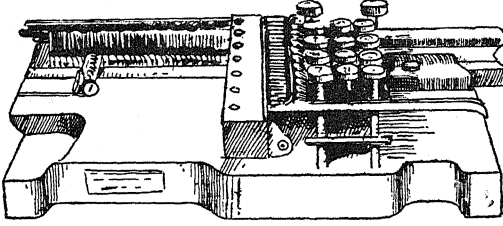
सारणी (अ)			सारणी (ब)		
आकार (Size)	आवृत्ति (Freq.)	संचयी आवृत्ति (Cum. Freq.)	आकार (Size)	आवृत्ति (Freq.)	संचयी आवृत्ति (Cum. Freq.)
१५–२०	७	७	१५–१९	७	७
२०–२५	२	९	२०–२४	२	९
२५–३०	७	१६	२५–२९	७	१६
३०–३५	१	१७	३०–३४	१	१७
३५–४०	५	२२	३५–३९	५	२२
४०–४५	५	२७	४०–४४	५	२७
४५–५०	३	३०	४५–४९	३	३०

इस प्रकार हम देखते हैं कि संचयी-आवृत्ति सारणी में अगले संभाग की बारम्बारता के साथ पिछले संभाग की बारम्बारता क्रमशः जोड़ते चले जाते हैं और अन्तिम संचयी-आवृत्ति सब संभागों की बारम्बारता के सम्पूर्ण योग के बराबर होती है।

सारिणीकरण के यांत्रिक ढंग

सारिणीकरण का कार्य यंत्रों के द्वारा भी किया जा सकता है। यन्त्र रहित सारिणीकरण में अनुसूचियों (Schedules) को हाथ से ही छाँट कर उन्हें समुचित वर्गों म रखा जाता है। प्राप्त अनुसूचियों को निश्चित चिन्हों की सहायता से छाँट लेने के बाद समंकों को भौगोलिक, गुणात्मक या अंकात्मक वर्गों में रख कर उनसे एक प्रमुख सारिणी बनाई जाती है। इस प्रमुख सारिणी से विभिन्न उद्देश्यों की पूर्ति के लिये अनेक सारिणी बनाई जा सकती हैं।

Sorting Machine

याँत्रिक सारिणीकरण में अनुसूचियों को छांटने का कार्य मशीन के द्वारा किया जाता है। इस पद्धति का प्रयोग विदेशों में जनगणना के लिये कार्डों को स्त्री-पुरुष, बेकार-नौकर, साक्षर-निरक्षर, इत्यादि गुणों के अनुसार छांटने के निमित्त किया जाता ह। भारतीय जनगणना में भी सन् १९४१ में इस प्रकार का एक प्रयत्न किया गया था। यंत्रों के प्रयोग के लिये यह आवश्यक होता है कि जनगणना कार्डों के ऊपर की जाय। कार्ड में विभिन्न गुणों के लिये चिन्ह बने रहते हैं जिनके ऊपर एक छेद करने वाली मशीन के द्वारा प्रगणक छेद बना देते हैं। सभी कार्डों को अन्त में एकत्रित करके छांटने

वाली मशीन में डाल दिया जाता है जिसमें लगी हुई सुई उन कार्डों को विभिन्न गुणों के अनुसार अलग अलग खानों में फेंकती है।

Punching Machine

इस प्रकार कार्डों के छँट जाने के बाद उन्हें सारिणीकरण यंत्र में लगा दिया जाता है जो समान अंकों को शीघ्रतापूर्वक जोड़ कर एक कागज के फ़ीते पर छापती जाती है। इन यंत्रों का प्रयोग भारतवर्ष में अभी नहीं के बराबार हैं।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. What precautions would you take in tabulating your data.

अपनी संग्रहीत सामग्री को सारिणी में परिवर्तित करते समय आप किन बातों का ध्यान रखेंगे।

(B. Com., Agra, 1937)

2. Explain the purpose and Methods of Classification of data. How are the machine tabulating cards prepared and used.

सामग्री के वर्गीकरण का उद्देश्य और ढंग समझाइये। याँत्रिक सारणीयन कार्ड किस प्रकार बनाए और प्रयोग किये जाते हैं।

(B. Com., Agra, 1943)

3. Dicuss the function and importance of tabulation in a scheme of investigation. Prepare blank table to show distribution of the students of a college according to age, class and residence for arranging (a) Physical training and (b) Tutorial classes.

किसी भी अनुसंधान की योजना में सारणीकरण के कार्य और महत्व समझाइये। (अ) शारीरिक शिक्षा और (ब) शिक्षण वर्ग, की व्यवस्था करने के लिए किसी भी एक कालेज के विद्यार्थियों की आयु, कक्षा और निवास स्थान बतलाते हुए एक निरंक सारणी बनाइये।

(B. Com., Agra, 1942)

4. Rearrange the following blank table to make it more intelligible.

निम्न निरंक सारणी को अधिक स्पष्ट करने के हेतु पुर्नविन्यस्थ कीजिए।

Sex	Brahmin		Rajput		Kayastha		Harijan
	Literate	Illiterate	Literate	Illiterate	Literate	Illiterate	
Male							
Female							

5. "In collection and tabulation common sense is the chief requisite and experience the chief teacher" Discuss.

What precautions in your opinion are necessary to avoid Statistical errors in the collection and computation of economic data.

"संकलन और सारणीयन में सामान्य मतित्र की प्रमुख आवश्यकता है और अनुभव प्रमुख शिक्षक हैं।" समझाइये।

आपकी राय में आर्थिक तथ्यों के संकलन और परिगणन में क्या बातें ध्यान में रखना चाहिए जिससे सांख्यिकीय विभ्रमों की प्रविष्टि न हो सके।

(M. A., Agra, 1940)

अध्याय ८.

सांख्यिकीय माध्य

(Statistical Averages)

सांख्यिकी में माध्य का एक मूलभूत महत्व है और उसके ऊपर ही इस शास्त्र के प्रायः सभी विश्लेषण, विवेचन एवं निर्वचन के ढंग आधारित हैं। यदि हम किसी भी एक विशाल समग्र का महत्व एक सरल रूप में समझना चाहते हैं तो हमें ऐसी रीति अपनाना चाहिये जिसमें समग्र के प्रायः सभी महत्वशाली लक्षणों का ध्यान रखा जाय। यदि समग्र के महत्व रहित अंकों को छोड़ दिया जाय तो उससे समग्र के स्वरूप में बहुत ही साधारण सा परिवर्तन होता है। प्रत्येक मनुष्य की यह प्रकृति होती है कि वह विशाल और विपुल अंकों को देख कर ही घबड़ा जाता है और इसलिये वह एक ऐसे सूक्ष्म स्वरूप की खोज में रहता है जिसके द्वारा उन अंकों का आशय आसानी से समझा जा सके। किसी भी ऐसे सूक्ष्म समंक में एक विशेषता होती है कि वह सम्पूर्ण समग्र का प्रतिनिधित्व कर सके। यह कार्य सांख्यिकीय माध्य पूरा करते हैं। सांख्यिकीय माध्य किसी भी समग्र की प्रतिनिधित्व करने वाली एक महत्वपूर्ण संख्या है जो उसके अंतर्गत आने वाले समंकों के लक्षणों का एक सूक्ष्म विवरण प्रदान करती है। यह संख्या समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति को दिग्दर्शित करती है और इसके चारों ओर समग्र के अंक विचलन करते हैं।

माध्य के उद्देश्य एवं उपयोग

(१) यह सम्पूर्ण समग्र का एक सूक्ष्म चित्र प्रस्तुत करते हैं जिसे देख कर एक साधारण व्यक्ति समग्र का आशय आसानी से समझ जाता है अर्थात् इसके द्वारा कठिन और विपुल अंक सुगम हो जाते हैं।

(२) इनके द्वारा विभिन्न समग्रों अथवा वर्गों की तुलना आसानी से की जा सकती हैं जबकि उनमें आपस में अन्तर हो। केन्द्रीय प्रवृत्ति की तुलना विभिन्न समंकों की तुलना की अपेक्षा अधिक आसान है।

(३) इसके द्वारा केवल न्यादर्शों (Samples) की परीक्षा करके समग्र के सम्बन्ध में जानकारी प्राप्त की जा सकती है। हम पिछले अध्याय में देख चुके हैं कि विपुल अंकों वाले समग्र को दैव प्रवरण (Random sample) के प्रयोग से एक छोटे और सरल प्रतिनिधि न्यादर्श में संकुचित किया जा सकता है और सम्भावना के नियम के अनुसार न्यादर्श में समग्र के प्रायः सभी लक्षणों का चित्रण होगा। इस न्यादर्श का माध्य निकाल कर हम समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति को जान सकते हैं क्योंकि अभिनति शून्य न्यादर्श समग्र का एक छोटा परन्तु यथार्थ चित्र होता है।

(४) जब किसी दो या अधिक समंकमालाओं के बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध को वास्तविक स्वरूप देना अभीष्ट हो तो माध्य का प्रयोग अनिवार्य हो जाता है। इस प्रकार ऊँचाई, भार, आयु इत्यदि के सम्बन्ध को जानने के लिये हम उनके माध्यों का अनुपात मालूम करते हैं।

किसी भी सन्तोषजनक माध्य में निम्नलिखित गुण होना आवश्यक है:—

(१) माध्य पूर्णरूपेण स्पष्ट होना चाहिये और ऐसा न हो कि उसे देख कर निरीक्षक को अनुमान लगाने पड़ें। यदि ऐसी अवश्यकता होती है तो अनुमानित माध्य निरीक्षक के व्यक्तिगत झुकाव और विद्वता का केवल एक प्रतिबिम्ब मात्र रह जाता और उनके प्रतिनिधिक गुण नष्ट हो जाते हैं।

(२) जहाँ तक सम्भव हो माध्य समंकमाला के समस्त अंकों पर आधारित होनी चाहिये। यदि सभी अंकों पर माध्य आधारित न होगा तो वह उस समंकमाला के समस्त लक्षणों का विवरण देने वाला प्रतिनिध न होगा।

(३) माध्य गणित के नियमों के अनुकूल परन्तु एक अस्पष्ट संख्या न होनी चाहिये जो शीघ्रता व सरलता से समझी न जा सके।

(४) माध्य ऐसा होना चाहिए जिसे शीघ्रता और सरलता से निकाला जा सके परन्तु हिसाब लगाने की सरलता को इतना महत्व न देना चाहिए जिससे अन्य महत्वशाली गुणों की अवहेलना हो जाय।

(५) माध्य पर निदर्शन के उच्चावचन (Fluctuations of Sampling) का कम से कम प्रभाव होना चाहिए। निदर्शन या प्रवरण करते समय एक ही समग्र से ऐसी रीति के अनुसार अंकों का चयन करना चाहिए

कि प्राप्त किये गए न्यादर्शों के माध्यों में विशेष अन्तर न हो। यदि दो या अधिक न्यादर्शों के माध्यों में से कुछ ऐसे हों जिनसे समंकमाला के अंक बहुत अधिक विचलन करते हों तो केवल ऐसे ही माध्य को प्रतिनिधि मानना चाहिए जो अपेक्षाकृत अधिक स्थिर हों ।

(६) माध्य ऐसी संख्या होनी चाहिये जिस पर गणित और बीजगणित के प्रयोग आसानी से किये जा सकें ।

माध्यों के प्रकार

माध्य पाँच प्रकार के होते हैं–(१) भूयिष्ठक (Mode), (२) मध्यका (Median), (३) मध्यक (Mean), (४) गुणोत्तर माध्य (Geometric Average), (५) हरात्मक माध्य (Harmonic Average) । यह सभी माध्य "एकघातीय माध्य (Averages of the First order)" कहलाते हैं। एकघातीय माध्य वे माध्य हैं जिन्हें प्राथमिक समंकों के आधार पर निकाला जाता है। यदि समंकमाला के दिये हुए समंकों का प्रयोग न करके माध्य निकालने में उन समंकों से व्युत्पन्न समंकों का प्रयोग किया जाये तो ऐसे माध्यों को "द्विघातीय माध्य" (Averages of the Second order) कहते हैं ।

भूयिष्ठक (Mode)

भूयिष्ठक ऐसे अंक की आकृति (Size) को कहते हैं, जिसके समंकमाला में सर्वाधिक उदाहरण पाये जाँय, अथवा जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक हो। विभिन्न लेखकों ने इसकी विभिन्न प्रकार से परिभाषायें की हैं। यदि किसी ने इसे "अंकों में सर्वाधिक आवृत्ति वाली आकृति" कहा तो अन्य किसी ने इसे "सर्वाधिक अंकों के जमाव वाली संख्या (Size of highest concentration) माना है । इसी प्रकार कुछ व्यक्तियों के अनुसार भूयिष्ठक "सर्वाधिक पीन-मूल्य (Thickest value) या "सर्वाधिक अंकों से प्रव्यक्त (Manifested) एक अकेली संख्या" के रूप में समझा जा सकता है। इन सभी परिभाषाओं का एक ही आकृति की ओर संकेत है जिसकी समग्र में सबसे अधिक अभ्यावृत्ति (Repetition) होती हो । प्रायः यह देखा गया है कि समग्र में कोई विशिष्ट आकृति ऐसी अवश्य होती है जो बार बार सामने आती है और उसकी बारम्बारता इतनी महत्वशाली होती है कि यदि उसी समग्र (Universe) से अनेक न्यादर्श (Sample) लिये

जाँय तो उन सभी में वही संख्या सर्वोत्तम महत्व की मालूम पड़ेगी । इस संख्या को ही भूयिष्ठक कहते हैं ।

विच्छिन्न माला में भूयिष्ठक का प्रदर्शन

किसी भी ऐसी समंकमाला में भूयिष्ठक मालूम करना आसान है जिसमें केवल निरीक्षण मात्र से ही हम यह जान सकें कि किस विशिष्ट संख्या की आवृत्ति सबसे अधिक है । कभी कभी ऐसी समंकमालायें होती हैं जिनमें अंकों का जमाव कई स्थानों पर एक सा होता है, अर्थात् कई आकृतियों को बराबर आवृत्ति होती है । ऐसी दशा में भूयिष्ठक जानने के लिए समूह बनाने पड़ते हैं और इस विधि को वर्ग-बन्धन (Grouping) कहते हैं ।

उदाहरण १—भूयिष्ठक प्रर्दशन

अंकों की आकृति (Size)	आवृत्ति	(आवृत्ति Frequency)				
		१	२	३	४	५
१५	२०	} २५		} २९		
१६	५		} ९		} २९	
१७	४	} २४				} ३४
१८	२०		} ३०	} ५०		
१९	१०	} ३०			} ४५	
२०	२०		} ३५			} ३९
२१	१५	} १९		} ३९		
२२	४		} २४			
२३	२०					

उपरोक्त सारिणी को देखते ही हमें यह मालूम पड़ता है कि इस समंकमाला में चार भूयिष्ठक हैं क्योंकि चार आकृतिओं की बारम्बारता सर्वाधिक होते हुये भी आपस में बराबर हैं । ऐसी स्थिति में हमें वर्ग-बन्धन

रीति के द्वारा यह मालूम करना आवश्यक हो जाता है कि इन चारों आकृतियों में किस आकृति के पास अंकों का जमाव अपेक्षाकृत अधिक है। उपरोक्त वर्ग-बन्धन में पहले दो स्कंभों नम्बर १ और २ में द्विपद-बन्धन (Grouping in Twos) और बाद के तीन स्कंभों में त्रिपद-बन्धन (Grouping in Threes) किया गया है। दूसरे बार द्विपद-बन्धन में ऊपर की एक आवृत्ति छोड़ दी जाती है जिससे सभी आवृत्तिओं का पद-बन्धन हो सके और यही त्रिपद-बन्धन में भी किया जाता है जिसमें पहली बार एक और दूसरी बार दो आवृत्तियाँ छोड़ दी जाती हैं। इसी प्रकार आगे भी वर्ग-बन्धन किया जा सकता है परन्तु त्रिपद वर्ग-बन्धन में ही सही हल प्राप्त हो जाता है। वर्ग-बन्धन कर लेने के पश्चात् हम एक विश्लेषण सारिणी बनाते हैं।

विश्लेषण सारिणी (Analysis Table)

स्कम्भ क्रम	१	२	३	४	५	
(१)		१९	२०			
(२)			२०	२१		
(३)	१८	१९	२०			
(४)		१९	२०	२१		
(५)			२०	२१	२२	
अभ्यावृत्ति	१	३	५	३	१	

उपरोक्त विश्लेषण सारिणी से इस हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि समंक-माला को देखने से यद्यपि चार भूयिष्ठक मालम होते हैं परन्तु वास्तव में सबसे अधिक अभ्यावृत्ति वाला केवल एक ही अंक है जिसकी आकृति २० है।

अविच्छिन्न माला में भूयिष्ठक प्रदर्शन

जैसा हम पिछले अध्याय में देख चुके हैं किसी भी विच्छिन्न माला को एक अविच्छिन्न माला में परिवर्तित किया जा सकता है। यदि किसी अविच्छिन्न

माला में भूयिष्ठक जानना अभीष्ट हो तो वर्ग-बन्धन के द्वारा अथवा केवल दृष्टि निक्षेप (Inspection) से हम यह जान सकते हैं कि भूयिष्ठक आकृति किस संभाग में होगी और तत्पश्चात् उसका अनुमान लगाना पड़ेगा।

उदाहरण २– भूयिष्ठक प्रदर्शन

	अंकों की आकृति (आ) (Size) (S)		आकृति की बारम्बारता (ब) (Frequency) (f)
	१७—१९		११
	१९—२१		३४ बा$_1$
(सी$_1$)	२१—२३	(सी$_2$)	४२ (बा)
	२३—२५		१५ बा$_2$

उपरोक्त सारिणी में सर्वाधिक बारम्बारता या आवृत्ति ४२ है, जिससे हमें यह पता चलता है कि इस बारम्बारता वाली आकृत्ति २१–२३ परिसीमाओं वाले संभाग में होगी। इस संभाग को भूयिष्ठ संभाग (Modal Group) कहते हैं। और इसकी परिसीमाओं को सी$_1$ (L_1) और सी$_2$ (L_2) कहते हैं। भूयिष्ठ संभाग की आवृत्ति को बा (f), उसके ऊपर वाले संभाग की आवृत्ति को बा$_1$ (f_1) और उसके नीचे वाले संभाग की आवृत्ति को बा$_2$ (f_2) कहते हैं।

वर्ग–बन्धन या साधारण निरीक्षण से भूयिष्ठ संभाग मालम कर लेने के पश्चात् निम्नलिखित सूत्रों (Formulae) की सहायता से भूयिष्ठक की आकृति मालूम की जाती है।

(A) $$\text{Mode} = L_1 + \frac{f_2}{f_1 + f_2}(\quad - L_1)$$

$$\text{भू} = \text{सी}_1 + \frac{\text{बा}_2}{\text{बा}_1 + \text{बा}_2}(\text{सी}_2 - \text{सी}_1)$$

$$= २१ + \frac{१५}{३४+१५}(२३ - २१)$$

$$= २१ + \frac{३०}{४९} = २१.६$$

(B) $$\text{Mode} = L_1 + \frac{f - f_1}{(2f - f_1 - f_2)}(L_2 - L_1)$$

$$\text{भू} = \text{सी}_1 + \frac{\text{बा} - \text{बा}_1}{(\text{२ बा} - \text{बा}_1 - \text{बा}_2)}(\text{सी}_2 - \text{सी}_1)$$

$$\text{भू} = \text{२१} + \frac{\text{४२} - \text{३४}}{(\text{८४} - \text{३४} - \text{१५})}\ \text{२}$$

$$= \text{२१} + \frac{\text{८}}{\text{३५}} \times \text{२}$$

$$= \text{२१.४}$$

उपरोक्त सूत्रों के प्रयोग से हम देखते हैं कि उत्तरों में अन्तर पाया जाता है। इसका कारण यह है कि दोनों ही सूत्रों के आधार भिन्न हैं। पहला सूत्र तो भूयिष्ठ संभाग के ऊपर और नीचे वाले संभागों की आवृत्तियों पर आधारित है और दूसरा सूत्र आवृत्तियों के परस्पर अन्तर पर। दोनों सूत्रों का प्रयोग ठीक माना गया है।

बहु-भूयिष्ठ वर्ग (Multi-Modal Groups)

कभी–कभी कई आकृत्तियों की बराबर आवृत्ति (Frequency) होती ह और भूयिष्ठक मालूम करना कठिन होता है। जब किसी भी समंकमाला में दो भूयिष्ठक हों तो उसे द्विभूयिष्ठ माला (Bi-modal series), तीन भूयिष्ठक होने पर उसे त्रिभूयिष्ठ माला (Tri-modal series) और अधिक होने पर उसे बहु-भूयिष्ठ माला (Multi-modal) कहते हैं। वर्ग-वन्धन रीति के प्रयोग से कभी-कभी भूयिष्ठक मालूम किया जा सकता है, परन्तु बहु-भूयिष्ठ माला में भूयिष्ठक को छोड़ कर कोई अन्य माध्य ही केन्द्रीय-प्रवृत्ति का उचित दिग्दर्शन करा सकता है।

भूयिष्ठक के लक्षण (Characteristics)

(१) भूयिष्ठक पर किसी भी समंक माला के निम्नतम और उच्चतम अंकों का कोई भी प्रभाव नहीं पड़ता।

(२) भूयिष्ठक मालूम करने में आकृति से बारम्बारता अधिक महत्वशाली होती है और यह आवश्यक नहीं कि सर्वाधिक बारम्बारता उसी आवृति की हो जो समंक माला में सबसे बड़ी है। इस प्रकार सबसे छोटी

आकृति भी भूयिष्ठक हो सकती है, यदि उसकी आवृत्ति (Frequency) सबसे अधिक हो।

(३) किसी भी कठिन समंकमाला में जब एक से अधिक भूयिष्ठक हों तो उनका निकालना दुष्कर कार्य होता है।

भूयिष्ठक के गुण

(१) प्रायः केवल निरीक्षण द्वारा ही भूयिष्ठक मालूम किया जा सकता है और यथार्थ भूयिष्ठक मालूम करने में किसी कठिन क्रिया की आवश्यकता नहीं पड़ती।

(२) भूयिष्ठक पर समंक माला के अंकों के विचलन का कोई भी प्रभाव नहीं पड़ता अर्थात् आकृति की विषमता से भूयिष्ठक नहीं जाना जाता वरन् बारम्बारता की अधिकता से उसका निर्णय किया जा सकता है।

(३) अंकों के अत्यधिक जमाव वाली संख्या होने के कारण साधारण बुद्धि का व्यक्ति भी इसके द्वारा समग्र के लक्षणों को अधिक आसानी से समझ सकता है।

(४) केवल न्यादर्श लेकर ही किसी भी समग्र का भूयिष्ठक जाना जा सकता है, यदि अंकों के छाँटने में दैव प्रवरण का प्रयोग किया गया हो। इसका कारण यह है कि वही आकृति जिसकी अभ्यावृत्ति (Repetition) किसी भी समग्र में सबसे अधिक हो एक अभिनति शून्य न्यादर्श में भी भूयिष्ठक होगी।

(५) सबसे अधिक बार आने वाली संख्या होने के कारण किसी भी समग्र से लिये गये प्रत्येक न्यादर्श में एक ही भूयिष्ठक पाया जायगा और इसकी अपेक्षा अन्य किसी भी माध्य में यह गुण नहीं पाया जाता।

(६) इसे हम बिन्दुरेखीय पद्धति (Graphical Method) से भी मालूम कर सकते हैं।

भूयिष्ठक के दोष

(१) किसी भी गणित के समीकार या सूत्र की सहायता से इसका ठीक पता नहीं लगाया जा सकता।

(२) यदि इसका और भी गणित सम्बन्धी विश्लेषण करना आवश्यक हो तो उसमें भी सफलता नहीं मिलती।

(३) यदि किसी समंकमाला में बहुत से भूयिष्ठक हों तो उस समय इसका महत्व नष्ट हो जाता है और समंकमाला की केन्द्रीय प्रवृत्ति समझने के लिये हमें किसी अन्य माध्य का सहारा लेना पड़ता है।

(४) यदि किसी भी समंकमाला की उच्चतम और निम्नतम आकृतियों को या उनके परस्पर विचलन को महत्व देना आवश्यक हो तो भूयिष्ठक से काम नहीं चलता।

(५) भूयिष्ठक और आकृतियों के कुल योग का गुणा करने पर हमें समंकमाला की समस्त आकृतियों का योग नहीं मालूम हो पाता जैसे कि मध्यक (Mean) के द्वारा सम्भव है।

भूयिष्ठक के व्यवसायिक प्रयोग

(१) व्यवसायिक क्षेत्र में समंकों का एक विशिष्ट स्थान है और इस कारण किसी ऐसे समंक का स्थायी महत्व होगा ही जो सबसे अधिक बार दृष्टिगोचर हो। भूयिष्ठक सबसे अधिक आवृत्ति वाली संख्या होने के कारण अन्य माध्यों की तुलना में किसी भी समग्र के लक्षण एवं केन्द्रीय प्रवृत्ति को अधिक स्पष्ट करता है। यदि बहुत सी मशीनें एक ही काम में लगी हों तो ऐसा पाया जा सकता है कि कई मशीनें बराबर उत्पादन करती हों। ऐसी दशा में भूयिष्ठ उत्पादन प्रति मशीन निश्चित किया जा सकता है। इसी प्रकार भूयिष्ठ समय के पूर्व निर्णय से कन्ट्रैक्ट करने में आसानी होती है। व्यापार पर धनवातिक (Meterological) भविष्यवाणी से बड़ी सहायता मिलती है और ऐसी भविष्यवाणी भूयिष्ठ अनुमानों पर आधारित होती है।

मध्यका (Median)

यदि किसी समंकमाला के सभी समंकों का किसी उन्नतोन्मुख (Ascending) या अधोमुख (Descending) क्रम के अनुसार विन्यास (Arrange) किया जाय तो मध्यस्थ अंक की आकृति को मध्यका कहते हैं। दूसरे शब्दों में मध्यका एक ऐसी आकृति है जो समंकमाला दो बराबर भागों में विभाजित करती है। इसीलिये इसे संभाजन विवरण (Partition Expression) भी कहते हैं।

उदाहरण १—मध्यका प्रदर्शन

क्रमांक	आकृति	क्रमांक	आकृति	क्रमांक	आकृति
१	१००	६	८०	११	५०
२	१००	७	७५	१२	५०
३	९०	८	७०	१३	४५
४	९०	९	६०	१४	४०
५	९०	१०	५०	१५	३५

(१) यहाँ कुल समंकों की संख्या विषम है, इसलिये निम्नलिखित सूत्र के अनुसार हम मध्यस्थ अंक मालूम कर सकते हैं, यदि कुल संख्या को यो (N) माना जाय—

$$\text{Median Item} = \left\{ \frac{N+1}{2} \right\}$$

$$\text{मध्यस्थ अंक} = \left\{ \frac{\text{यो}+१}{२} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{१५+१}{२} \right\} = ८$$

मध्यका = ८ वें अंक की आकृति = ७०

(२) यदि कुल समंकों की संख्या सम हो तो मध्यस्थ अंक मालूम करने के लिये निम्नलिखित सूत्र होगा—

$$\text{Median Item} = \frac{\frac{(N)}{2} + \frac{(N+1)}{2}}{2}$$

$$\text{मध्यस्थ अंक} = \frac{\frac{(\text{यो})}{२} + \frac{(\text{यो}+१)}{२}}{२}$$

$$= \frac{\frac{(१६)}{२} + \frac{(१६+१)}{२}}{२}$$

$$\text{मध्यका} = \frac{\frac{(१६)}{२}\text{ की आकृति} + \frac{(१६+१)}{२}\text{ की आकृति}}{२}$$

$$= \frac{७०+६०}{२} = ६५$$

उदाहरण २—मध्यका प्रदर्शन

आकृति S (आ)	आवृत्ति F (बा)	संचयी आवृत्ति CF (सं)
१५	४	४
१६	६	१०
१७	१०	२०
१८	२	२२
१९	९	३१
२०	३	३४
२१	५	३९
२२	७	४६
२३	२	४८
२४	३	५१
२५	१	५२
२६	१	५३

$$\text{Median Item} = \frac{(N+1)}{2} = \frac{(53+१)}{2} = 27$$

$$\text{मध्यस्थ अंक} = \frac{(\text{यो}+१)}{२} = \frac{(५३+१)}{२} = २७$$

मध्यका = २७ वे अंक की आकृति = १९

उदाहरण ३—मध्यका प्रदर्शन—अविच्छिन्न माला

उम्र संभाग S (आ)	आवृत्ति F (बा)	संचयी आवृत्ति C F (सं)
१०–२०	४	४
२०–३०	८	१२
३०–४०	१५	२७ $\text{सं}^{\text{उ}}$
सी_1 ४०–५० सी_2	२० बा.	४७
५०–६०	५	५२
६०–७०	३	५५

अविच्छिन्न माला में $\frac{(\text{यो} + १)}{२}$ की सहायता से हम यह जान सकते हैं कि मध्यका किस उम्र संभाग में पाया जायगा। संभागान्तर मालूम हो जाने पर हमें किसी भी आन्तरगणन के सूत्र का सहारा लेना पड़ेगा जिससे संभाग की सीमाओं के बीच में मध्यका की यथार्थ आकृति मालूम हो सके। निम्नलिखित सूत्र में सी_1 और सी_2 (L_1 & L_2) का प्रयोग संभागान्तर की सीमाओं के लिये, वि (I) का प्रयोग संभागान्तर के विस्तार के लिये, $\text{सं}_{\text{उ}}$ (CF^P) का प्रयोग मध्यकावर्ग से ऊपर के संभाग की संचयी आवृत्ति के लिये और बा (F) का प्रयोग संभागान्तर की आवृत्ति के लिये किया गया है।

$$\text{Median item} = \left\{\frac{N+1}{2}\right\} = \left\{\frac{55+1)}{2}\right\} = 28$$

$$\text{मध्यस्थ अंक} = \left\{\frac{\text{यो} + १}{२}\right\} = \left\{\frac{५५ + १}{२}\right\} = २८$$

$$\text{Median} = L_1 + \frac{I}{F} \left(MI - CF^P\right)$$

$$\text{मध्यका} = \text{सी}_1 + \frac{\text{वि}}{\text{बा}} \left(\text{म अं} - \text{सं}_{\text{उ}}\right)$$

$$= ४० + \frac{१०}{२०} (२८ - २७)$$

$$= ४० \text{ साल } ६ \text{ महीने}$$

मध्यका के गुण

(१) मध्यका को हम अधिक यथार्थता से मालूम कर सकते हैं, क्योंकि यह समंकमाला में स्थित एक अंक की आकृति होती है और प्रत्येक समंक-माला स्वयं पाई जाती है।

(२) इसके ऊपर समंकमाला के उच्चतम और निम्नतम समंकों का केवल इतना ही प्रभाव पड़ता है कि उनकी बारम्बारता कुल योग मालूम करने के लिये जोड़ दी जाती है।

(३) इस पर उच्चतम और निम्नतम समंकों की केवल आवृत्ति का प्रभाव पड़ने के कारण यदि केवल आवृत्ति ही दी हो तो हम मध्यका मालूम कर सकते हैं।

(४) भूयिष्ठक के समान मध्यका भी बिन्दु रेखाओं के द्वारा प्रदर्शित की जा सकती है ।

(५) भूयिष्ठक के समान इसे भी केवल निरीक्षण मात्र से ही जाना जा सकता है ।

मध्यका के दोष

(१) किसी साधारण गणित की विधि से नहीं मालूम किया जा सकता और न इसके आधार पर ही कोई विस्तृत क्रिया की जा सकती है ।

(२) मध्यका निकालने के पहले समंकमाला का उन्नतोन्मुख या अधोमुख क्रम के अनुसार विन्यास करना आवश्यक होता है ।

(३) भूयिष्ठक के समान ही मध्यका और आवृत्ति के कुल योग से गुणा करने पर आकृतियों का महा-योग नहीं मालूम हो सकता है ।

(४) मध्यका पर बीजगणीतीय (Algebraic) प्रयोग नहीं किये जा सकते हैं ।

मध्यका के उपयोग

जब व्यक्तिगत तथ्यों का आंकिक माप करना असम्भव हो या बिना वर्ग-बन्धन के समंकों की तुलना न की जा सके तो मध्यका का प्रयोग उपयोगी होता है । इसका महत्व समाजगत तथ्यों के वर्णन करने में किया जाता है जैसे भृति, धन इत्यादि के वितरण को इसके द्वारा हम बहुत अच्छी तरह समझ सकते हैं । यदि किसी दो कक्षाओं के विद्यार्थियों की बुद्धिमत्ता की तुलना करना अभीष्ट हो तो एक बड़ी समस्या खड़ी हो जाती है कि बुद्धि की तुलना कैसे की जाय जिसका ठीक ठीक नाप नहीं किया जा सकता । परन्तु यह समस्या मध्यका के उपयोग से दूर हो जाती है । यह तो सच है कि बुद्धि को नापा नहीं जा सकता परन्तु यह भी सच है कि एक कक्षा के विद्यार्थियों को उनकी बुद्धि के अनुसार बढ़ते हुए या घटते हुए क्रम से खड़ा किया जा सकता है और मध्यस्थ विद्यार्थी की बुद्धि मध्यका होगी । यदि बुद्धि को हम किसी भी परीक्षा में मिले हुए प्राप्तांक के बराबर मान लें तो बढ़ते हुए या घटते हुए क्रम से विन्यस्त समंकमाला के मध्यस्थ अंक के प्राप्तांक को हम मध्यका कहते हैं । मध्यका का प्रयोग व्यवसायिक समंकों में प्रायः अधिक उपयोगी सिद्ध नहीं होता क्योंकि ऐसे समंक बहुत अधिक अस्थिर होते हैं ।

चतुर्थांश, दशाँश एवं शताँश

किसी भी अंक विन्यास या समंकमाला को दो बराबर विभागों में विभाजित किया जाय तो उसके संभाजन विवरण को मध्यका कहते हैं। इसी प्रकार हम समंकमाला को दो से अधिक बराबर भागों में बाँट सकते हैं। जब किसी भी अंक विन्यास को चार भागों में बांटा जा सकता है तो प्रत्येक भाग करने वाली संख्या को चतुर्थाँश (Quartile) कहते हैं। इसी प्रकार प्रत्येक ५ वें भाग की संख्या को पंचमाँश (Quintile), आठवें भाग की संख्या को अष्टमाँश (Octile), दसवें भाग की संख्या को (Decile) और सौवें भाग की संख्या को (Percentile) कहते हैं।

चतुर्थांश (Quartiles)

जब मध्यका के ऊपर और नीचे की समंकमाला को दो भागों में विभाजित करते हैं तो सम्पूर्ण समंकमाला चार चतुर्थाँशों में विभाजित हो जाती है। मध्यका और निम्नतम आकृति के बीच के चतुर्थांश को अधर चतुर्थांश और उच्चतम आकृति और मध्यका के बीच के चतुर्थांश को अपर चतुर्थाँश कहते हैं। इन्हें क्रमशः प्रथम चतुर्थाँश और द्वितीय चतुर्थाँश कहते हैं। चतुर्थाँश मालूम करने के लिये निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।

(अ) विच्छिन्न माला

Lower Quartile = Size of $Q I_1$

अधर चतुर्थांश = अधर चतुर्थांक की आकृति

$$Q I_1 = \left\{ \frac{N+1}{4} \right\}$$

$$\text{अधर चतुर्थांक} = \left\{ \frac{\text{यो} + १}{४} \right\}$$

Upper Quartile = Size of $Q I_3$

अपर चतुर्थाँश = अपर चतुर्थांक की आकृति

$$Q I_3 = 3\left\{ \frac{N + 1}{4} \right\}$$

$$\text{अपर चतुर्थांक} = ३ \left\{ \frac{\text{यो} + १}{४} \right\}$$

(ब) अविच्छिन्न माला

$$Q\,I_1 = \left\{ \frac{N+1}{4} \right\}$$

$$\text{अधर चतुर्थांक} = \left\{ \frac{\text{यो} + १}{४} \right\}$$

$$\text{Lower Quartile} = L_1 + \frac{I}{F} \left\{ QI_1 - CF^{p} \right\}$$

$$\text{अधर चतुर्थांश} = \text{सी}_1 + \frac{\text{वि}}{\text{बा}} \left\{ \text{अ. च}_1 - \text{सं}_{\text{उ}} \right\}$$

$$Q\,I_3 = {}^{3} \left\{ \frac{N+1}{4} \right\}$$

$$\text{अपर चतुर्थांक} = {}^{३} \left\{ \frac{\text{यो} + १}{४} \right\}$$

$$\text{Upper Quartile} = L_1 + \frac{I}{F} \left\{ QI_3 - CFP \right\}$$

$$\text{अपर चतुर्थांश} = \text{सी}_1 + \frac{\text{वि}}{\text{बा}} \left\{ \text{अ. च}_3 - \text{सं}_{\text{उ}} \right\}$$

यहाँ अ. च_1 और अ. च_3 का प्रयोग अधर चतुर्थांक एवं अपर चतुर्थांक के लिए किया गया है। $\text{सं}_{\text{उ}}$ के अर्थ चतुर्थांक वाले संभाग के ऊपर वाले संभाग की संचयी बारम्बारता से है।

उदाहरण--चतुर्थांश प्रदर्शन

उम्र संभाग S (आ)	आवृत्ति F (बा)	संचयी आवृत्ति CF (सं)
१०–२०	४	४
२०–३०	८	१२
३०–४०	१५	२७
४०–५०	२०	४७
५०–६०	५	५२
६०–७०	३	५५

$$QI_1 = \left\{\frac{N+1}{4}\right\} = \left\{\frac{55+1}{4}\right\} = 14$$

$$\text{अधर चतुर्थांक} = \left\{\frac{\text{यो} + १}{४}\right\} = \left\{\frac{५५ + १}{४}\right\} = १४$$

$$\text{Lower Quartile} = L_1 + \frac{I}{F}(QI_1 - CF^P)$$

$$\text{अधर चतुर्थांश} = \text{सी}_1 + \frac{\text{वि}}{\text{बा.}}(\text{अ. च}_1 - \text{सं}_\text{उ})$$

$$= ३० + \frac{१०}{१५}(१४ - १२)$$

$$= ३०\cdot३३$$

$$QI_3 = 3\left\{\frac{N+1}{4}\right\} = 3\left\{\frac{55+1}{4}\right\} = 42$$

$$\text{अपर चतुर्थांक} = ३\left\{\frac{\text{यो}+१}{४}\right\} = ३\left\{\frac{५५ + १}{४}\right\} = ४२$$

$$\text{Upper Quartile} = L_1 + \frac{I}{F}(QI_3 - CF^P)$$

$$\text{अपर चतुर्थांश} = \text{सी}_1 + \frac{\text{वि}}{\text{बा}}(\text{अ.चं.}_3 - \text{सं}_\text{उ})$$

$$= ४० + \frac{१०}{२०}(४२ - २७)$$

$$= ४० + \frac{१५}{२} = ४७\cdot५$$

दशांश (Deciles)

यदि किसी समंकमाला को १० बराबर भागों में विभाजित किया जाय तो प्रत्येक विभाजन करने वाली संख्या को दशाँश कहा जायगा और उनकी संख्यायें न्यूनतम अंक की ओर से क्रमशः गिनी जायगी। दशांश मालूम करने के लिए निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।

(अ) विच्छिन्न माला

$$DI_1 = \left\{\frac{N+1}{10}\right\}$$

$$\text{दशाँक}_1 = \left\{\frac{\text{यो} + १}{१०}\right\}$$

दशांश$_I$ = दशांक$_I$ की आकृति

$$DI_8 = 8\left\{\frac{N+1}{10}\right\}$$

$$\text{दशांक}_8 = ८\left\{\frac{\text{यो} + १}{१०}\right\}$$

दशांश$_8$ = दशांक$_8$ की आकृति

(ब) अविच्छन्न माला

$$DI_I = \left\{\frac{N+1}{10}\right\}$$

$$\text{दशांक}_I = \left\{\frac{\text{यो} + १}{१०}\right\}$$

$$DI_8 = 8\left\{\frac{N+1}{10}\right\}$$

$$\text{दशांक}_8 = ८\left\{\frac{\text{यो} + १}{१०}\right\}$$

$$\text{Decile}_I = L_I + \frac{I}{F}\ (DI_I - CF^P)$$

$$\text{Decile}_8 = L_I + \frac{I}{F}\ (DI_8 - CF^P)$$

$$\text{दशांश}_I = \text{सी}_I + \frac{\text{वि}}{\text{बा}}\ (\text{द}_I - \text{सं}_{\text{उ}})$$

$$\text{दशांश}_8 = \text{सी}_I + \frac{\text{वि}}{\text{बा}}\ (\text{द}_8 - \text{सं}_{\text{उ}})$$

उदाहरण—दशांश प्रदर्शन

उम्र संभाग (S) आ	आवृत्ति (F) बा	संचयी आवृत्ति (CF) सं
१०—२०	४	४
२०—३०	८	१२
३०—४०	१५	२७
४०—५०	२०	४७
५०—६०	५	५२
६०—७०	३	५५

$$DI_1 = \left\{\frac{N+1}{10}\right\} = \left\{\frac{55+1}{10}\right\} = 5{\cdot}6$$

$$द_1 = \left\{\frac{यो + १}{१०}\right\} = \left\{\frac{५५ + १}{१०}\right\} = ५{\cdot}६$$

$$Decile_1 = L_1 + \frac{I}{F}(D\,I_1 - CF^P)$$

$$दशांश_1 = सी_1 + \frac{वि}{बा}(द_1 - सं_{उ})$$

$$= २० + \frac{१०}{८}(५{\cdot}६ - ४) = २२$$

$$DI_8 = 8\left\{\frac{N+1}{10}\right\} = 8\left\{\frac{55+1}{10}\right\} = 44{\cdot}8$$

$$द_8 = ८\left\{\frac{यो + १}{१०}\right\} = ८\left\{\frac{५५ + १}{१०}\right\} = ४४{\cdot}८$$

$$दशांश_8 = सी_1 + \frac{वि}{बा}(द_8 - सं_{उ})$$

$$= ४० + \frac{१०}{२०}(४४{\cdot}८ - २७)$$

$$= ४८{\cdot}९$$

शताँश (Percentiles)

यदि किसी भी समंकमाला को सौ बराबर भागों में विभाजित किया जाय तो प्रत्येक विभाजन करने वाली संख्या को शताँश कहते हैं और उनकी संख्यायें न्यूनतम अंक से क्रमशः गिनी जायगी। शताँश निकालने के लिये निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।

(अ) विच्छिन्नमाला

$$PI_1 = \left\{\frac{N+1}{100}\right\}$$

$$शतांक_1 = \left\{\frac{यो + १}{१००}\right\}$$

$$शताँश_1 = शताँक_1 \text{ की आकृति}$$

$$PI_{60} = 60 \left(\frac{N+1}{100}\right)$$

$$श_{60} = ६० \left(\frac{यो + १}{१००}\right)$$

$$शतांश_{60} = शतांक_{60} \text{ की आकृति}$$

(ब) अविच्छिन्नमाला

$$PI_{I} = \left(\frac{N+1}{100}\right)$$

$$शतांश_{I} = \left(\frac{यो + १}{१००}\right)$$

$$Percentile_{I} = L_{I} + \frac{I}{F}(PI_{I} - CF^{P})$$

$$शतांश_{I} = सी_{I} + \frac{वि}{बा}(श_{I} - सं_{उ})$$

$$PI_{60} = 60 \left(\frac{N+1}{60}\right)$$

$$श_{६०} = ६० \left(\frac{यो + १}{१००}\right)$$

$$Percentile_{60} = L_{I} + \frac{I}{F}(PI_{60} - CF^{P})$$

$$शतांश_{६०} = सी_{I} + \frac{वि}{बा}(श_{६०} - सं_{उ})$$

स्थानिक मूल्यों के लक्षण एवं गुण

उपरोक्त चतुर्थांश, दशांश और शतांश इत्यादि सभी स्थानिक मूल्य (Positional values) के नाम से पुकारे जाते हैं, क्योंकि वे समंकमाला में किसी निश्चित स्थान पर अवस्थित होने के कारण ही अपने नामों से पुकारे जाते हैं। इन स्थानिक मूल्यों के निम्नलिखित लक्षण और गुण हैं।

(१) ये कोई ऐसी प्रतिनिधि संख्यायें नहीं हैं जो किसी भी समंकमाला के सभी समंकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति को स्पष्ट कर सकें।

(२) इनको हम प्रथम घातीय माध्य (Averages of the First Order) नहीं कह सकते क्योंकि ये सम्पूर्ण समंकमाला पर आधारित न होकर उसके किसी भाग पर आधारित होते हैं।

(३) मध्यका के समान इन स्थानिक मूल्यों को भी सूत्रों और बिन्दुरेखीय विधि द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

(४) यदि किसी समंकमाला के किसी विशिष्ट भाग के सम्बन्ध में अध्ययन करना अभीष्ट हो तो ये सबसे अधिक उपयोगी सिद्ध होते हैं।

मध्यक (Mean)

मध्यक या गणित माध्य को मालूम करने के लिये किसी भी समंकमाला की सम्पूर्ण आकृतियों के योग को उनकी संख्या से भाग देना होता है, इसे साधारण रूप से 'औसत' कहा जाता है और प्राय: जब 'औसत' शब्द का प्रयोग किया जाता है तो उसका अर्थ इसी माध्य से होता है। यह सबसे सरल और सुगम माध्य है जिसका प्रयोग प्रायः न केवल किसी भी समग्र के समंकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति को समझाने के लिये ही किया जाता है वरन् इसके आधार पर विभिन्न प्रकार के विचलन गुणक (Coefficients of Dispersion) बनाये जाते हैं। मध्यक निकालने की दो रीतियाँ हैं (अ) ऋजु रीति (Direct Method) या लघु रीति (Short-cut Method)।

ऋजु रीति (Direct Method)

इस रीति के अनुसार सभी आकृतियों को जोड़कर संयोगित आकृति को समग्र के समंकों की संख्या से भाग दे दिया जाता है और भजनफल को मध्यक कहते हैं। संमकमाला की समस्त आकृतियों के जोड़ को लिखने में प्राय: यूनानी वर्णाक्षर Σ (Sigma) का प्रयोग किया जाता है जिसका अर्थ होता है—कुलयोग। मध्यक निकालनें में निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{Mean} = \frac{\Sigma S}{N} \qquad \text{मध्यक} = \frac{\Sigma \text{ आ}}{\text{यो}}$$

यदि किसी विच्छिन्न माला में मध्यक मालूम करना हो तो (यो) सभी बारम्बारताओं या आवृत्ति के जोड़ के बराबर होगा और आकृतियों का योग मालूम करने के लिये प्रत्येक आकृति को उसकी आवृत्ति से गुणा करना पड़ेगा क्योंकि ऐसी माला में समान आकृतियों को बार बार न लिख कर केवल उनकी बारम्बारता ही लिख दी जाती है। इसलिये मध्यक निकालने में निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जायगा, जिसमें (Σ आ० बा०) का अर्थ सभी आकृतियों और उनकी बारम्बारताओं के गुणनफलों का योग होता है।

उदाहरण १—मध्यक प्रदर्शन

क्रमांक	आकृति (S आ)	क्रमांक	आकृति (S आ)	क्रमांक	आकृति (S आ)
१	१००	६	८०	११	५०
२	१००	७	७५	१२	४५
३	९०	८	७५	१३	४०
४	९०	९	६०	१४	३५
५	९०	१०	५०	१५	३५
				कुल संख्या यो = १५	संचयी आकृति Σ आ=१०१५

$$\text{Mean} = \frac{\Sigma S}{N} \qquad \text{मध्यक} = \frac{\Sigma \text{ आ}}{\text{यो}} \qquad = \frac{१०१५}{१५} = ६७\cdot९$$

उदाहरण २—मध्यक प्रदर्शन—विच्छिन्न माला

आकृति S (आ)	आवृत्ति F (बा)	आ. बा. (S. F.)
१५	४	६०
१६	६	९६
१७	१०	१७०
१८	२	३६
१९	९	१७१
२०	३	६०
२१	५	१०५
२२	७	१५४
२३	२	४६
२४	३	७२
२५	२	५०
	यो=५३	Σ आ. बा. = १०२०

$$\text{Mean} = \frac{\Sigma \text{ S. F.}}{\text{N}} \qquad \text{मध्यक} = \frac{\Sigma \text{ आ. बा.}}{\text{यो}} = \frac{१०२०}{५३} = १९\cdot२$$

जब अविच्छिन्न समंकमाला में मध्यक मालूम करना अभीष्ट हो तो सभी संभागान्तरों के मध्य बिन्दुओं (Middle Points) मालूम करके उसे साधारण विच्छिन्नमाला में परिवर्तित कर लेना चाहिये और फिर मध्यबिन्दुओं को आकृति मान कर उनसे उनकी बारम्बारताओं का गुणा करके गुणनफलों के कुल योग को बारम्बारताओं के योग से भाग देना चाहिये। इस प्रकार अविच्छिन्न माला में मध्यक प्राप्त करने के लिये निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जायगा जिसमें (Σ म. बा.) का अर्थ सभी मध्यबिन्दुओं और उनकी आवृत्ति के गुणनफलों का योग है।

$$\text{Mean} = \frac{\Sigma \text{ M. F.}}{\text{N}} \qquad \text{मध्यक} = \frac{\Sigma \text{ म. बा.}}{\text{यो}}$$

उदाहरण ३—मध्यक प्रदर्शन—अविच्छिन्न माला

उम्र संभाग S (आ)	मध्य बिन्दु M. (म.)	आवृत्ति F (बा.)	मध्य बिन्दु × आवृत्ति (M × F) म. बा.
१०–२०	१५	४	६०
२०–३०	२५	८	२००
३०–४०	३५	१५	५२५
४०–५०	४५	२०	९००
५०–६०	५५	५	२७५
६०–७०	६५	३	१९५
		यो = ५५	Σ म. बा. = २१५५

$$\text{Mean} = \frac{\Sigma \text{ M. F.}}{\text{N}} \qquad \text{मध्यक} = \frac{\Sigma \text{ म.बा.}}{\text{यो}}$$

$$= \frac{२१५५}{५५} = ३९\cdot२$$

लघुरीति (Short-cut Method)

यदि किसी समंकमाला में बड़े अंक अधिक हों तो लघुरीति के प्रयोग से क्रिया अधिक सरल और संक्षिप्त हो जाती है और मध्यक मालूम करने में समय भी कम लगता है। इस रीति का विवरण निम्नलिखित है:—

(१) समंकमाला की किसी भी समंक की आकृति को मध्यक मान लो।

(२) इस माने हुये मध्यक से सभी आकृतियों के विचलन (Deviation) मालूम करो जोकि दोनों ही दिशाओं में (+) और (—) होंगे।

(३) इन (+) और (—) विचलनों को जिन्हें अपकिरण भी कहते हैं उनके समंकों की आवृत्तियों से गुणा करो और इन गुणनफलों का कुल योग मालूम करके उसे समंकों की आवृत्ति के कुल योग से भाग दो।

(४) यदि उपरोक्त गुणक को माने हुये माध्य में जोड़ दिया जाय तो हमें यथार्थ मध्यक मालूम हो जायगा।

(५) इस रीति को हम निम्नलिखित सूत्र के रूप में रख सकते हैं, जिसमें (य) माना हुआ मध्यक है, और (Σ वि$_{य}$ बा.) का अर्थ कल्पित माध्य से विभिन्न आकृतियों के अनुलोम (+) और विलोम (—) अपकिरण या विचलन और उनकी आवृत्तियों के गुणनफल का योग है।

$$\text{Mean} = X + \frac{\Sigma Fd_X}{N} \qquad \text{मध्यक} = \text{य} + \frac{\Sigma \text{ वि}_{\text{य}} \text{ बा.}}{\text{यो}}$$

उदाहरण—४.

आकृति S (आ)	आवृत्ति F (बा)	आकृतियों का य से अपकिरण (Fd_X वि$_{य}$ बा.)	वि$_{य}$ × बा
११५	४	+३	+१२
१०५	८	—७	—५६
य ११२×	३	०	०
१०६	२	—६	—१२
११७	१	+५	+ ५
१२०	५	+८	+४०
	यो = २३		Σ वि$_{य}$ बा. =—११

$$\text{Mean} = X + \frac{\Sigma Fd_X}{N}$$

$$\text{मध्यक} = \text{य} + \frac{\Sigma \text{वि}_{\text{य}}.}{\text{यो}}$$

$$= ११२ + \left\{\frac{-११}{२३}\right\} = ११२ - \cdot४७८ = १११\cdot५२२$$

यदि अविच्छिन्न माला में मध्यक निकालना अभीष्ट हो तो कल्पित माध्य चुनने से पहिले समंकमाला को एक विच्छिन्न माला में संभागों के मध्य-बिन्दु मालूम करके परिवर्तित कर लेना चाहिए। इन मध्य-बिन्दुओं में से किसी एक को कल्पित माध्य मान कर उससे विभिन्न मध्य-बिन्दुओं का अपकिरण निकाल लेना चाहिए और अनुलोम एवं विलोम अपकिरणों को उनकी आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफलों का योग जान कर ऐसे योग को कुल आवृत्तियों के योग से भाग दे देना चाहिए। तत्पश्चात् यथार्थ मध्यक निकालने के लिए इस गुणक को (य) में जोड़ देना चाहिए।

उदाहरण—५.

आकृति S (आ)	मध्य-बिन्दु M (म)	आवृत्ति F (बा)	अपकिरण (म–य) d_x वि$_{\text{य}}$	वि$_{\text{य}}$ × बा $d_x \times F$
०–१०	५	६	—२०	—१२०
१०–२०	१५	८	—१०	— ८०
२०–३०	य २५x	१५	०	०
३०–४०	३५	२	+ १०	+ २०
४०–५०	४५	५	+ २०	+१००
५०–६०	५५	२	+ ३०	+ ६०
६०–७०	६५	७	+ ४०	+२८०
		यो = ४५		Σ वि$_{\text{य}}$ बा = २६०

$$\text{Mean} = x + \frac{\sum Fd_x}{N}$$

$$\text{मध्यक} = \text{य} + \frac{\sum \text{वि}_{\text{य}} \text{बा.}}{\text{यो}}$$

$$= २५ + \frac{२६०}{४५} = २५ + ५{\cdot}८$$

$$= ३०{\cdot}७७$$

यदि मध्यक निकालने की क्रिया को आसान बनाना हो तो (य) को समंकमाला के बीच में ही चुनना चाहिए। यदि (य) के दोनों ओर अनुलोम और विलोम अपकिरणों का योग शून्य के बराबर हो तो हमें यह मान लेना पड़ेगा कि (य) ही यथार्थ मध्यक है और यदि यथार्थ मध्यक और कल्पित माध्य में कुछ अन्तर होगा तो वह $\left\{ \frac{\sum \text{वि}_{\text{य}} \text{बा.}}{\text{यो}} \right\}$ के बराबर होगा। सूत्रानुसार,

$$\text{मध्यक} = \text{य} + \frac{\sum \text{वि}_{\text{य}} \text{बा.}}{\text{यो}}$$

$$\therefore \text{मध्यक} - \text{य} = \frac{\sum \text{वि}_{\text{य}} \text{बा.}}{\text{यो}}$$

मध्यक के गुण

(१) मध्यक निकालने की विधि सरल और क्रिया अति आसान है।

(२) यह आसानी से समझ में आ जाता है और किसी गणित के विशेष ज्ञान की आवश्यकता नहीं होती।

(३) भूयिष्ठक और मध्यका के प्रतिकूल ये सभी आकृतियों और उनकी बारम्बारताओं को समान महत्व प्रदान करता है और इस कारण ये समंकमाला के उच्चतम और लघुतम आकृतियों को महत्व देने में उपयोगी सिद्ध होता है।

(४) मध्यका के प्रतिकूल इसे निकालने के लिए समंकमाला को किसी विशिष्ट क्रम के अनुसार विन्यास करने की आवश्यकता नहीं होती।

(५) इसके द्वारा प्राप्त किया गया निष्कर्ष अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होता है क्योंकि इसके द्वारा समंकमाला के समंकों की विषमतायें दूसरी ओर होने वाली समताओं के द्वारा संतुलित हो जाती हैं।

(६) इसे अंकगणित और बीजगणित की रीतियों की सहायता से और भी अधिक स्पष्ट किया जा सकता है।

(७) यदि समंकों की संख्या और मध्यक मालूम हो तो दोनों को परस्पर गुणा करके समग्र की कुल आकृतियों का योग मालूम किया जा सकता है।

(८) ये एक अत्यन्त निश्चित और स्पष्ट माध्य है।

मध्यक के दोष

(१) इसे हम मध्यका और भूयिष्ठक के समान केवल निरीक्षण द्वारा नहीं जान सकते जब तक कि समंकमाला अत्यन्त सरल और छोटी न हो।

(२) इसे भूयिष्ठक और मध्यका के समान बिन्दुरेखा के द्वारा नहीं निकाला जा सकता है।

(३) यदि उच्चतम और लघुतम आकृतियाँ न मालूम हों किसी भी समंकमाला का मध्यक नहीं मालूम किया जा सकता यद्यपि मध्यका और भूयिष्ठक निकाले जा सकते हैं यदि केवल उनकी बारम्बारता दी गई हो।

(४) प्रायः ऐसा होता है कि मध्यक पूर्णांक नहीं पाया जाता और ऐसी अवस्था में समग्र में उसके बराबर के समंक नहीं पाये जाते। ऐसी दशा में यह केवल एक विवरणात्मक माध्य ही रह जाता है और समग्र का प्रतिनिधित्व नहीं करता।

(५) यदि समंकमाला के सभी समंकों का उपयोग मध्यक निकालने में किया जाय तो उसके द्वारा हम कुछ भी नहीं समझ सकेंगे और यदि मध्यक के निकलने में एक भी संख्या छोड़ दी जाय तो इसकी यथार्थता पर बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है।

(६) यदि इस माध्य के साथ ही साथ समंक न दिये जायँ तो इसके द्वारा कभी कभी भ्रमात्मक निष्कर्ष निकल सकते हैं। उदाहरणार्थ, दो मजदूरों की एक सप्ताह के प्रत्येक दिन की मजदूरी नीचे दी गई है।

राम	श्याम
६)	४)
६)	५)
६)	४)
५)	५)
४)	६)
३)	६)
३०)	३०)

दोनों ही मजदूर ३०) सप्ताह में कमाते हैं और इस प्रकार उनकी प्रतिदिन की औसत मजदूरी ५) होती है। यद्यपि दोनों ही व्यक्ति सप्ताह में ३०) और प्रतिदिन ५) कमाते हैं फिर भी उनके आय क्रम में अन्तर है जोकि मध्यक समझाने में सर्वथा असमर्थ है।

मध्यक के प्रयोग

मध्यक एक बहुत सरल प्रकार का माध्य होने के नाते शीघ्रता से समझ में आ जाता है। इस माध्य के द्वारा व्यवसायिक समंकों के विश्लेषण में अत्यन्त सहायता मिलती है परन्तु इसके प्रयोग करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि कोई एक आध बहुत बड़ी या बहुत छोटी संख्या छूट तो नहीं गई है क्योंकि कोई एक ही बहुत बड़ी या छोटी संख्या मध्यक को गलत कर सकती है।

भारित मध्यक (Weighted Average)

साधारण मध्यक निकालने में समंकमाला के प्रत्येक अंक को बराबर महत्व दिया जाता है और यह मान कर चला जाता है कि प्रत्येक संभाग में एक ही प्रकार का और समान अंक-वंटन (Distribution of items) है। परन्तु कोई भी व्यक्ति इस तथ्य को भूल नहीं सकता है कि प्रत्येक समग्र में विभिन्न अंकों का भिन्न भिन्न महत्व होता है। यदि किसी समग्र में अंकों के महत्व में परस्पर भेद हो तो मध्यक निकालने से पहिले विभिन्न

समंकों का उनके अपेक्षाकृत महत्व (Relative importance) के अनुसार भार-वंटन (Weighting) किया जाता है और इसके पश्चात् मालूम किये गये मध्यक को भारित मध्यक (Weighted Average) कहते हैं।

यदि किसी एक व्यवसाय में १००० मजदूर काम करते हैं जिन्हें अपनी योग्यता के अनुसार मजदूरी मिलती है। उदाहरणार्थ, २०० होशियार मजदूरों को १०) प्रति सप्ताह, ५०० साधारण होशियार मजदूर को ८) प्रति सप्ताह और ३०० अति साधारण को ३) प्रति सप्ताह मिलते हैं तो देखने से ऐसा मालूम होता है कि प्रति मजदूर की औसत मजदूरी $\left\{ \frac{१०+८+३}{३} \right\}$ = ७) है और प्रति सप्ताह व्यवसायघर को ७०००) देने पड़ते हैं। परन्तु वास्तव में व्यवसायघर को (२०० × १०) + (५०० × ८) + (३०० × ३) = ६९००) देने पड़ते हैं। अब यदि हम वास्तव में औसत निकलना चाहते हैं तो साधारण मध्यक से काम नहीं चलेगा जो ७) प्रति व्यक्ति है और भारित मध्यक निम्नांकित विधि से निकाला जायगा।

$$\text{भारित मध्यक} = \left\{ \frac{(२००\times१०) + (५००\times८) + (३००\times३)}{१०००} \right\}$$

$$= ६।।।=)५$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि भारित मध्यक एक ऐसा माध्य है जिसमें समंकों को समग्र में उनके अपेक्षाकृत महत्व की ओर संकेत करने वाली संख्याओं से गुणा किया जाता है और उनके गुणनफलों को जोड़ कर कुल समंकों की संख्या से भाग दे दिया जाता है। भार (Weight) एक ऐसी वास्तविक या अविहित संख्या है जो किसी भी समंक की समग्र में महत्व स्पष्ट करती है। भार के सम्बन्ध में दो विचारधारा हैं। कुछ संख्याशास्त्रियों का मत है कि भार और आवृत्ति में कोई अन्तर नहीं क्योंकि किसी भी समंक की आवृत्ति यह समझाती है कि किसी समग्र में अन्य समंकों की अपेक्षाकृत उस समंक की कितने बार अभ्यावृत्ति (Repetition) हुई है। कुछ अन्य संख्याशास्त्रियों का इस विचार से मतभेद है और वे आवृत्ति और भार को बिलकुल विभिन्न मानते हैं। उनका कहना है कि आवृत्ति समग्र

के वास्ताविक स्वरूप को स्पष्ट करती है। परन्तु विभिन्न समंकों का महत्व नहीं समझा पाती। उदाहरणार्थ, किसी भी आफिस में यदि चार चपरासी काम करते हैं तो चपरासो की आवृत्ति चार हुई और वह केवल इतना बतला सकती है कि अन्य पदाधिकारियों की अपेक्षा चपरासियों की कितनी संख्या है। परन्तु आवृत्ति यह समझाने में सर्वथा असमर्थ है कि वे चार चपरासी केवल दो चपरासियों का काम करते हैं या छः व्यक्तियों के बराबर का श्रम करते हैं। यदि वे चपरासी ६ व्यक्तियों के बराबर काम करते हैं तो उनका भार ६ होगा, यद्यपि आवृत्ति केवल ४ हैं। इस प्रकार दूसरे मत के अनुसार भार एक ऐसी संख्या है जो समंकों का महत्व स्पष्ट करती है परन्तु जो समग्र की आन्तरिक परिस्थिति से प्रभावित न होकर किसी वाह्य कारण पर आधारित होती है।

भारित मध्यक का प्रयोग निम्नलिखित दशाओं में करना उपयोगी होता है:—

(१) जब किसी समग्र के विभिन्न संभागों की आवृत्तियों में बहुत अधिक अन्तर हो कि क्योंकि इस प्रकार का अंतर परस्पर बहुत अधिक अपकिरण का द्योतक है। उदाहरणार्थ, यदि किसी फैक्टरी में विभिन्न योग्यता के व्यक्ति काम करते हैं तो उनकी औसत आय निकालने के लिये भारित मध्यक का प्रयोग करना आवश्यक होगा।

(२) जब आवृत्ति का अनुपात प्रति संभाग बदलता जाय तो भारित मध्यक भी बदलता जायगा। इस प्रकार यदि अतिकुशल, कुशल और अकुशल मजदूरों का अनुपात किसी फैक्टरी में २, ४ और ६ हो जो बदल जाये और यदि साथ ही साथ कुल व्यय भी बढ़ा हो तो भारित मध्यक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा। यदि कुल व्यय बढ़ा न हो तो एक नया भारित मध्यक निकालना पड़ेगा और ऐसी दशाओं में एक साधारण मध्यक बेकार सिद्ध होगा।

(३) यदि विभिन्न श्रेणियों के प्रतिशतों की तुलना करना अभीष्ट हो तो भारित मध्यक ऐसी संख्याओं की केन्द्रीय प्रवृत्ति को एक साधारण मध्यक की अपेक्षा अधिक आसानी से समझा सकेगा। उदाहरणार्थ, नीचे की तालिका में तीन विश्वविद्यालयों की विभिन्न परीक्षाओं के प्रतिशत परीक्षाफल दिये हुये हैं और यह जानना अभीष्ट है कि कौन सा विश्व-विद्यालय सर्वोत्तम है।

परीक्षा	प्रतिशत	परीक्षा	फल
		विश्वविद्यालय	
	अ	ब	स
एम० ए०	८०	७५	७०
एम० एस० सी०	७०	७०	६०
बी० ए०	६५	८०	७०
बी० एस० सी०	६०	७५	८०
बी० काम०	७५	६०	७५

उपरोक्त तालिका में यह नहीं दिया गया है कि विभिन्न परीक्षाओं के प्रतिशत परीक्षाफलों के भार क्या हैं अर्थात् प्रत्येक परीक्षा में कितने विद्यार्थी सम्मिलित हुये थे। हो सकता है कि जिसमें ८० प्रतिशत परीक्षा फल रहा हो केवल १० ही विद्यार्थी बैठे हों और जिसमें ६० प्रतिशत परीक्षा फल रहा उसमें ३० ही विद्यार्थी बैठे हों। बड़ी भारी समस्या खड़ी हो जाती है कि किस विश्वविद्यालय को उत्तम कहा जाय। इस समस्या का निवारण केवल भारित मध्यक ही कर सकता है। भार यदि विदित न हो तो अविहित (Estimated) भारों का प्रयोग करना चाहिये।

भारित मध्यक के उपयोग

भारित मध्यक में वही गुण दोष हैं जो एक साधारण मध्यक में पाये जाते हैं। एक साधारण मध्यक के समान ही ये भी समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति को दिग्दर्शित करता है परन्तु उसकी अपेक्षा कुछ विशेष परिस्थितियों में यह अधिक उपयोगी सिद्ध होता है जिनका कि विवरण दिया जा चुका है। भारित मध्यक का विशेष प्रयोग जन्म-मृत्यु की दरें (Rates) निकालने में किया जाता है।

जन्म-मृत्यु की दरें

जन्म और मृत्यु की दरें प्रायः प्रति सहस्र निकाली जाती हैं। जीवन या मृत्य की दर निकालने के लिये विभिन्न उम्र संभागों के व्यक्तियों की जन्म या मृत्यु प्रति सहस्त्र मालूम कर ली जाती हैं और फिर इन प्रति सहस्त्र दरों की आकृति (Size) मान कर और उन संभागों के अन्तर्गत आने वाले व्यक्तियों की संख्याओं को भार (Weight) मान कर एक भारित मध्यक निकाल लिया जाता है जिसे हम सामान्य जन्म या मृत्यु दर (General Birth or Death Rates) कहते हैं।

उदाहरण—मृत्यु–दर

उम्र संभाग	स्थानिक जनसंख्या नगर (अ)			आदर्श जनसंख्या नगर (ब)		
वर्ष	जनसंख्या	मृत्यु	मृत्यु–दर प्रति सहस्त्र	जनसंख्या	मृत्यु	मृत्यु दर प्रति सहस्त्र
१० से नीचे	२०,०००	६००	३०	१२,०००	३६२	३१
१०–२०	१२,०००	२४०	२०	३०,०००	६६०	२२
२०–४०	५०,०००	१२५०	२५	६२,०००	१६१२	२६
४०–६०	३०,०००	१०५०	३५	१५,०००	५२५	३५
६० से ऊपर	१०,०००	५००	५०	३,०००	१८०	६०
	१,२२,०००		२९.९	१,२२,०००		२६.६

(अ) नगर की सामान्य मृत्यु–दर

$$= \frac{१}{१,२२,०००} \times (२०,००० \times ३०) + (१२,००० + २०) + (५०,००० \times २५) + (३०,००० + ३५) + (१०,००० \times ५०) = २९.९$$

(ब) नगर की सामान्य मृत्यु-दर

$$= \frac{१}{१,२२,०००} \times (१२,००० + ३१) + (३०,००० + २) + (६२,००० \times २६) + (१५,००० \times ३५) + (३,००० \times ६०) = २६\cdot६$$

दोनों ही नगरों की सामान्य मृत्यु दरों की तुलना से यह मालूम देता है कि (ब) नगर (अ) नगर की अपेक्षा अधिक स्वस्थ है परन्तु कभी कभी ऐसा हो सकता है कि दोनों ही नगरों की मृत्यु दरें बराबर हों फिर भी कुछ कारणों से यह न कहा जा सके कि उनमें से किस नगर की जनसंख्या

अपेक्षाकृत अधिक स्वस्थ है उदाहरणार्थ, ऐसा हो सकता है कि बराबर मृत्यु दरों वाले नगरों में उम्र के अनुसार जनसंख्या का विभाजन विभिन्न हो और यदि एक में बाल मृत्यु दर अधिक हो तो दूसरे में कम। इसी प्रकार किसी भी नगर में मिल इत्यादि होने के कारण अथवा असंतुलित भोजन, डाक्टरी सहायता की असुविधा और बस्तियों के कारण युवा-मृत्यु दर अधिक हो सकती है। इन कारणों को ध्यान में रखते हुए यदि हम तुलना करना चाहें तो हमें निम्नलिखित पद्धति का प्रयोग करना होगा।

किसी भी एक नगर के उम्र संभागों और उनकी जन-संख्याओं को दूसरे नगर के लिये आदर्श मान लिया जाय। ऐसी दशा में यदि (ब) नगर आदर्श है तो (अ) नगर को स्थानिक कहा जायगा। स्थानिक नगर की मृत्यु दर के लिये आदर्श नगर के उम्र संभागों की जनसंख्या को भार (Weights) मान कर एक भारित मध्यक निकालना होगा। यह भारित मध्यक स्थानिक नगर की आदर्शित मृत्यु दर (Standardised death rate) है। इस प्रकार आदर्शित मृत्यु-दर किसी भी नगर की विभिन्न उम्र संभागों की मृत्यु-दरों को आदर्श नगर की परिस्थितियों में रख देती है। जिस प्रकार हम यदि कपड़े के दो टुकड़ों की तुलना करना चाहें तो तुलना कभी यथार्थ न होगी यदि वे दोनों ही टुकड़े एक ही माप दण्ड से न नापे जाँय। इसी प्रकार यदि दो नगरों की मृत्यु-दरों की तुलना करनी हो तो यह आवश्यक है कि दोनों ही नगरों की परिस्थिति समान मान ली जाय। इस लिये यदि स्थानिक और आदर्श नगर की सामान्य मृत्यु-दरों की तुलना की जाय तो निष्कर्ष गलत होगा। ऐसी दशा में आदर्श नगर की सामान्य मृत्यु-दर और स्थानिक नगर की आदर्शित मृत्यु-दर की तुलना करना ही उचित होगा उपरोक्त उदाहरण में (ब) नगर को आदर्श मान लिया गया है। इसलिए (अ) नगर की आदर्शित मृत्यु-दर निकालने के लिये (अ) नगर की प्रति सहस्र मृत्यु-दर को आकृत्ति मान कर (ब) नगर की तत्संवादी (Corresponding) उम्र संभागों की जन संख्याओं से जिन्हें भार कहा जा सकता है, गुणा किया जायगा, और फिर इन सब गुणनफलों को जोड़ कर (ब) नगर की कुल जन संख्या से जिसे भार का योग कहा जा सकता है, भाग दे दिया जायगा।

(अ) नगर की आदर्शित मृत्यु-दर

$$= \frac{१}{१,२२,०००} \times \; (१२,००० \times ३०) + (३०,००० \times २०)$$
$$+ \; (६२,००० \times २५) \; + \; (१५,००० \; \times \; ३५)$$
$$+ \; (३,००० \; \times \; ५०) \; = \; २६.१$$

(अ) नगर की आदर्शित मृत्यु-दर और (ब) नगर की सामान्य मृत्यु-दर की तुलना से यह सिद्ध होता है कि यदि (अ) नगर को (ब) नगर की ही स्थिति में रख दिया जाय तो भी (अ) नगर (ब) नगर की अपेक्षा अस्वस्थ ही रहेगा। इसी पद्धति को हम विवाह-दर, जन्म–दर, बेकारी-दर इत्यादि मालूम करने में अपना सकते हैं।

वर्गकरणी माध्य (Quadratic Mean)

कभी कभी जब किसी समंकमाला के कुछ अंक अनुलोम और कुछ विलोम होते हैं तो मध्यक निकालने का साधारण ढंग काम नहीं देता और सभी अंकों को जोड़ कर उनकी संख्या से भाग दे देने पर एक बिल्कुल ही असंबद्ध संख्या प्राप्त होती है। ऐसी स्थिति में नीचे लिखे किसी भी एक ढंग का प्रयोग किया जा सकता है।

(१) सभी अंकों को जोड़ कर कुल संख्या से भाग दे दिया जाय, परन्तु यह आवश्यक है कि अंकों को जोड़ते समय अनुलोम और विलोम चिन्हों पर ध्यान न दिया जाय। इस रीति में एक बहुत बड़ा दोष यह है कि अर्थ रखने वाले गणित के (+) और (—) चिन्हों को बिल्कुल छोड़ दिया जाता है।

(२) समंकमाला के अनुलोम और विलोम सभी अंकों के वर्ग बना लिये जाँय और समस्त वर्गों को जोड़ कर उनकी संख्या से भाग देकर लब्धि का वर्गमूल निकाल लिया जाय। इस मध्यक को वर्गकरणी माध्य (Quadratic Average) कहते हैं इस पद्धति से (+) और (—) चिन्हों को महत्वहीन समझ कर छोड़ा नहीं जाता वरन् गणित की ही एक क्रिया (वर्ग निकालना) द्वारा दूर कर दिया जाता है। इस प्रकार इस माध्य का निम्नलिखित सूत्र होगा।

$$Q\ M. = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 \ldots\ldots n^2}{N}}$$

$$\text{वर्गकरणी माध्य} = \sqrt{\frac{\text{अ}^2 + \text{ब}^2 + \text{स}^2 \ldots\ldots \text{ज्ञ}^2}{\text{यो}}}$$

प्रतिनिधि और विवरणात्मक मध्यक

यद्यपि हम किसी भी समंक का मध्यक मालूम कर सकते हैं परन्तु यह कहना कठिन है कि वह मध्यक सम्पूर्ण समग्र का प्रतिनिधित्व करता है जब तक कि मध्यक आकृति स्वयं भी समग्र में न पाई जाय। यदि प्राप्त मध्यक समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति को दिग्दर्शित करने के अतिरिक्त उसमें पाया भी जाय तो ऐसे मध्यक को प्रतिनिधि मध्यक (Typical Average) कहते हैं। यदि समग्र में अंक बहुत विषम हों या समंक अपूर्ण हों तो प्रतिनिधि मध्यक प्रायः नहीं पाया जाता और प्राप्त मध्यक को उसके केवल विवरणात्मक महत्व के कारण विवरणात्मक मध्यक कहते हैं।

व्यापारिक मध्यक

व्यापारिक मध्यक साधारण मध्यक के ही प्रयोग से बनते हैं और प्रायः तीन प्रकार के होते हैं— (अ) चल माध्य (Moving Average), (ब) प्रगामी माध्य (Progressive Average) और (स) संग्रथित माध्य (Composite Average)।

चलमाध्य साधारण मध्यक का ही एक रूप है जिसमें ऊपर वाली संख्याओं को एक एक करके क्रमशः छोड़ते जाते हैं और नीचे वाली संख्याओं को क्रमशः सम्मिलित करके माध्य निकालते हैं। इसे प्रायः किसी विषम अवधि जैसे तीन वर्ष, पाँच वर्ष, सात वर्ष, इत्यादि, के लिये मालूम करते हैं, जिससे प्राप्त माध्य को बीच के वर्ष के सामने रखा जा सके। यदि किसी व्यवसाय घर में त्रिवर्षीय चल-माध्य लिया जाय तो पहले तीन चल माध्य निम्नलिखित होंगे—

$$\frac{a+b+c}{3}, \qquad \frac{b+c+d}{3}, \qquad \frac{c+d+e}{3}$$

$$\frac{\text{अ}+\text{ब}+\text{स}}{\text{३}}, \qquad \frac{\text{ब}+\text{स}+\text{द}}{\text{३}}, \qquad \frac{\text{स}+\text{द}+\text{क}}{\text{३}}$$

चल माध्य का प्रयोग उसी समय किया जाता है जब अल्पकालीन उच्चावचन (Short Period fluctuations) को दूर करके अनियमित समंकमाला को नियमित बनाना होता है।

प्रगामी-माध्य एक संचयी मध्यक है जिसका प्रयोग किसी भी व्यवसाय के शैशव काल में किया जा सकता है। इसे निकालने में प्रत्येक बाद के वर्ष के लाभ को पिछले वर्षों के कुल लाभ में क्रमशः जोड़ कर मध्यक मालूम किया जाता है। इस प्रकार प्रारम्भ के कुछ वर्षों के प्रगामी माध्य निम्नलिखित होंगे :—

$$\frac{a+b}{2}, \quad \frac{a+b+c}{3}, \quad \frac{a+b+c+d}{4}$$

$$\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{२}}, \quad \frac{\text{अ}+\text{ब}+\text{स}}{\text{३}}, \quad \frac{\text{अ}+\text{ब}+\text{स}+\text{द}}{\text{४}}$$

प्रायः प्रत्येक प्रगामी माध्य के सामने एक स्कंभ में प्रगति और अवनति दिखाने के लिये अंक लिख दिये जाते हैं जिससे लाभ के बढ़ने या घटने की प्रवृत्ति स्पष्ट रूप से ज्ञात होती रहे।

संग्रथित माध्य किसी भी व्यवस्था में समय समय पर लिखे गये मध्यकों का एक सम्मिलित मध्यक होता है। इस प्रकार यदि किसी व्यवसाय घर में विभिन्न मासिक मध्यक य_1, य_2, य_3, य_4, इत्यादि हैं, तो वर्ष भर का संग्रथित मध्यक निम्नलिखित होगा :—

$$\text{Composite Mean} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots\ldots x_{12}}{N}$$

$$\text{संग्रथित मध्यक} = \frac{\text{य}_1+\text{य}_2+\text{य}_3+\text{य}_4\ldots\ldots\text{य}_{12}}{\text{१२}}$$

गुणोत्तर-माध्य

गुणोत्तर-माध्य (Geometric Mean) किन्हीं भी अनन्त अंकों के गुणनफलों के योग का अनन्त मूल (Nth root) होता है। इस प्रकार यदि तीन संख्यायें २, ४ और ८ हैं तो उनका गुणोत्तर माध्य $\sqrt[३]{२\times४\times८} = \sqrt[३]{६४} = ४$ होगा। इस प्रकार यदि य_1, य_2, $\text{य}_3\ldots\ldots\text{य}_{\text{अ}}$

विभिन्न संख्याओं के लिये प्रयोग किये जायँ तो गुणोत्तर माध्य निम्न-लिखित सूत्र से निकाला जायगा।

$$Gm = \sqrt[n]{a \times b \times c \times d \times e \ldots\ldots x^n}$$

$$\text{गुणोत्तर माध्य} = \sqrt[\text{अ}]{\text{य}_1 \times \text{य}_2 \times \text{य}_3 \times \text{य}_4 \cdots \text{य}_\text{अ}}$$

प्रायः वर्ग मूल या घनमूल तो मालूम किये जा सकते हैं परन्तु अनन्त संख्याओं के गुणनफलों का अनन्त मूल निकालना हो वहाँ साधारण गणित की क्रिया से काम नहीं चलता और छेदामाला (Logarithm Tables) का प्रयोग करना पड़ता है। छेदामाला के प्रयोग से गणित की कठिन क्रियायें आसान हो जाती हैं जैसे,

$$(a \times b) = \text{Anti log } (\log a + \log b)$$

$$(\text{अ} \times \text{ब}) = \text{अच्छेद } (\text{छेदा अ} + \text{छेदा ब})$$

$$\frac{a}{b} = \text{Anti log } (\log a - \log b)$$

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} \text{ अच्छेद } (\text{छेदा अ} - \text{छेदा ब})$$

$$a^n = \text{Anti log } (n \log a)$$

$$\text{अ}^{\text{अ}} = \text{अच्छेद } (\text{अ छेदा अ})$$

$$\sqrt[n]{a} = \text{Anti log}\left(\frac{1}{n} \log a\right)$$

$$\sqrt[\text{अ}]{\text{अ}} = \text{अच्छेद}\left(\frac{१}{\text{अ}} \text{ छेदा अ}\right)$$

छेदा माला के प्रयोग से हम गुणोत्तर माध्य का निम्नलिखित सूत्र प्राप्त करते हैं:—

$$G. M. = \text{Anti log} \left\{ \frac{\log a + \log b + \log c + \ldots\ldots \log n}{n} \right\}$$

$$\text{गु. मा.} = \text{अच्छेद} \left\{ \frac{\text{छेदा य}_1 + \text{छेदा य}_2 + \text{छेदा य}_3 \ldots\ldots \text{छेदा य}_\text{अ}}{\text{अ}} \right\}$$

उदाहरण—गुणोत्तर माध्य

आकृति (Size)		छेदांक (Logarithms)
५९·६	$य_1$	१·७७५२
७१५·२	$य_2$	२·८५४३
१०·०	$य_3$	१·००००
११५·२	$य_4$	२·०६०७
२०·०	$य_5$	१·३०१०
७५·५	$य_6$	१·८७७९
२·५	$य_7$	·३९७९
अ = ७		११.२६७०

$$\text{गु. मा.} = \text{अच्छेद} \left\{ \frac{\text{छेदा } य_1 + \text{छेदा } य_2 + \text{छेदा } य_3 \ldots\ldots \text{छेदा } य_{अ}}{अ} \right\}$$

$$= \text{अच्छेद} \left\{ \frac{११·२६७०}{७} \right\}$$

$$= \text{अच्छेद } १·६$$

$$= ३९·८१$$

गुणोत्तर माध्य के लक्षण

(१) यदि समंक माला के सभी अंक बराबर न हों तो गुणोत्तर माध्य हमेशा साधारण मध्यक से छोटा होगा।

(२) ये मध्यक की अपेक्षा उच्चतम और न्यूनतम समंकों को बहुत कम महत्व देता है।

(३) इसे मालूम करने में बहुत काफी समय लगता है और इस कारण इसका प्रयोग बहुत कम किया जाता है।

(४) यदि सभी दिय हुए समंक अनुलोम (Positive) हों तो बिल्कुल यथार्थ गुणोत्तर माध्य निकाला जा सकता है।

(५) इसे कभी कभी छेदा मध्यक कहते हैं। क्योंकि इसे मालूम करने में प्राय: छेदा माला का प्रयोग करना पड़ता है।

गुणोत्तर-माध्य के गुण

(१) क्योंकि इसे निकालने में समग्र के सभी अंकों का प्रयोग किया जाता है। इसलिये ये समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति को स्पष्ट करने में पूर्णतया समर्थ होता है।

(२) ये बड़े अंकों को कम और छोटे अंकों को अधिक महत्व देता है इसलिये यह मध्यक की अपेक्षा विषमताओं का अधिक सन्तुलन करता है।

(३) जनसंख्या, नौकरी या मृत्यु की वार्षिक दरों की तुलना करने में इसका विशेष उपयोग किया जाता है।

(४) इस पर बीजगणित की क्रिया के प्रयोग किये जा सकते हैं।

(५) मध्यक के समान गुणोत्तर माध्य से भी आकृतियों का कुल योग निकाला जा सकता है।

गुणोत्तर-माध्य के दोष

(१) गणित से अनभिज्ञ व्यक्तियों की गुणोत्तर माध्य कठिनाई से समझ में आता ह।

(२) यदि दिये हुये समंकों में से कोई एक समंक भी शून्य हो तो गुणोत्तर माध्य नहीं निकाला जा सकता क्योंकि कुल गुणनफल शून्य हो जायगा।

(३) इसे केवल निरीक्षण द्वारा नहीं मालूम किया जा सकता है।

(४) यह केवल केन्द्रीय प्रवृत्ति का दिग्दर्शन करा सकता है और एक प्रतिनिधि माध्य नहीं होता।

गुणोत्तर-माध्य के प्रयोग

गुणोत्तर माध्य का प्रयोग निम्नलिखित परिस्थितियों में उपयोगी सिद्ध होता है:—

(१) जब किन्हीं दो संख्याओं के अन्तर की अपेक्षा उनके अनुपात पर अधिक महत्व देना हो।

(२) जब समान अनुपातिक परिवर्तनों को बराबर भार देना हो।

(३) जब छोटी संख्याओं को बड़ी संख्याओं की अपेक्षा अधिक महत्व देना हो।

(४) जब निर्देशांक (Index Nos.) बनाने हों।

(५) जब समंकमाला में अनुलोम विषमता (Positive Skewness) पाई जाय।

(६) जब परिवर्तनों की दरों का माध्य मालूम करना अभीष्ट हो।

हरात्मक मध्यक

हरात्मक मध्यक (Harmonic Mean) विभिन्न अंकों के व्युत्क्रमों (Reciprocals) के साधारण मध्यक का व्युत्क्रम (Reciprocal) होता है। किसी भी अंक का व्युत्क्रम उसकी संख्या को उसके हर के रूप में रखकर मालूम किया जा सकता है। अर्थात् (अ) का व्युत्क्रम($\frac{१}{अ}$)होगा और ($\frac{४}{५}$)का व्युत्क्रम($\frac{५}{४}$)होगा। यदि $य_1$, $य_2$, $य_3$, $य_4$......इत्यादि संख्याओं का हरात्मक मध्यक निकालना हो तो निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जायगा—

$$H.\ M. = \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{n}}$$

$$ह.\ म. = \frac{अ}{\frac{१}{य_1} + \frac{१}{य_2} + \frac{१}{य_3} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{१}{अ}}$$

जब अधिक बड़ी संख्यायें होती हैं तो क्रिया की सुविधा के लिये व्युत्क्रम माला का प्रयोग किया जाता है और ऐसी दशा में सूत्र में निम्नलिखित परिवर्तन हो जाता है।

$$ह.\ म. = व्युत्क्रम \left\{ \frac{\frac{१}{य_1} + \frac{१}{य_2} + \frac{१}{य_3} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{१}{य_{अ}}}{अ} \right\}$$

हरात्मक मध्यक निकालने में व्युत्क्रम माला से विभिन्न अंकों का व्युत्क्रम मालूम करके उनके जोड़ को अंकों की संख्या से भाग देकर प्राप्त लब्धि का व्युत्क्रम निकाल लिया जाता है।

हरात्मक मध्यक

आकृति (Size)	व्युत्क्रम (Reciprocals)
६·५	·१५३८
१६९·०	·००५९
११·०	·०९०९
११२·५	·००८९
१४·२	·०६९९
७५·५	·०१३३
३५·५	·०२८२
२१५·०	·००४७
अ = ८	·३७५६

$$\text{ह.म.} = \text{व्युत्क्रम} \left\{ \frac{\frac{१}{य_१} + \frac{१}{य_२} + \frac{१}{य_३} \cdots \frac{१}{य_{अ}}}{अ} \right\}$$

$$= \text{व्युत्क्रम} \left\{ \frac{·३७५६}{८} \right\}$$

$$= \text{व्युत्क्रम } ·४६९$$

$$= २·१३२$$

हरात्मक मध्यक के लक्षण

(१) यह बीजगणित की क्रियाओं के लिये उपयुक्त है।

(२) यह एक अप्रसिद्ध मध्यक है और इसे निकालने में काफी समय और श्रम लगता है।

(३) यह केवल समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति समझाता है और इसका स्वयं समग्र में पाया जाना शंकापूर्ण है।

(४) समय, दर या अन्य घटनाओं के नापने में इसका विशेष प्रयोग किया जाता है।

(५) यह छोटे अंकों को अधिक और बड़ों को कम महत्व देता है, इसलिये यह हमेशा ही साधारण गुणोत्तर माध्य से कम रहता है।

क्षीण मध्यक

भूयिष्ठक, मध्यका और मध्यक को उनकी सरलता, सुगमता और उपयोगिता के कारण अधिक महत्वशाली माध्य कहा जाता है। गुणोत्तर, और हरात्मक और वर्गकरणी माध्यों को क्षीण मध्यक (Minor Means) कहा जाता है, क्योंकि उनका प्रयोग बहुत कम किया जाता है और वे उसी समय अधिक उपयोगी सिद्ध होते हैं जबकि अनुपातों या परिवर्तनों को महत्व देना अभीष्ट हो।

माध्यों की सापेक्षिक स्थिति

प्रायः समग्र के विभिन्न समंकों में दो प्रकार का अंक-वंटन होता है— (अ) संमित अंक–वंटन (Symmetrical item–distribution) और (ब) असंमित अंक-वंटन (Asymmetrical item–distribution)। यदि समंकों का वंटन संमित हो और समंकमाला का यदि एक विन्दुरेखीय चित्र बनाया जाय तो प्रायः एक घंटी के समान गोल वक्र बनेगा। ऐसे वक्र को सामान्य वक्र (Normal Curve) भी कहते हैं, जिसके मुख्य लक्षण अगले अध्याय में विस्तारपूर्वक समझाये गये हैं। इस सामान्य वक्र के दो प्रमुख लक्षण हैं, जिनका सम्बन्ध माध्यों की सापेक्षिक स्थिति से है—(अ) इस सामान्य अंक-वंटन में भूयिष्ठक केवल एक ही होता है और भूयिष्ठक, मध्यका और मध्यक सभी की आकृति एक ही होती है। (ब) मध्यका से चतुर्थांश १ और चतुर्थांश ३ बराबर दूरी पर होते हैं।

यदि समग्र के अंक–वंटन में उपरोक्त गुण न पाये जाँय तो उसे असंमित वंटन कहते हैं। दूसरे शब्दों में हम यह सकते हैं कि यदि किसी समग्र में एक से अधिक भूयिष्ठक हों, भूयिष्ठक, मध्यका और मध्यक तीनों की आकृति बराबर न हो या चतुर्थांश १ और चतुर्थांश ३ मध्यका से बराबर दूरी पर

न हों तो उसका अंक-वंटन असंमित होगा ऐसे अंक-वंटन को विषम अंक-वंटन (Skewed Distribution) भी कहते हैं।

एक संमित वंटन में भूयिष्ठक, मध्यका और मध्यक एक होने चाहिये परन्तु विषम समंकमाला में वे एक नहीं होते और एक साधारण विषम समग्र में उनकी निम्नलिखित स्थिति होती है—

Mean—Mode = 3 (Mean—Median)

or Mode = Mean—3 (Mean—Median)

मध्यक—भूयिष्ठक = ३ (मध्यक—मध्यका)

या भूयिष्ठक = मध्यक—३ (मध्यक—मध्यका)

किसी भी विषम समग्र में प्राय: मध्यक गुणोत्तर माध्य से हरात्मक माध्य की अपेक्षा बड़ा होता है। सूत्रानुसार मध्यक > गुणोत्तर माध्य > हरात्मक माध्य। किसी संमित समग्र में ये सब बराबर होंगे।

यदि किसी भी समग्र के अंकों में समान्तर बृद्धि (Arithmetical-Progression) हो तो भूयिष्ठक और मध्यका गुणोत्तर माध्य की अपेक्षा मध्यक के अधिक समीप होंगे। इसके विपरीत यदि समग्र में अंकों का विचलन गुणोत्तर बृद्धि (Geometrical Progression) के अनुसार हो तो भूयिष्ठक और मध्यका मध्यक की अपेक्षा गुणोत्तर माध्य के अधिक समीप होंगे।

किसी भी समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति को बतलाने के लिये भूयिष्ठक और मध्यका की अपेक्षा मध्यक अधिक उपयुक्त अकेली संख्या होती है। क्योंकि इसमें समग्र के छोटे बड़े सभी अंक सम्मिलित होते हैं। मध्यक में इस प्रकार विवरणात्मक उपयोगिता तो है परन्तु प्रतिनिधिकता नहीं यदि एक प्रतिनिधि माध्य की आवश्यकता हो तो हमें मध्यका या भूयिष्ठक को चुनना होगा। यदि उच्चतम और निम्नतम अंकों की अपेक्षा अधिकतम आकृति वाले अंक की आवश्यकता हो तो केवल भूयिष्ठक ही उपयोगी सिद्ध होगा।

माध्यों का चुनाव

विभिन्न प्रकार के माध्यों से प्रत्येक का चुनाव सांख्यिक (Statistician) के पूर्व निश्चित उद्देश्य पर निर्भर रहता है यदि उसे समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति का दिग्दर्शन कराना हो और उसे सर्वसाधारण के विचारार्थ न

रखना हो तो वह मध्यक निकालेगा । यदि जनसाधारण के लिए एक सुगम संख्या प्राप्त करना अभीष्ट हो जो केन्द्रीय प्रवृत्ति का करीब करीब दिग्दर्शन कराने के अतिरिक्त स्वयं भी समग्र में पाई जाय तो भूयिष्ठक या मध्यका निकालना आवश्यक होगा । यदि समग्र के सभी अंकों को समान महत्व देना हो तो मध्यक, यदि बड़े अंकों को कम और छोटों को अधिक महत्व देना हो तो गुणोत्तर या हरात्मक माध्य और यदि अकृतियों से आवृत्ति को अधिक महत्व देना हो तो मध्यका और यदि केवल सर्वाधिक आवृत्ति को महत्व देना हो तो भूयिष्ठक का प्रयोग करना चाहिए ।

माध्यों का चुनाव समग्र के अंक-वंटन पर भी निर्भर होता है । श्री० वाल्श महोदय के अनुसार माध्यों के प्रयोग में निम्नलिखित तथ्यों का ध्यान रखना चाहिए ।

(१) यदि किसी समंकमाला में उच्चतम और निम्नतम सीमाओं की निश्चित आकृतियाँ न दी हों तो साधारण मध्यक का प्रयोग करना चाहिए।

(२) जहाँ निम्न सीमा निश्चित हो परन्तु उच्च सीमा का कोई पता न हो । वहाँ गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करना चाहिए ।

(३) जहाँ उच्च और निम्न सीमायें निश्चित हों और ऊपर के नियम न लागू होते हों तो भूयिष्ठक निकालना चाहिए । यदि वह मध्यक के अधिक निकट हो । परन्तु यदि भूयिष्ठक गुणोत्तर माध्य के अधिक समीप हो तो गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करना चाहिए ।

यदि किसी समग्र के अंक-वंटन के स्वरूप का अध्ययन करना हो तो मध्यका और चतुर्थांश इत्यादि निकालना चाहिये । इसी प्रकार यदि समग्र के किसी विशेष अंग का अध्ययन करना हो तो विभिन्न स्थानिक मूल्यों (Positional values) का प्रयोग करना चाहिये । सेक्राइस्ट महोदय के कथनानुसार "माध्यों के कार्य एकदम स्पष्ट होने के कारण उनका उचित प्रयोग किया जाना चाहिए, और ऐसा करते समय उनके लक्षणों पर ध्यान देना अत्यन्त आवश्यक है ।"

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. What is a Statistical Average (सांख्यिकीय माध्य). How is it that different averages are taken for different purposes ?

Find out the average of (a) motion in the case of a person who rides the first mile @ 10 miles an hour, the next mile @ 8 miles an hour, and the third mile @ 6 miles an hour. (b) increase in population which in the first decade has increased 20%, in the next 25% and in the third 44%.

(*B. Com., Agra,* 1938).

[(a) Harmonic Mean (हरात्मक मध्यक) $=7\frac{31}{47}$
(b) Geometric Mean (गुणोत्तर मध्यक) $=29{\cdot}3$]

2. Compare Mean (मध्यक), Mode (भूयिष्ठक), Median (मध्यका) as averages representing groups. Explain with illustrations the particular circumstances, in which case each of them may be most advantageously used.

(*B. Com., Agra,* 1940).

3. What is the purpose served by an average ? Discuss the special advantages attached to the different averages and illustrate their uses ? (*B. Com., Agra,* 1942).

4. Define (a) Arithmetic average (मध्यक) (b) Geometric average (गुणोत्तर मध्यक) (c) Median (मध्यका) and (d) Mode, (भूयिष्ठक) which, of the three is the most representative and why ? (*M. Com., Agra,* 1945).

5. From the following Statements select any two which are correct and any three which are incorrect, in respect of each of such five statements selected by you. Give your comment explaining briefly why you consider the statement correct or incorrect :—

(i) The Median may be considered more typical than the Mean because the Median is not affected by the size of the extremes;

(ii) The Standard error (प्रमाप विभ्रम) of the Median is 0·6745 of the standard deviation (प्रमाप विचलन);

(iii) In a Frequency distribution (आवृत्ति वंटन) the true value of the Mode cannot be calculated exactly;

(iv) The Geometric mean cannot be used in the averaging of index numbers because it gives undue importance to small numbers;

(v) The base of any weighted index number (भारित निर्देशांक) cannot be shifted with accuracy without recalculating the entire series except when the average used is the Geometric mean;

(vi) The Harmonic Mean (हरात्मक मध्यक) of a series of fractions is the same as the Reciprocal (व्युत्क्रम) of the Arithmetic Mean of the series.

(*P.C.S.* 1948).

6. Below are given figures of production of wheat in a certain area during the 55 years in thousand tons :—

1.	14.20	12.	20.70	23.	17.80	34.	19.95	45.	44.50
2.	16.45	13.	28.95	24.	12.96	35.	11.35	46.	23.65
3.	12.25	14.	26.10	25.	31.90	36.	27.45	47.	6.35
4.	9.20	15.	15.10	26.	23.50	37.	30.65	48.	38.95
5.	42.50	16.	24.44	27.	16.65	38.	20.65	48.	19.50
6.	25.50	17.	22.25	28.	8.10	39.	13.65	50.	25.45
7.	20.85	18.	18.50	29.	13.10	40.	24.50	51.	34.60
8.	17.85	19.	10.15	30.	24.85	41.	29.10	52.	19.35
9.	3.95	20.	24.10	31.	32.50	42.	36.10	53.	37.50
10.	14.85	21.	33.50	32.	23.00	43.	15.85	54.	47.50
11.	21.32	22.	26.75	33.	21.95	44.	26.50	55.	29.90

(a) Find a frequency distribution with equal class-intervals of 5.00 thousand tons, beginning the first class with '000 thousand tons.

(b) From the frequency distribution, calculate the Arithmetic Mean, the Median and the Mode.

(c) Find Median from the ungrouped data.

(d) The Arithmetic Mean from the ungrouped data is 22·89 thousand tons. Can you explain why this differs from the Arithmetic Mean as calculated from the frequency distribution and under what conditions the two Arithmetic Means would be identical ?

(*P.C.S.*, 1948).

7. Write Short notes on :—

Frequency Distribution (अवृत्ति वंटन), Mode, Median, Mean, Geometric Mean, Harmonic Mean, Quadratic Mean (वर्गकरणी माध्य), Weighted Average, Standardised death rate (आदर्शित मृत्युदर), Discrete Series, Progressive average, (प्रगामी माध्य) Statistical unit, (सांख्यिकीय एकक), Moving average, (चल माध्य).

8. Statistics help collective agreement of wage adjustments. What data are required for the consideration of a revision in wage rates in a factory ? Which average will you utilize and why ?

(*M. Com.*, *Alld.*, 1943).

9. Compare the merits and demerits of the Median and the Mode. In which of the following problems would they be most useful ?

(a) Skull measurement.
(b) Size of holdings.
(c) Comparison of intelligence.
(d) Marks obtained in any examination.

(*M. A.*, *Agra*, 1943).

10. The marks obtained by students of classes A & B are given below. Give as much information as you can regarding the composition of the classes in respect of intelligence.

Marks obtained	No. of students Class A	No. of students Class B
5—10	1	5
10—15	10	6
15—20	20	15
20—25	8	10
25—30	6	5
30—35	3	4
35—40	1	2
40—45	0	2

[Median (मध्यका) A=18·5 B=19·6
M. D=(मध्यका विचलन) A=4·8 B = 6·8]

(*B. Com., Agra*, 1939).

11. Find the Mode (भूयिष्ठक) and the Median (मध्यका) from the following table by the use of graphs and check the results by calculations.

Marks	Students	Marks	Students
0—10	2	40—50	35
10—20	18	50—60	20
20—30	30	60—70	6
30—40	45	70—80	3

[Mode (भूयिष्ठक)=35·38
Median (मध्यका)=36·66]

(*B. Com., Agra.*, 1941).

12. The monthly incomes of 10 families in rupees in a certain locality are given below :—

Family	A	85	F	8
,,	B	70	G	45
,,	C	15	H	250
,,	D	75	I	40
,,	E	500	J	36

Calculate the Mean, the Geometric Mean (गुणोत्तर मध्यक) & the Harmonic Mean (हरात्मक मध्यक). Which of the above three averages represents the figures best ?

[A (मध्यक) = 113·6 H (हृ. मा.)=30·03
G (गु. मा.)= 79·98]

(*M. A., Agra*, 1955).

13. From the following figures given below, find the Mode, (भूयिष्ठक) Median (मध्यका) and Quartiles (चतुर्थांश). What information could you deduce from them ?

Age	No. of Persons
20—25	50
25—30	70
30—35	100
35—40	180
40—45	150
45—50	120
50—55	70
55—60	59

[Mode (भू)=38·6 Q_1 ($च_1$) =34
Median (मा) =40 Q_3 ($च_3$)=47]

(*B. Com., Agra*, 1949).

14. From the table given below, find the Mean (मध्यक) and the Mode (भूयिष्ठक) :—

Marks	No. of Candidates
1— 5	7
6—10	10
11—15	16
16—20	32
21—25	24
26—30	18
31—35	10
36—40	5
41—45	1

(*B. Com., Agra*, 1951).

{ Mean (म)=20·36 Mode (भू)=19—Taking series as it is.
Mean (म)=20·36 Mode (भू)=18·5—When series is changed into an exclusive one }

15. According to the Census of 1941, the following are the population figures in thousands, of the first 36 cities of India.

2488	391	203	178
1490	360	176	131
777	258	213	147
733	437	176	143
522	284	193	181
672	302	160	153
591	263	213	142
407	260	169	92
387	239	204	151

Find Median (मध्यका) and Quartiles (चतुर्थांश).

[Median (मा) = 226 Q_3 (च$_3$)=403
Q_1 (च$_1$) = 170·75]

(*M. Com., Agra,* 1948).

16. The following table gives the number of persons with different incomes in the U.S.A. during the year 1929·

Income in thousands of dollars	No. of persons in lakhs
Under 1	13
1—2	90
2—3	81
3—5	117
5—10	66
10—25	27
25—50	6
50—100	2
100—1000	2

Calculate the average income per head.

[a (मध्यक) =$8.06 Lakhs] (*B. Com., Luck.,* 1939).

17. The following table gives the population of males at different age groups of the U.K. and India at the time of the census (जनगणना) of 1931.

Age group	U.K. Lakhs	India Lakhs
0— 5	18	214
5—10	19	258
10—15	20	222
15—20	18	157
20—25	16	145
25—30	14	161
30—40	27	257
40—50	25	184
50—60	19	120
Above 60	17	100

Calculate the average age of males in U. K. and India and Comment on the difference.

[Mean (मध्यक) U.K. =29·62
Mean (मध्यक) India = 25·33] (*B. Com., Luck.*, 1941).

18. The following table gives the marks obtained by a batch of 30 B. Com. students in a class-test in Statistics (Max Marks 100).

Roll No.	Marks obtained	Roll No.	Marks obtained
1	33	16	24
2	32	17	33
3	55	18	42
4	47	19	38
5	21	20	45
6	50	21	26
7	27	22	33
8	12	23	44
9	68	24	48
10	49	25	52
11	40	26	30
12	17	27	58
13	44	28	37
14	48	29	38
15	62	30	35

Find the values of the Mode (भूयिष्ठक), the Median (मध्यका) and the Quartiles (चतुर्थांश)

[M (मा) = 39 Q^3 (च$_3$) = 48·25
Q_1 (च$_1$) = 30·67 Mode (भू) = 33]

(*B. Com., Alld.*, 1938).

19. Compute the Weighted Geometric Average of Relative Prices of the following commodities for the year 1939 (Base year 1938-Price=100).

Commodity	Relative Price	Weight Value produced in 1938
Corn	128·8	1385
Cotton	62·4	819
Hay	117·7	842
Wheat	99·0	561
Oats	130·9	408
Potatoes	143·5	194
Sugar	125·6	142
Barley	150·2	100
Tobacco	101·1	103
Rye	116·2	25
Rice	117·5	17
Oil Seeds	78·7	29

{ Simple Geometric Mean = 111·3
Weighted Geometric Mean = 109·14
(भारित गुणोत्तर मध्यक) = १०९·१४ }

(*B. Com., Alld.*, 1943).

20. Refer to the following frequency table and find out the Mean, Median and Mode.

Class-Intervals (Score)	Frequencies
130—134	1
125—129	2
120—124	4
115—119	7
110—114	9
105—109	10
100—104	15
95— 99	28
85— 94	41
80— 84	72
75— 79	39
70— 74	29
65— 69	23
60— 64	17
55— 59	11
50— 54	8
45— 49	6
40— 44	3
35— 39	2
30— 34	2

Median (मा) = 81·7
Mode (भू) = 82·6
Mean (म) = 81·6

(*L. T.* 1945).

21. The scores obtained by boys of 11 in an intelligence test are given below :—

10, 47, 52, 50, 68, 71, 67, 65, 70, 73, 36, 43, 38, 78, 80, 84, 27, 30, 20, 93, 94, 97, 59, 63, 56, 64, 58, 60, 57.

(a) Make a frequency distribution of these scores choosing a suitable class-interval (संभागान्तर) and draw the frequency curve (वक्र).

(b) Calculate the Mean and the Standard Deviation (प्रमाप विचलन). (*L. T.*, 1947).

[Mean (म) =58·9
S.D. (प्र. वि)=21·1]

22. Calculate the Average, Median and upper and lower Quartile ages in the following table :—

Age group	Population in thousands	
	1881	1931
0— 4	3520	3280
5— 9	3160	3500
10—19	5340	7200
20—29	4560	6640
30—39	3420	5980
40—49	2660	5240
50—59	1900	3780
60—69	1320	2440
70—79	600	1220
80 and over	120	320

	1881	1931
Median	22·8	28·7
Q_1=	9.9	14.33
Q_3=	39·8	45.9

(*M. A., Agra*, 1940).

23. The Frequency distribution of cost of production of gur in Rupees per maund for different holdings in two districts is given below. Find the average cost in each district and test whether there is any significant difference.

Cost in Rupees per md.	District A	District B
2— 3	9	1
3— 4	32	10
4— 5	37	34
5— 6	21	23
6— 7	13	21
7— 8	7	14
8— 9	5	10
9—10	2	9
10—11	1	5
11—12	2	2
12—13	1	1
Total	130	130

[Mean (मध्यक) A =5·08 B = 6·28] (*I.C.S.*, 1939).

24. The following is the frequency distribution of a random sample of 509 employees by weekly earnings. Calculate the average weekly earning and its Sampling error (निदर्शन विभ्रम).

Weekly Earning	Number of Employees
10	3
12	6
14	10
16	15
18	24
20	42
22	75
24	90
26	79
28	55
30	36
32	26
34	19
36	13
38	9
40—42	7

[Average Weekly Earning=Rs. 26·2] (*I.A.S.* 1948).

25. Compare the relative advantages and disadvantages of the Arithmetic mean, Median and Mode.

The following table gives the results of certain examinations of three Universities in the year 1936. Which is the best University ? Give reasons for your answer.

University Examination	Percentage results in University		
	A	B	C
M. A.	80	75	70
M. Sc.	70	70	60
B. A.	65	80	70
B. Sc.	60	70	80
B. Com.	75	65	75

(*M. A., Cal.*, 1937).

Percentage results should serve as sizes (आकृति) and assumed number of students appearing in each examination as weights (भार). Determine the weighted Arithmetic average.

26. Amend the following table and locate the Median from the amended table. Also measure the magnitude (आकृति) of the Median (मध्यका) so located.

Sizes	Frequencies
10—15	10
15—17·5	15
17·5—20	17
22—30	25
30—35	28
35—40	30
45 and onwards	40

[Median (मध्यका) =32·85] (*B. Com., Alld.*, 1942).

27. Explain the short-cut Method (लघुरीति) of calculating the Arithmetic Average (मध्यक).

The following data relate to sizes of shoes sold at a stores during a given week. Find the average size by the short-cut Method.

Sizes of Shoes	4.5	5.6	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	11.5	11
No. of pairs	1	2	4	5	15	30	60	95	82	75	44	25	15	4

[Average size=8·40] (*M.A., Cal.,* 1936).

28. The following is the age distribution of candidates appearing at the Matriculation and Intermediate examination of the Patna University in 1937.

Age in years	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	Total
Matriculation	5	48	189	303	522	980	981	794	515	474	×	4811
Intermediate	×	×	×	5	45	87	127	150	155	127	175	871

Compare the Median and Modal ages of the Matriculation candidates with those of I.A. candidates.

(*M. A. Patna,* 1940).

[Median Matric=18·48 I.A.=20·16
Mode " =18·8 I.A.=20·18]

29. From the results of the two Colleges A & B given below state which of them is better and why.

	A College		B College	
	Appeared	Passed	Appeared	Passed
M.A.	30	25	100	80
M. Com.	50	45	120	95
B.A.	200	150	100	70
B. Com.	120	75	80	50
	400	295	400	295

(*B. Com., Luck.,* 1949).

[Determine percentage passed in each Subject and treating percentages as sizes and number appeared as weights determine weighted average.]

30. What is a Weighted Average (भारित माध्य) ? Why and how are weights given ?

Determine which of the town, A & B is more healthy.

A			B		
Age	Population	Deaths	Age	Population	Deaths
0—15	15,000	360	0—15	20,000	500
15—50	20,000	400	15—50	52,000	1,040
50 & above	5,000	140	50 & above	8,000	240
	40,000	900		80,000	1780

(*B. Com., Agra*, 1949).

General Death Rate of Town A=22·5
(सामान्य मृत्युदर)
" " " " B=22·25
Standardized Death Rate of Town B=23·25
(आदर्शित मृत्युदर)

31. The marks (out of a maximum of 100) obtained by candidates in an examination are shown in the following frequency table. Calculate the Arithmetic Average and the Mode.

Marks	Number of candidates
17·5—22·5	2
22·5—27·5	8
27·5—32·5	33
32·5—37·5	80
37·5—42·5	170
42·5—47·5	243
47·5—52·5	213
52·5—57·5	145
57·5—62·5	67
62·5—67·5	35
67·5—72·5	4

(*B. Com., Pt. II, Agra*, 1954).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mean}=46{\cdot}965 \\ \text{Mode}= L_1+\dfrac{f-f_1}{2f_1-f_1-f_2}\times I= 46{\cdot}04 \end{array} \right\}$$

32. (a) In what circumstances would you consider the Arithmetic mean, the Geometric Mean, the Harmonic Mean, respectively the most suitable statistic (माप) to describe the central tendency (केन्द्रीय प्रवृत्ति) of a distribution ?

(b) Determine Mode and the Median from the following figures:—

25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, 20

[Mode (भू) = 25, Median (मध्यका) =25]

(*M. Com., Pt.II, Agra,* 1954).

33. Calculate the Median (मध्यका) and Quartiles (चतुर्थांश) from the frequency table given in question 31 above.

(*B. Com., Pt.II, Agra,* 1954).

[Median (मध्यका) =46·77 Q_1 ($च_1$) =41·25
Q_3 ($च_3$) =52·56]

34. The following is the distribution of wages per thousand employees in a certain factory:—

Daily wages in As.	2	4	6	8	10	12	14
No. of Employees	3	13	43	102	175	220	204
Daily wages in As.	16	18	20	22	24		Total
No. of Employees	139	69	25	6	1		1000

(*M.A. Alld.,* 1940).

[Median (मध्यका)=13·49 Annas, Mode (भू)13·48 Annas
There is no significant difference in the averages]

35. Define the Mean (मध्यक) the Median (मध्यका), and the Mode (भू). Find their values in the case of the heights of trees in a garden whose frequency distribution (आवृत्ति बंटन) is given in the following table:—

Heights	Frequencies (आवृत्ति)
Under 7 feet	26
„ 14 „	57
„ 21 „	92
„ 28 „	134
„ 35 „	216
„ 42 „	287
„ 49 „	341
„ 56 „	360

(*M. A. Math., Agra*, 1947).

[Mean (म) 31 ft. 1″, Mode (भू) 33 ft. 6″, Median (मा) 31 ft. 11″]

36. The foll wing table gives the distribution of population according to age in India and Japan at the time of the last Census 1931.

Age groups in years	Population in Millions	
	India	Japan
0—10	98·9	17·8
10—20	72·5	14·3
20—30	63·2	11·3
30—40	48·6	8·6
40—50	32·6	6·5
50—60	19·4	5·4
60—80	13·2	5·1

Calculate the Average age of people in India and in Japan and comment on the difference.

(*B. Com., Alld.*, 1940).

[India=23·9 years, Japan=26·6 years.]

अध्याय ६.

अपकिरण, विषमता और पृथु शीर्षत्व

(Dispersion, Skewness & Kurtosis)

अपकिरण

पिछले अध्याय में हमने जिन माध्यों का अध्ययन किया है उन्हें प्रथम-घातीय माध्य (Averages of the First Order) कहते हैं, क्योंकि वे किसी भी समग्र के वास्तविक समंकों का ही उपयोग करते हैं और उनका कार्य केवल समग्र को केन्द्रीय प्रवृत्ति को स्पष्ट करना रहता है। उनके द्वारा हमें यह नहीं मालूम हो सकता है कि समग्र में जो समंक पाये जाते हैं वे समान हैं या विषम, उनमें परस्पर विचलन है या नहीं, वे समग्र के माध्य से कितना विचलन करते हैं और समग्र में किन स्थानों पर अंकों का झुकाव अधिक है। यह कार्य द्विघातीय माध्यों (Averages of the Second Order) की सहायता से पूरा किया जा सकता है। द्विघातीय माध्य वे माध्य हैं जो समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति पर आधारित हों या जिनके निकालने में वास्तविक समंकों का प्रयोग न करके व्युत्पन्न समंकों (विचलन) का प्रयोग किया जाता है। द्विघातीय माध्य समग्र के अंकों का अपकिरण, विषमता और अंक-झुकाव (पृथु शीर्षत्व) के अध्ययन में प्रयोग किये जाते हैं।

"अपकिरण" का सांख्यिकी में दो अर्थों में प्रयोग किया जाता है—प्रथम अर्थ के अनुसार अपकिरण अंकों का परस्पर विचलन होता है और दूसरे अर्थ में वह समग्र के विभिन्न आकृतियों का उनके माध्य से विचलन अध्ययन करता है इन्हीं दो अर्थों पर अपकिरण के विभिन्न माप आधारित हैं।

अपकिरण मापों (Measures of Dispersion) का प्रयोग समग्र की प्रकृति को अध्ययन करने में किया जाता है। प्रायः ऐसा देखा जाता है

कि समंकमाला की आकृतियों की विभिन्नताओं का मध्यक पर कोई प्रभाव न पड़े और ऐसे समय में माध्य पूर्णरूप से समग्र का प्रतिनिधित्व न कर सके। यह बात निम्नलिखित सारिणी में स्पष्ट रूप से समझाई गई है।

संभाग (Class interval)	बा 1	बा 2	बा 3	बा 4	बा 5	बा 6
०–१०	१०	४	२०	१०	५	०
१०–२०	१२	६	१६	१०	६	२०
२०–३०	१६	२२	१२	१२	८	२०
३०–४०	२४	३७	४	२८	१२	२०
४०–५०	१६	१९	१२	२३	८	२०
५०–६०	१२	९	१६	१२	६	२०
६०–७०	१०	३	२०	५	५	०

उपरोक्त ६ समंकमालाओं में यद्यपि अंक-वंटन विभिन्न है, परन्तु प्रत्येक में माध्य ३५ है। पहिले स्कंभ में बारम्बारता वंटन समान है, दूसरे में केन्द्र की ओर अंकों का झुकाव अधिक है, तीसरे में अंकों का झुकाव परिसीमाओं वाले अंकों की ओर अधिक है। चौथे में अंक-वंटन विषम है। पाँचवें में अंक-वंटन समान है परन्तु पहिले स्कंभ का आधा है और छठे में अंक-वंटन समान है परन्तु न्यून अंकों का प्रायः अभाव है, और अंकों का विस्तार बहुत कम है। यह उदाहरण इस सत्य की ओर संकेत करता है कि प्रथमघातीय मध्यक केन्द्रीय प्रवृत्ति के अतिरिक्त समग्र के सम्बन्ध में अन्य कुछ नहीं बतला सकते।

अपकिरण, जैसा कि कहा जा चुका है दो अर्थों में प्रयुक्त होता है–(अ) आकृतियों का परस्पर विचलन और (ब) आकृतियों का अपने माध्य से विचलन। इन्हीं दो अर्थों के ऊपर अपकिरण नापने की दो रीतियाँ आधारित हैं— (१) परिसोमा रीति (Method of limits) और (२) विचलन माध्य रीति (Method of averaging deviations)। जिनका विवरण आगे दिया जा रहा है।

परिसीमा रीति

विचरण विस्तार (Range)

यदि किसी समंकमाला के अंक परस्पर विचलन करते हों तो उनके इस प्रविक्षेप को विचरण विस्तार (Range) के द्वारा नापा जा सकता है। विचरण विस्तार किसी भी समंकमाला के उच्चतम और न्यूनतम आकृतियों के अन्तर को कहते हैं, जो उस समंकमाला के अंकों के परस्पर विचलन की ओर निर्देश करता है और यह माप एक ऐसी संख्या प्रदान करता है जिससे अधिक विचलन समग्र के अंकों में नहीं पाया जा सकता है। यह अपकिरण का सरलतम माप है जिसकी इस प्रकृति के कारण उसका औद्योगिक समस्याओं के समझाने में बहुत अधिक प्रयोग किया जाता है। यदि उच्चतम और न्यूनतम अंक समग्र में अपवाद स्वरूप आ गये हों तो अपकिरण का यह माप समग्र के अंक विचलन को ठीक प्रकार समझाने में असमर्थ होगा। इसके द्वारा समग्र के अंक-वंटन का स्वरूप भी स्पष्ट नहीं हो पाता और यह नहीं जाना जा सकता कि वह समान है या विषम। यह माप केवल परिसीमा वाले अंकों को ही महत्व देता है और इस कारण इसके द्वारा यह भी नहीं मालूम हो सकता कि उन परिसीमाओं के बीच की आकृतियों में कहाँ अंकों का जमाव अधिक हो गया है।

साँख्यिकी में निरपेक्ष मापों (Absolute Measures) का विशेष महत्व नहीं है और इस कारण तुलना करने के लिये सापेक्षिक (Relative) मापों का प्रयोग किया जाता है। विचरण विस्तार एक निरपेक्ष माप है और उसका सापेक्षिक माप प्रविक्षेप गुणक (Coefficient of Range) कहलाता है जिसे निकालने के लिये विचरण–विस्तार को समग्र के उच्चतम और न्यूनतम आकृतियों के योग से भाग दे दिया जाता है। इसका विशेष प्रयोग उत्पादन के गुणात्मक नियंत्रण (Quality Control) और स्टाक बाजार के मूल्यों और ब्याज की दरों के नापने में किया जाता है।

विचरण विस्तार के लक्षण निम्नलिखित हैं:—

(१) यह बहुत सरलता से मालूम हो जाने के कारण सुगम होता है।

(२) यह एक अत्यन्त अस्थिर अपकिरण माप है। यदि उच्चतम या न्यूनतम परिसीमाओं के अंकों में एक साधारण सा परिवर्तन हो जाय तो विचरण-विस्तार बदल जायगा।

(३) यह समग्र के अंक-वंटन का स्वरूप स्पष्ट करने में असमर्थ है।

(४) यह एक अत्यन्त साधारण माप है और जहाँ समय की कमी होती है, इसका प्रयोग उपयोगी सिद्ध होता है।

चतुर्थांशान्तर विस्तार

किसी भी समग्र के अंकों के परस्पर विचलन को दिग्दर्शित करने के लिये कभी कभी चतुर्थाँशान्तर विस्तार (Interquartile Range) का प्रयोग किया जाता है। यह माप तृतीय और प्रथम चतुर्थाँशों का अन्तर होता है और इसका प्रयोग चतुर्थाँश विचलन (Quartile Deviation) निकालने में किया जाता है। यह माप भी एक अच्छा माप नहीं है, क्योंकि यह स्थानिक मूल्यों (Positional Values) पर आधारित है जो समग्र के किंचित मात्र भी प्रतिनिधि नहीं होते हैं। यदि समग्र के केवल बीच के अंकों का बंटन अध्ययन करना अभीष्ट हो तो इसका प्रयोग उपयोगी सिद्ध होता है। इस माप को यथार्थ माप नहीं कहा जा सकता क्योंकि इस पर व्यक्तिगत अंकों के विचलन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

चतुर्थांश विचलन

चतुर्थाँश विचलन (Quartile Deviation) किसी भी समग्र के तृतीय और प्रथम चतुर्थाँशों के अन्तर का आधा होता है। इस कारण इसे अर्ध-चतुर्थाँशान्तर-विस्तार भी कहते हैं। इसे निकालने का सूत्र निम्नलिखित होगा यदि ($च_3$) और ($च_1$) का प्रयोग दोनों चतुर्थाँशों के लिए किया जाय।

$$Q.\ D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \qquad \text{चतुर्थाँश विचलन} = \frac{च_3 - च_1}{२}$$

यह माप एक ऐसी संख्या प्रदान करता है जिसे यदि ($च_1$) में जोड़ दिया जाय या ($च_3$) में से घटा दिया जाय तो प्राप्त संख्या मध्यका (Median) होती है परन्तु यह केवल एक संमित माला (Symmetrical series) में ही होगा और एक असंमित या विषम माला में मध्यका से ($च_1$) और ($च_3$) के अन्तर बराबर नहीं होंगे। यह भी एक निरपेक्ष माप है और इसका

सापेक्षिक माप चतुर्थांश विचलन गुणक (Coefficient of Quartile Deviation) कहते हैं जिसका सूत्र निम्नलिखित है ।

$$\text{Coeff. of Q. D.} = \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{\frac{Q_3 + Q_1}{2}} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$\text{चतुर्थांश विचलन गुणक} = \frac{\frac{\text{च}_3 - \text{च}_1}{२}}{\frac{\text{च}_3 + \text{च}_1}{२}} = \frac{\text{च}_3 - \text{च}_1}{\text{च}_3 + \text{च}_1}$$

इस माप का प्रयोग ऐसी स्थिति में नहीं किया जा सकता है जब किसी भी समग्र में एक से अधिक न्यादर्श लिए जांय और उनमें आपस में विभिन्नतायें हों क्योंकि इस माप के द्वारा निदर्शन के उच्चावचन (Sampling fluctuations) के सम्बंध में कोई भी संकेत नहीं मिलता । इसका प्रयोग उस समय भी नहीं किया जा सकता जबकि विभिन्न संभागों में आवृत्तियाँ अनियमित हों या अंतिम संभाग अनिश्चित हो । इसके सूत्र का बीजगणितीय (Algebraic) विश्लेषण नहीं किया जा सकता है ।

चतुर्थांश विचलन के गुण

(१) विचरण विस्तार के समान यह माप भी अत्यन्त सरल और सुगम है ।

(२) क्योंकि यह माप उच्चतम और न्यूनतम अंकों को छोड़ देता है और प्रतिनिधि समंक प्रायः समंकमाला के मध्य में ही पाये जाते हैं, इस कारण यह एक प्रतिनिधि माप होता है ।

(३) इसे एक यथार्थ माप नहीं समझा जाता क्योंकि यह विचलनों के ऊपर आधारित नहीं है ।

(४) इसका बीजगणितीय विश्लेषण नहीं किया जा सकता ।

(५) क्योंकि यह माप (च_1) के ऊपर और (च_3) के नीचे के अंक छोड़ देता है इसलिए उस समय यह अनुपयोगी होता है जब कुल अंकों को समान महत्व देना अभीष्ट हो ।

विचलन माध्य रीति

उपरोक्त अपकिरण माप किसी भी समंक क्षेत्र के अंक-वंटन को पूर्ण रूप से समझाने में असमर्थ सिद्ध होते हैं क्योंकि उनका आधार कुछ विशेष स्थिति वाली आकृतियाँ ही होती हैं। विचलन माध्य रीति 'समग्र के माध्य से उसके अंकों के विचलन' पर आधारित है और माध्य समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति को दिग्दर्शक करने वाली सबसे अधिक महत्वपूर्ण संख्या होती है। विचरण-विस्तार केवल प्रारम्भ और अन्त की संख्याओं पर और चतुर्थांश-विचलन बीच की विशिष्ट संख्याओं पर निर्भर माप हैं और वे प्रत्येक समंक के विचलन को कोई महत्व नहीं देते। उनकी अपेक्षा विचलन माध्य रीति से निकाले गये माप अधिक उत्तम होते हैं क्योंकि वे प्रत्येक समंक के विचलन को महत्व देते हैं।

अपकिरण-घात

किसी भी समग्र के अंकों के अपकिरण की मात्रा नापने के लिये पहले उसकी केन्द्रीय प्रवृत्ति को नापना आवश्यक है। केन्द्रीय प्रवृत्ति को नापने के सर्वोत्तम माध्य भूयिष्ठक, मध्यका, और मध्यक होते हैं। इन मध्यकों में से किसी एक को मालूम कर लेने के पश्चात् उससे विभिन्न समंकों के विचलन मालूम किये जाते हैं। इन विचलनों का माध्य मालूम करके समग्र का औसत अपकिरण जाना जाता है। प्राय: अपकिरण के तीन घात (Moments) प्रयोग किये जाते हैं:—

(१) प्रथम अपकिरणघात (First Moment of Dispersion) समंकों के विचलनों के योग को समंक की कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है जिसका सूत्र निम्नलिखित है:—

$$\text{प्रथम अपकिरणघात} = \frac{\Sigma \text{ वि}}{\text{यो}}$$

(२) द्वितीय अपकिरणघात (Second Moment of Dispersion) विचलनों के वर्गों को जोड़ कर उनके योग को संख्याओं के योग से भाग देने पर प्राप्त होता है जिसका सूत्र निम्नलिखित है:—

$$\text{द्वितीय अपकिरणघात} = \frac{\Sigma \text{ वि}^2}{\text{यो}}$$

(३) तृतीय अपकिरणघात (Third Moment of Dispersion) विचलनों के घन निकाल कर उनके योग को कुल संख्याओं के योग से भाग देने पर प्राप्त होता है और उसका सूत्र निम्नलिखित है:—

$$\text{तृतीय अपकिरणघात} = \frac{\Sigma \text{ वि}^3}{\text{यो}}$$

मध्यक विचलन (Mean Deviation)

मध्यक विचलन प्रथमघातीय अपकिरण का दूसरा नाम है, जिसे किसी भी समंकमाला की सभी आकृतियों के मध्यक से विचलनों (Deviations) के योग को समंकों की कुल संख्या से भाग देकर मालूम किया जाता है। जैसा कि पिछले अध्याय में बताया जा चुका है कि यदि किसी समंकमाला में कुछ अंक (+) और कुछ (—) चिन्ह वाले हों तो उनका माध्य निकालने के लिये उन सभी अंकों को (+) चिन्ह वाला मानना होता है नहीं तो प्राप्त माध्य एक ऐसी संख्या आ जाती है जिसका कि समग्र से कोई भी सम्बन्ध नहीं होता है। यह अपकिरण का माप होता है इसलिये यदि आकृतियों में बहुत अधिक अन्तर हो तो मध्यक विचलन भी बहुत अधिक होगा। इसे मध्यक विचलन इसलिए कहते हैं कि यह समंकमाला की विभिन्न आकृतियों के विचलनों का मध्यक होता है। यह अपकिरण का एक प्रतिनिधि माध्य है क्योंकि समंकमाला के सभी अंकों को बराबर महत्व प्रदान करता है।

मध्यक विचलन एक निरपेक्ष माप है और उसका सापेक्षिक माप इसे मध्यक से भाग देकर मालूम किया जाता है। मध्यक विचलन को यूनानी भाषा के (δ) वर्णाक्षर द्वारा समझाया जाता है जिसे (Delta) कहते हैं। यदि ($\Sigma \text{ वि}_{\text{य}}$) का प्रयोग मध्यक से समंकमाला के सभी आकृतियों के विचलनों का योग दिखलाने के लिये किया जाय तो इस माप के निम्नलिखित सूत्र होंगे:—

$$\text{Mean Deviation or } \delta = \frac{\Sigma dx}{N}$$

$$\text{मध्यक विचलन या } \delta = \frac{\Sigma \text{ वि}_{\text{य}}}{\text{यो}}$$

$$\text{Coeff. of M. D.} = \frac{\delta}{a}$$

$$\text{मध्यक-विचलन गुणक} = \frac{\delta}{\text{मध्यक}}$$

इसी प्रकार हम मध्यक के अलावा किसी भी माध्य के प्रयोग के द्वारा मध्यक विचलन मालूम कर सकते हैं और मध्यक-विचलन गुणक मालूम करने के लिये हमें उसी माध्य से मध्यक विचलन को भाग देना चाहिये जिससे कि विचलन (Deviations) प्राप्त किये गये हों। प्रायः मध्यक विचलन निकालने में मध्यका (Median) का प्रयोग किया जाता है क्योंकि अन्य माध्यों की अपेक्षा मध्यका से लिये गये आकृतियों के विचलनों का योग न्यूनतम होता है। भूयिष्ठक से यदि विचलन लिये जाँय तो उनका योग सर्वाधिक होगा और मध्यक से लिये गये विचलनों का योग शून्य के बराबर होता है। यदि मध्यक के अलावा मध्यका या भूयिष्ठक का प्रयोग मध्यक-विचलन निकालने में किया जाय तो उनके सूत्र निम्नलिखित होंगेः—

$$\text{M. D. from Median} = \frac{\Sigma d_M}{N}$$

$$\text{मध्यका से मध्यक विचलन} = \frac{\Sigma \text{वि}_\text{य}}{\text{यो}}$$

$$\text{Coeff. of M. D.} = \frac{\delta}{\text{Median}}$$

$$\text{मध्यका से म. वि. गुणक} = \frac{\text{मध्यका से म. वि.}}{\text{मध्यका}}$$

$$\text{M. D. from Mode} = \frac{\Sigma d_Z}{N}$$

$$\text{भूयिष्ठक से म. वि.} = \frac{\Sigma \text{वि}_\text{य}}{\text{यो}}$$

$$\text{Coeff. of M. D.} = \frac{\delta}{\text{Mode}}$$

$$\text{भूयिष्ठक से म. वि. गुणक} = \frac{\text{भू. से म. वि.}}{\text{भूयिष्ठक}}$$

उदाहरण १—मध्यक विचलन

मास Months	मासिक आय Monthly Earnings	मध्यक से विचलन (Dev. from Median) (Signs Ignored)
१	२००	२५
२	२०५	२०
३	२०६	१९
४	२०७	१८
५	२२०	५
६	२२५	०
७	२२५	०
८	२२५	०
९	२३०	५
१०	२३०	५
११	२४०	१५
१२	२५०	२५
यो = ११		Σ वि$_{\text{य}}$ = १३७

$$\text{Median Item} = \left\{\frac{N+1}{2}\right\} = \left\{\frac{12\times1}{2}\right\} = 6{\cdot}5$$

$$\text{मध्यस्थ अंक} = \left\{\frac{\text{यो}+१}{२}\right\} = \left\{\frac{१२+१}{२}\right\} = ६{\cdot}५$$

Median = 225

मध्यका = २२५

$$\text{Mean dev. from Median} = \frac{\Sigma\, d^{x}}{N}$$

$$\text{मध्यका से म. वि.} = \frac{\Sigma \text{ वि}_{\text{य}}}{\text{यो}}$$

$$= \frac{१३७}{१२} = ११\cdot४१६$$

$$\text{Coeff. of M. D.} = \frac{\delta}{\text{Median}}$$

$$\text{मध्यका से म. वि. गुणक} = \frac{\text{मध्यका से म. वि.}}{\text{मध्यका}}$$

$$= \frac{११\cdot४१६}{२२५} = \cdot०५$$

विच्छिन्न माला में मध्यक विचलन निकालने के लिए सर्वप्रथम समंकों का माध्य (प्रायः मध्यका) मालूम किया जायगा। माध्य मालूम करने के पश्चात् इससे सभी अंकों का विचलन निकाला जायगा और फिर प्रत्येक विचलन को तत्संवादी (Corresponding) आवृत्ति से गुणा करके सभी गुणनफलों का योग मालूम किया जायगा। इस योग को कुल आवृत्तियों के योग से भाग देने पर प्राप्त संख्या मध्यक विचलन कहलायेगी और यदि उसे माध्य से भाग दे दिया जाय तो प्राप्त संख्या मध्यक विचलन गुणक होगा।

उदाहरण २— मध्यक विचलन

आकृति (Size)	आवृत्ति (बा) (Freq.)	विचलन (वि) (Deviations)		वि. × बा	
		मध्यका	मध्यक	मध्यका	मध्यक
४	२	४	५·७	८	११·४
६	४	२	३·७	८	१४·८
८	५	०	१·७	०	८·५
१०	३	२	·३	६	·९
१२	२	४	२·३	८	४·६
१४	१	६	४·३	६	४·३
१६	४	८	६·२	३२	२५·२
	२१			६८	६९·७

(अ) Median $= \left\{\frac{N+1}{2}\right\} = \left\{\frac{21+1}{2}\right\}$ th size $= 8$

मध्यका $= \left\{\frac{\text{यो}+१}{२}\right\} = \left\{\frac{२१+१}{२}\right\}$ की आकृति = ८

M. D. from Median $= \frac{68}{21} = 3{\cdot}238$

मध्यका से म. वि. $= \frac{६८}{२१} =$ ३·२३८

Coeff of M. D. $= \frac{\text{M. D.}}{\text{Median}} = \frac{3{\cdot}238}{8} = {\cdot}40475$

म. वि. गुणक $= \frac{\text{म. वि.}}{\text{मध्यका}} = \frac{३·२३८}{८} =$ ·४०४७५

(ब) Mean $= \frac{204}{21} = 9{\cdot}7$

मध्यक $= \frac{२०४}{२१} =$ ९·७

मध्यक से म. वि. $= \frac{६९·७}{२१} =$ ३·३

मध्यक से म. वि. गुणक $= \frac{\text{म. वि.}}{\text{मध्यक}} = \frac{३·३}{९·७} =$ ·३४

अविच्छिन्न माला में मध्यक विचलन निकालने के लिये पहिले संभागान्तरों के मध्य बिन्दु मालूम किये जाते हैं और तत्पश्चात् सूत्रों के अनुसार माध्य निकाल कर उनसे विचलन मालूम करके, विचलनों और तत्संवादी बारम्बारताओं के गुणनफलों के योग को बारम्बारताओं के कुल योग से भाग दे दिया जाता है। यदि मध्यक विचलन को माध्य से भाग दे दिया जाय तो मध्यक विचलन गुणक प्राप्त हो जाता है जोकि एक अपकिरण का सापेक्षिक माप है।

उदाहरण ३—मध्यक विचलन

आकृति (Size)	बा. (Freq.)	मध्य बिन्दु (Mid. pts.)	मध्यका से विचलन (Dev. from Median)	विचलन × बारम्बारता (Dev×Freq.)
०—५	८	२·५	१०·३	८२.४
५—१०	२२	७·५	५·३	११६·६
१०—१५	४५	१२·५	·३	१३·५
१५—२०	१५	१७·५	४.७	७०·५
२०—२५	१०	२२·५	११·५	९७
२५—३०	७	२७·५	९.७	१०२·९
३०—३५	२	३२·५	१४·७	३९·४
३५—४०	१	३७·५	१९·७	२४·७
	यो=११०			Σ वि$_{य}$ =५४७

$$\text{Median} = L_1 + \frac{I}{F}(MI - CF^P)$$

$$\text{मध्यका} = \text{सी}_1 + \frac{\text{वि}}{\text{बा.}} \ (\text{मं. अं} - \text{सं}_{\text{उ}})$$

$$= १० + \frac{५}{४५}(५५·५ - ३०) = १२·८३$$

$$\text{M. D. from Median} = \frac{\Sigma d_x}{N} = \frac{547}{110} = 4·97$$

$$\text{मध्यक से म. वि.} = \frac{\Sigma \text{वि}_{\text{य}}}{\text{यो}} = \frac{५४७}{११०} = ४·९७$$

$$\text{Coeff. of M.D.} = \frac{\text{M.D.}}{\text{Median}} = \frac{4·97}{12·8} = ·38$$

$$\text{म. वि. गुणक} = \frac{\text{म. वि.}}{\text{मध्यका}} = \frac{४.९७}{१२·८} = ·३८$$

जिस प्रकार किसी भी समंकमाला में उसके समंकों का माध्य एक कल्पित माध्य की सहायता से लघुरीति के द्वारा मालूम किया जा सकता है उसी प्रकार माध्य-विचलन निकालने के लिये लघु-रीति का प्रयोग किया जा सकता है। लघु-रीति में कल्पित माध्य से विचलन मालूम करके उन विचलनों के योग में यथार्थ माध्य और कल्पित माध्य के अन्तर के बराबर संशोधन करना होता है। क्योंकि मध्यक विचलन प्रायः मध्यका से निकाला जाता है इस रीति का बहुत कम प्रयोग किया जाता है।

मध्यक विचलन के लक्षण

(१) यह समग्र के अंकों का अपकिरण नापने का एक सुन्दर ढंग है जिसमें समग्र के सभी अंकों के विचलनों को महत्व दिया जाता है। वास्तव में यह समग्र के अंकों का औसत विचलन समझाता है।

(२) प्रमाप-विचलन की अपेक्षा इस पर अन्तस्थ अंकों का कम प्रभाव पड़ता है क्योंकि इसमें अंकों के विचलनों का वर्ग नहीं निकालना पड़ता।

(३) इसमें क्योंकि अंकों के (+) और (—) चिन्ह छोड़ दिये जाते हैं, इसलिये एक गणित सम्बन्धी दोष है।

(४) यह आसानी से मालूम हो जाता है और सुगम है परन्तु इसका और अधिक गणित सम्बन्धी विश्लेषण नहीं किया जा सकता।

(५) इसे अधिकतर साधारण प्रकार की तुलनाओं में प्रयोग किया जाता है।

प्रमाप-विचलन (Standard Deviation)

जैसा हम देख चुके हैं कि यदि किसी समंकमाला में कुछ अंक अनुलोम और कुछ विलोम हों तो साधारण माध्य काम नहीं देते और यदि एक साधारण मध्यक निकालना हो तो हमें (+) और (—) चिन्हों को त्याग देना पड़ता है। यही बात विचलनों के माध्य निकालने में भी लागू होती है। उपरोक्त मध्यक-विचलन में गणित सम्बन्धी दोष है कि वह (+) और (—) चिन्हों को महत्व नहीं देता है। इस दोष को दूर करने के लिए विचलनों का साधारण मध्यक न निकाल कर एक वर्ग-

करणी माध्य (Quadratic Average) निकाला जाता है। यह वर्गकरणी-माध्य ही प्रमाप-विचलन (Standard Deviation) कहलाता है। जिस प्रकार वर्ग-करणी माध्य में किसी भी समंकमाला के सभी अंकों के वर्गों को जोड़कर और कुल संख्या से भाग देकर लब्धि का वर्ग मूल निकाल लिया जाता है उसी प्रकार प्रमाप-विचलन में मध्यक से लिए गए आकृतियों के विचलनों के वर्गों के योग को कुल संख्या से भाग देकर वर्गमूल मालूम किया जाता है। इस माप में यह विशेषता है कि (+) और (—) चिन्हों का त्याग न करके उनका एक गणित की ही क्रिया के द्वारा निरसन (Elimination) किया जाता है। प्रमाप-विचलन को मध्यक-विभ्रम (Mean error), मध्यक-समायत-विभ्रम (Mean Square Error) और विचलन-समायत-मध्यक-मूल (Root-Mean Square-Deviation) भी कहते हैं। अन्तिम पद प्रमाप-विचलन के मालूम करने की क्रिया को स्पष्ट करता है जिसमें विचलनों को समायत करके उनके मध्यक का मूल्य निकालना होता है। प्रमाप-विचलन को यूनानी चिन्ह (σ) Sigma द्वारा जाना जाता है। प्रमाप-विचलन एक निरपेक्ष माप है और और इसका सापेक्षिक माप प्रमाप-विचलन गुणक (Coefficient of Standard Deviation) मालूम करने के लिए प्रमाप-विचलन को मध्यक से भाग दे दिया जाता है। प्रमाप-विचलन और उसका गुणक निम्नलिखित सूत्रों द्वारा निकाले जाते हैं जो अपकिरण के द्वितीयघात (Second Moment of Dispersion) पर आधारित है।

$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2_x}{N}}$$

$$\text{प्रमाप-विचलन} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2_{\text{य}}}{\text{यो}}}$$

$$\text{Coeff. of S. D.} = \frac{\text{S. D.}}{\text{Mean}}$$

$$\text{प्रमाप-विचलन गुणक} = \frac{\text{प्र. वि.}}{\text{मध्यक}}$$

उदाहरण १—प्रमाप-विचलन

मास Months	मासिक आय Monthly Earnings	विचलन Dev.	विचलन के वर्ग Sq. of Dev.
१	२०	—२	४
२	२०	—२	४
३	२०	—२	४
४	२१	—१	१
५	२२	०	०
६	२२	०	०
७	२२	०	०
८	२२	०	०
९	२३	+१	१
१०	२३	+१	१
११	२४	+२	४
१२	२५	+३	९
योग=१२	Σ अ=२६४	मध्यक=२२	Σ वि$^2_{य}$ =२८

$$\text{S. D. or } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2_x}{N}}$$

$$\text{प्रमाप-विचलन या } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2_{\text{य}}}{\text{यो}}}$$

$$= \sqrt{\frac{२८}{१२}} = \sqrt{२{\cdot}३} = १{\cdot}५$$

$$\text{Coeff. of S.D.} = \frac{\text{S. D.}}{\text{Average}}$$

$$\text{प्रमाप-विचलन-गुणक} = \frac{\text{प्र. वि.}}{\text{मध्यक}}$$

$$= \frac{१{\cdot}५}{२२} = {\cdot}०७$$

प्रमाप-विचलन और उसके गुणक विच्छिन्न माला में निकालने के लिये विचलनों के वर्गों को तत्संवादी बारम्बारताओं से गुणा करके गुणनफलों के योग को समंकों की संख्या से भाग देकर वर्गमूल मालूम किया जाता है।

उदाहरण २—प्रमाप-विचलन

आकृति (Size)	आवृत्ति (Freq.) बा.	मध्यका से विचलन (Dev. from M) (१०)	विचलनों के वर्ग वि^{2}य (d^2_x)	वि^{2}य. बा. fd^2_x
४	२	—६	३६	७२
६	४	—४	१६	६४
८	६	—२	४	२४
१०	६	०	०	०
१२	२	+२	४	८
१४	१	+४	१६	१६
१६	४	+६	३६	१४४
	यो =२५			Σ वि^{2}य बा =३२८

$$S.D = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2_x}{N}}$$

$$\text{प्रमाप-विचलन} = \sqrt{\frac{\text{वि}^2_{\text{य}}\ \text{बा}}{\text{यो}}}$$

$$= \sqrt{\frac{३२८}{२५}} = \sqrt{१३} = ३\cdot६$$

$$\text{प्रमाप-विचलन-गुणक} = \frac{३\cdot६}{१०} = \cdot३६$$

प्रमाप-विचलन को किसी अविच्छिन्न माला में निकालने के लिये उसे मध्य बिन्दु मालूम करके पहिले एक विच्छिन्न माला में परिवर्तित कर दिया जाता है, और उसके पश्चात् उपरोक्त विधि से प्रमाप-विचलन और गुणक प्राप्त कर लिये जाते हैं।

उदाहरण ३—प्रमाप-विचलन

भार (पौण्ड)	मध्य बिन्दु	व्यक्तियों की संख्या Freq. (बा)	मध्यक से विचलन (१३३)	विचलनों के वर्ग वि^{2}य	वि^{2}य बा fd^2x
११०—१२०	११५	२०	—१८	३२४	६४८०
१२०—१३०	१२५	३०	— ८	६४	१९२०
१३०—१४०	१३५	२५	+ २	४	१००
१४०—१५०	१४५	२२	+१२	१४४	३१६८
१५०—१३०	१५५	१३	+२२	२६४	३४३१
		यो = ११०			Σ वि^{2}बा =१५,१००

$$\text{S.D. or } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N}}$$

$$\text{प्रमाप-विचलन} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2{}_{\text{य}}\text{बा.}}{\text{यो}}}$$

$$\sqrt{\frac{१५,१००}{११०}} = \sqrt{१३७\cdot३०}$$

$$= १२\cdot८$$

$$\text{प्रमाप-विचलन-गुणक} = \frac{\sigma}{\text{मध्यक}} \quad \frac{१२\cdot८}{१३३} = \cdot०९६$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि अविच्छिन्न माला में प्रमाप–विचलन मालूम करने के लिये निम्नलिखित क्रिया करनी पड़ती है।

(१) सर्व प्रथम संभागों के मध्यबिन्दु मालूम करके माध्य निकालो।

(२) मध्यक से मध्य बिन्दुओं के विचलन मालम करो और उनके वर्ग बनाओ।

(३) विचलनों के वर्गों को तत्संवादी आवृत्तियों से गुणा करो और गुणनफलों का योग निकालो ।

(४) उपरोक्त योग को कुल समंकों की आवृत्ति से भाग देकर वर्ग-मूल निकालो । यही प्रमाप-विचलन होगा ।

(५) उपरोक्त वर्गमूल को प्रमाप-विचलन गुणक निकालने के लिये मध्यक से भाग दे दो ।

प्रमाप-विचलन की लघु-रीति

प्रमाप-विचलन निकालने की उपरोक्त विधि के अतिरिक्त एक लघु-रीति भी है जिससे क्रिया और आसान हो जाती है। लघु-रीति के अनुसार किसी भी एक कल्पित माध्य से अन्य आकृतियों का विचलन मालूम कर लिया जाता है और फिर उपरोक्त रीति से प्रमाप-विचलन मालूम करके उसमें यथार्थ और कल्पित मध्यक के अन्तर के बराबर संशोधन कर दिया जाता है। इस रीति में क्रिया के निम्नलिखित अंग होते हैं :—

(१) किसी भी एक आकृति को कल्पित माध्य लेकर अन्य आकृतियों का उससे विचलन मालूम करो ।

(२) इन विचलनों के वर्गों को तत्संवादी आवृत्तियों से गुणा करके उनके गुणनफलों का योग मालूम करो और इस योग को समंकों की संख्या से भाग दो ।

(३) उपरोक्त लब्धि में संशोधन करने के लिये निम्नलिखित सूत्रों में से किसी एक के वर्ग का प्रयोग करो ।

$$(a - x) = \left\{ \frac{\Sigma d_x}{N} \right\}$$

$$(\text{मध्यक} - \text{य}) = \left\{ \frac{\Sigma \text{वि}_{\text{य}}}{\text{यो}} \right\}$$

इस प्रकार प्रमाप-विचलन की लघु-रीति के निम्नलिखित में से कोई भी सूत्र अपनाया जा सकता है:—

(अ) $$S.\ D. = \sqrt{\frac{\Sigma d^2_x}{N} - (a - x)^2}$$

$$\text{प्र. वि.} = \sqrt{\frac{\Sigma\ \text{वि}^2_{\text{य}}}{\text{यो}} - (\text{मध्यक—य})^2}$$

(ब) $$\text{S. D.} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N} - \left\{\frac{\Sigma dx}{N}\right\}^2}$$

$$\text{प्र. वि.} = \sqrt{\frac{\Sigma\ \text{वि}^2_{\text{य}}}{\text{यो}} - \left\{\frac{\Sigma\ \text{वि}_{\text{य}}}{\text{यो}}\right\}^2}$$

(स) $$\text{S. D.} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2x - N(a - x)^2}{N}}$$

$$\text{प्र. वि.} = \sqrt{\frac{\Sigma\ \text{वि}^2_{\text{य}} - \text{यो}\ (\text{मध्यक—य})^2}{\text{यो}}}$$

उदाहरण १—प्रमाप-विचलन, लघु-रीति

भार पौंड	आवृत्ति बा	मध्यक से विचलन वि$_{\text{य}}$	विचलनों के वर्ग वि$^2_{\text{य}}$	वि$^2_{\text{य}}$ ×बा. fd^2x	वि$_{\text{य}}$ ×बा. fdx
९०	४	—१०	१००	४००	—४०
९५	१०	— ५	२५	२५०	—५०
९८	५	— २	४	२०	—१०
१००	४	०	०	०	०
१०५	७	+ ५	२५	१७५	+२५
११०	५	+१०	१००	५००	+५०
११५	२	+१५	२२५	४५०	+३०
	यो=३७			Σ वि$^2_{\text{य}}$ बा =१७९५	Σ वि$_{\text{य}}$ बा. =१५

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2_x}{N} - \left\{\frac{\Sigma fd_x}{N}\right\}^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2_{\text{य}} \text{ बा.}}{\text{यो}} - \left\{\frac{\Sigma \text{ वि}_{\text{य}} \text{ बा.}}{\text{यो}}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{१७९५}{३७} - \left\{\frac{१५}{३७}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{४८\cdot५१ — \cdot१६४}$$

$$= \sqrt{४८\cdot३४६} = ६\cdot९५$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2_x}{N} - \left\{a - x\right\}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2_{\text{य}} \text{ बा}}{\text{यो}} \quad (\text{मध्यक} — \text{य})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{१७९५}{३७} - \left\{१००\cdot४ — १००\right\}^2}$$

$$= \sqrt{४८\cdot५१ — \cdot१६४}$$

$$= \sqrt{४८\cdot३४६} = ६\cdot९५$$

$$\text{Mean} = x + \frac{\Sigma fd_x}{N}$$

$$\text{मध्यक} = \text{य} + \frac{\Sigma \text{ वि}_{\text{य}} \text{ बा.}}{\text{यो}}$$

$$= १०० + \frac{१५}{३७} = १००\cdot४$$

$$\text{प्रमाप-विचलन-गुणक} = \frac{\text{प्र. वि.}}{\text{मध्यक}}$$

$$= \frac{६\cdot९५}{१००\cdot४} — \cdot०६९$$

उदाहरण २—प्रमाप-विचलन लघु-रीति

भार पौंड आ.	व्यक्ति संख्या बा.	मध्यबिन्दु	मध्यक से विचलन $वि_य$	$वि^2_य$ d^2x	$वि^2_य$ बा. fd^2x	$वि_य$ बा. fdx
११०-१२०	२०	११५	—२०	४००	८०००	—४००
१२०-१३०	३०	१२५	—१०	१००	३०००	—३००
१३०-१४०	२५	१३५	०	०	०	०
१४०-१५०	२२	१४५	+१०	१००	२२००	+२२०
१५०-१६०	१३	१५५	+२०	४००	५२००	+२६०
	यो= ११०				Σ $वि^2_य$. बा. =१८,४००	Σ $वि_य$. बा. =—२२०

$$S.\ D. = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2x - n\ (a—x)}{N}}$$

$$प्र.\ वि. = \sqrt{\frac{\Sigma\ वि^2_य\ बा—यो\ \ (मध्यक—य)^2}{यो}}$$

$$= \sqrt{\frac{१८४००—११०\ \ (१३३—१३५)^2}{११०}}$$

$$= \sqrt{\frac{१८४००\ —\ (—२)^2}{११०}}$$

$$=\ \ १२\cdot८$$

$$प्र.\ वि.\ गु. = \frac{१२\cdot८}{१३३} = \cdot०९६$$

$$S.\ D. = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N} - (a—x)^2}$$

$$\text{प्र. वि.} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ वि}^2_{\text{य}} \text{ बा.}}{\text{यो}} - (\text{मध्यक—य})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{१८,४००}{११०} - (१३३—१३५)^2}$$

$$= १२\cdot८$$

$$\text{S. D.} = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2_x}{n} - \left\{\frac{\Sigma fd_x}{n}\right\}^2}$$

$$\text{प्र. वि.} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ वि}^2_{\text{य}} \text{ बा.}}{\text{यो}} - \left\{\frac{\Sigma \text{ वि}_{\text{य}} \text{ बा.}}{\text{यो}}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{१८४००}{११०} - \left\{\frac{—२१०}{११०}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{१८४००—(—२)^2}{११०}}$$

$$= १२\cdot८$$

$$\text{प्र. वि. गु.} = \frac{१२\cdot८}{१३३} = \cdot०९६$$

प्रमाप-विचलन के लक्षण व प्रयोग

(१) प्रमाप विचलन समंकमाला के सभी अंकों को समान महत्व देने के कारण अपकिरण का एक यथार्थ माप है ।

(२) मध्यक विचलन के प्रतिकूल यह गणित की ही क्रिया के द्वारा (+) और (—) चिन्हों का निरसन करता है, इस कारण इसमें गणित सम्बन्धी दोष नहीं है ।

(३) यह बीजगणित के प्रयोग के द्वारा और भी अधिक समझाया जा सकता है और इसका एक गणित सम्बन्धी महत्व है ।

(४) अपकिरण के किसी भी अन्य माप की अपेक्षा इस पर निदर्शन के उच्चावचन (Sampling fluctuations) का न्यूनतम प्रभाव होता है ।

(५) निर्वचन (Interpretation) सम्बन्धी गुण होने के कारण इसका प्रयोग अंक-वंटन और समग्र के आन्तरिक अपकिरण को समझाने में विशेष रूप से किया जाता है।

(६) यह एक बहुत ही स्थिर माप है।

(७) अर्थशास्त्री और सामाजिक कार्यकर्ता इसकी क्रिया की कठिनाई के कारण इसका कम प्रयोग करते हैं।

अपकिरण के अन्य माप

उपरोक्त अपकिरण मापों के अतिरिक्त उन्हीं पर आधारित कुछ अन्य माप निम्नलिखित हैं।

(१) विचरण गुणक (Coefficient of Variation) अपकिरणों के नापने का एक सापेक्ष माप है और इसे निकालने के लिए किसी भी अपकिरण के गुणक को १०० से गुणा कर दिया जाता है। इस प्रकार यह प्रतिशत अपकिरण का द्योतक होता है। क्योंकि प्रमाप-विचलन अपकिरण का सबसे अच्छा माप है इसलिए श्री कार्ल पियर्सन महोदय ने उस पर यह आधारित विचरण गुणक को सर्वोत्तम बताया है जिसका सूत्र निम्नलिखित है।

$$\text{Coeff. of Variation} = \frac{\text{S.D.}}{\text{A}} \times 100$$

$$\text{विचरण गुणक} = \frac{\text{प्र. वि.}}{\text{मध्यक}} \times १००$$

(२) घनक (Modulus) अपकिरण के द्वितीय घात पर आधारित एक अन्य माप है जिसका कि प्रयोग बहुत कम दिया जाता है। इसका सूत्र निम्नलिखित है।

$$c = \sqrt{\frac{2\Sigma fd^2x}{N}}$$

$$\text{घ} = \sqrt{\frac{२\Sigma \text{वि}^2{}_\text{य} \text{ बा}}{\text{यो}}}$$

(३) विचरण मापांक (Variance) का दूसरा नाम द्वितीय अपकिरण घात (Second Moment of Dispersion) है जिस पर कि प्रमाप

विचलन आधारित है। प्रमाप-विचलन विचरण मापाँक का वर्गमूल होता है। इसका सूत्र निम्नलिखित है।

$$\text{Variance or } \sigma^2 = \frac{\Sigma fd^2x}{N}$$

$$\text{विचरण मापांक} = \frac{\Sigma \text{वि}^2_{\text{य}} \text{ बा.}}{\text{यो}}$$

(४) सुतथ्यता (Precision) यह घनक का व्युतक्रम होता है और इसका सूत्र निम्नलिखित है।

$$P = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\Sigma fd^2x}{N}}}$$

$$\text{सु} = \frac{\text{१}}{\sqrt{\frac{\text{२}\Sigma \text{वि}^2_{\text{य}} \text{ बा.}}{\text{यो}}}}$$

घनक के समायत (Square) को उच्चावचन (Fluctuation) और प्रमाप-विचलन के ·६७४५ को संभाव्य विभ्रम (Probable Error) कहते हैं।

अपकिरण मापों का परस्पर सम्बन्ध

यद्यपि अपकिरण के विभिन्न मापों में परस्पर सम्बन्ध नहीं ठहराया जा सकता, तो भी उनकी तुलना निम्नलिखित रूप में की जा सकती है:—

(१) विचरण विस्तार केवल अंतस्थ अंकों के अन्तर द्वारा अपकिरण की महानतम मात्रा की ओर निर्देश करता है।

(२) चतुर्थांशान्तर विस्तार दोनों चतुर्थांशों के बीच के अंकों के अपकिरण को स्पष्ट करता है और करीब करीब आधी समंकमाला को छोड़ देता है।

(३) चतुर्थांश विचलन एक ऐसी संख्या प्रदान करता है जिसे यदि मध्यका में दोनों ओर जोड़ दिया जाय तो चतुर्थांशान्तर विस्तार मालूम हो जाता है। परन्तु ऐसा केवल एक संमित अंक-वंटन में ही सम्भव है।

(४) एक संमित (Symmetrical) या साधारण विषम समंकमाला में मध्यक विचलन प्रायः प्रमाप विचलन का ४/५ होता है।

(५) किसी संमित या साधारण विषम समग्र में चतुर्थांश विचलन प्रमाप-विचलन का २/३ होता है।

लारेंज वक्र (Lorenz Curve)

अंकों की अपेक्षा टेढ़ी मेढ़ी लकीरें मास्तिष्क पर अधिक स्थायी प्रभाव डालती हैं और कोई भी व्यक्ति उनके स्वरूप को विपुल अंकों की अपेक्षा अधिक आसानी से याद रख सकता है। इसी बात से प्रभावित होकर श्री० लारेंज महोदय ने धन, लाभ, आय, भृत्ति, या जनसंख्या के सापेक्षिक (Relative) अपकिरण को समझाने के लिये एक वक्र बनाया जिसे उनके नाम पर ही लारेंज वक्र (Lorenz Curve) कहते हैं और इसे बनाने की पद्धति निम्नलिखित हैः—

(१) यदि दो समंकमालाओं की तुलना करना हो तो सबसे पहले उनकी संचयी आकृति और संचयी बारम्बारता दोनों ही निकाल लेनी चाहिये।

(२) संचयी बारम्बारता और संचयी आकृतियों के अन्तिम पदों को १०० मान कर अन्य आकृतियों और तत्संवादी बारम्बारताओं के संचयी प्रतिशत मालूम करो।

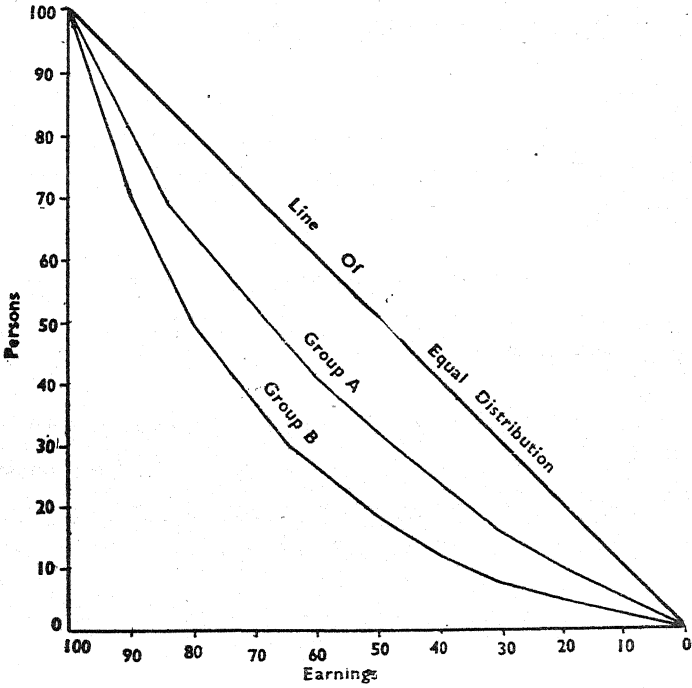
(३) इन संचयी आकृतियों और बारम्बारताओं के प्रतिशतों को क्रमशः य (x) और र (y) मान कर (य) को य-अक्ष (Axis of x) और (व) को र–अक्ष पर (Axis of y) दिखलाया जायगा। परन्तु उन्हें बिन्दुरेखीय चार्ट पर दिखाने के लिये नई पद्धति के अनुसार अक्ष रेखायें ली जाँयगी। (र) अक्ष रेखा पर यदि ० से १०० तक प्रतिशत लिखे जायेंगे तो उनके प्रतिकूल (य) अक्ष पर १०० से ० तक प्रतिशत दिखलाये जायेंगे। ० और १०० को मिलाने वाली रेखा को समान-वंटन रेखा (Line of equal distribution) कहते हैं।

दोनों ही समंकमालाओं के संचयी प्रतिशतों को क्रमशः (य) और (र) मान कर बिन्दुरेखीय चार्ट पर मालूम करने से जो बिन्दु प्राप्त होंगे उनको मिलाने से जो वक्र बनेंगे उन्हें लारेंज वक्र कहा जायगा और तुलना करते समय समान-वंटन-रेखा आधार होगी। जो वक्र जितना ही समान-वंटन-रेखा के समीप होगा उतना ही उस समूह में अपकिरण कम पाया जायगा।

उदाहरण—

निम्नलिखित अंकों की सहायता से अपकिरण दिखलाने के लिये लारेंज वक्र बनाइये।

समूह (अ)		समूह (ब)	
आय (सहस्र)	व्यक्ति संख्या (सहस्र)	आय (सहस्र)	व्यक्ति संख्या (सहस्र)
३०	२०	४००	१०
४०	४०	५००	१०
६०	८०	४००	१०
८०	१२०	७००	३०
९०	१६०	६००	४०
६०	१४०	६००	५०
६०	१२०	८००	१००
५०	१२०	५००	१००
५०	२००	५००	१५०

समूह (अ)				समूह (ब)			
आय		व्यक्ति संख्या		आय		व्यक्ति संख्या	
संचयी आय	संचयी प्रतिशत	संचयी आवृत्ति	संचयी प्रतिशत	संचयी आय	संचयी प्रतिशत	संचयी आवृत्ति	संचयी प्रतिशत
३०	६	२०	२	४००	८	१०	२
७०	१४	६०	६	९००	१८	२०	४
१३०	२६	१४०	१४	१३००	२६	३०	६
२१०	४२	२६०	२६	२०००	४०	६०	१२
३००	६०	४२०	४२	२६००	५२	१००	२०
३६०	७२	५६०	५६	३२००	६४	१५०	३०
४२०	८४	६८०	६८	४०००	८०	२५०	५०
४५०	९०	८००	८०	४५००	९०	३५०	७०
५००	१००	१०००	१००	५०००	१००	५००	१००

सामान्य वक्र (Normal Curve)

जैसा कि पहले कहा जा चुका है कि किसी भी समग्र के विभिन्न अंकों में अपकिरण होता ही ह चाहे वह परस्पर हो या समग्र की केन्द्रीय प्रवृत्ति को दिग्दर्शित करने वाली एकमेव संख्या से जिसे कि हम माध्य कहते हैं। यदि इस माध्य के दोनों ओर समंकों का जमाव एक सा हो और विचलन बराबर हो तो ऐसे अंक-वंटन को सामान्य अंक-वंटन (Normal Distribution) कहते हैं और यदि उसी समग्र को बिन्दुरेखा की सहायता से दिखलाया जाये तो ऐसे वक्र को सामान्य-वक्र या सामान्य-आवृत्ति-वक्र कहते हैं। प्रकृति की अनेकों घटनायें जिन पर मनुष्य की अभिनति का प्रभाव नहीं पड़ सकता प्रायः इसी वक्र के अनुसार परिचालित होती हैं। दूसरे शब्दों में ऐसी घटनायें जिनमें सम्भावना एक महत्वपूर्ण स्थान रखती हो प्रायः अनुकूल और प्रतिकूल दोनों ही प्रकार की होती हैं। उदाहरणार्थ, यदि एक पैसे को उछाला जाय तो वह सीधा और उल्टा दोनों ही प्रकार से गिर

सकता है और यदि उसे ३०० बार उछाला जाय तो इस बात की सम्भावना होगी कि १५० बार सीधा और १५० बार उल्टा गिरे।

सामान्य-वक्र सम्भावना के सिद्धांत पर आधारित है इस कारण यह एक बहुत महत्वपूर्ण वक्र है क्योंकि सम्भावना का सिद्धान्त प्रायः सभी प्रकार के सांख्यिकीय परिगणन का आधार है। सामान्य वक्र निम्नलिखित नियम पर आधारित है:—

"किसी भी प्राकृतिक घटना की यह प्रवृत्ति होती है कि उससे सम्बन्धित समंक भूयिष्ठक के दोनों ओर समान अनुपात में पाये जायँ जबकि उन पर सम्भावना का प्रभाव हो।"

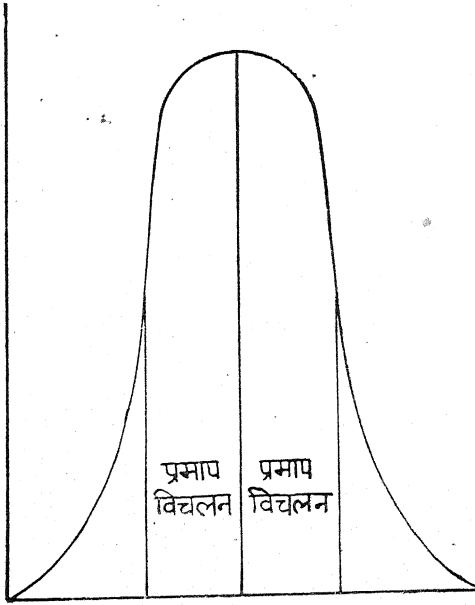
सामान्य वक्र को सबसे पहिले सन् १७७३ ई० में अब्राहम–दे–मोवीरे ने सामने रखा और बाद में गाँस (Gauss) नामक व्यक्ति ने ज्योतिष सम्बन्धी अनेकों गणनायें करने में इस वक्र का प्रयोग किया और इस कारण कभी कभी इस वक्र को "गाँस का विभ्रम वक्र" कहते हैं।

सामान्य वक्र की निम्नलिखित विशेषतायें हैं—

(१) सामान्य वक्र में भूयिष्ठक केवल एक ही होता है और उसकी आकृति मध्यक और मध्यका के बिल्कुल बराबर होती है।

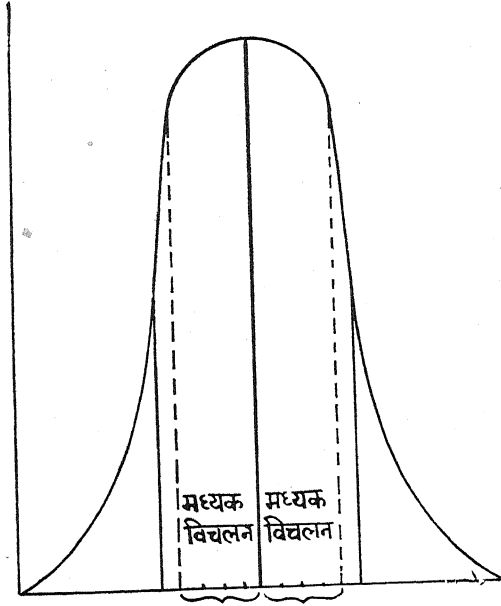
(२) वक्र के नीचे आने वाले क्षेत्र में उस समग्र के जिसका कि वह चित्र हो, प्रायः सभी अंक पाये जाते हैं।

(३) मध्यक की लकीर वक्र के क्षेत्र को दो समान भागों में विभाजित करती है और प्रत्येक भाग में समग्र के ५० प्रतिशत समंक पाये जाते हैं।

(४) सामान्य वक्र में दो ऐसे बिन्दु पाये जाते हैं जहाँ पर कि वक्र अपनी दिशा परिवर्तन करता है। यदि ऐसे बिन्दुओं से आधार अक्ष पर लम्ब (Perpendicular) डाले जायँ तो मध्यक से उन तक के अन्तर को प्रमाप-विचलन (Standard Deviation) कहते हैं।

(५) यदि मध्यक से दोनों ओर एक एक प्रमाप-विचलन लिये जाएँ तो उनके अर्न्तगत आने वाले क्षेत्र में समग्र के ६८·२६% समंक पाये जायँगे। इस अन्तर को प्रमाप-विभ्रम (Standard Error) कहते हैं।

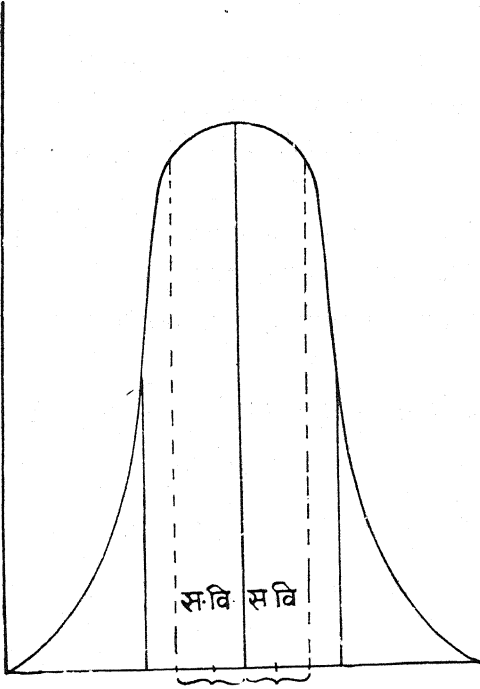
(६) यदि मध्यक से दोनों ओर दो प्रमाप-विचलन के बराबर क्षेत्र लिया जाय तो उसमें ९५·४६% समंक पाये जायेंगे।

(७) यदि मध्यक से दोनों ओर तीन तीन प्रमाप-विचलन लिये जाएँ तो उनके क्षेत्र में समग्र के ९९·७३% अंक पाये जायेंगे।

(८) यदि मध्यक से दिशा परिवर्तन वाले बिन्दु के लम्ब तक के क्षेत्र के पाँच हिस्सों में से चार ले लिये जायँ तो उसे मध्यक विचलन कहते हैं। इस प्रकार मध्यक-विचलन प्रमाप-विचलन का ४/५ होता है।

(९) यदि मध्यक से प्रमाप-विचलन के लम्ब तक के अन्तर को तीन भागों में विभाजित करके दो भाग ले लिये जाएँ तो उसे सम्भाव्य-विभ्रम (Probable Error) कहते हैं। इस प्रकार सम्भाव्य-विभ्रम प्रमाप-विचलन का २/३ या ·६७४५ होता है। यदि मध्यक से दोनों ओर एक एक सम्भाव्य-विभ्रम लिये जाएँ तो उनके अन्तर्गत क्षेत्र में सम्पूर्ण समग्र के ५० प्रतिशत अंक पाये जायेंगे।

(१०) किसी भी सामान्य-वक्र में सम्भाव्य-विभ्रम और चतुर्थांश-विचलन दोनों ही बराबर होते हैं।

(११) यदि मध्यक से दोनों ओर चार चार सम्भाव्य-विभ्रम लिये जाएँ तो उनके अन्तर्गत क्षेत्र में समग्र के ९९ प्रतिशत अंक पाये जायेंगे।

(१२) सम्भाव्य-विभ्रम प्रमाप-विचलन का ·६७४५ और मध्यक-विचलन का ·८४५ होता है।

विषमता (Skewness)

अभी तक हमने समग्र के दो पहलुओं का अध्ययन किया है। केन्द्रीय प्रवृत्ति को नापने के लिये माध्यों का प्रयोग और समंकों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के विचलनों को नापने के लिये मध्यक-विचलन और प्रमाप-विचलन का प्रयोग किया जाता है। अपकिरण-माप यद्यपि हमें यह बतला सकते हैं कि किस समूह में माध्य से समंकों का विचलन अधिक है परन्तु वे यह बताने में असमर्थ हैं कि विचलनों में समानता है या विषमता। इस कार्य को पूरा करने के लिये विषमता-मापों का प्रयोग किया जाता है।

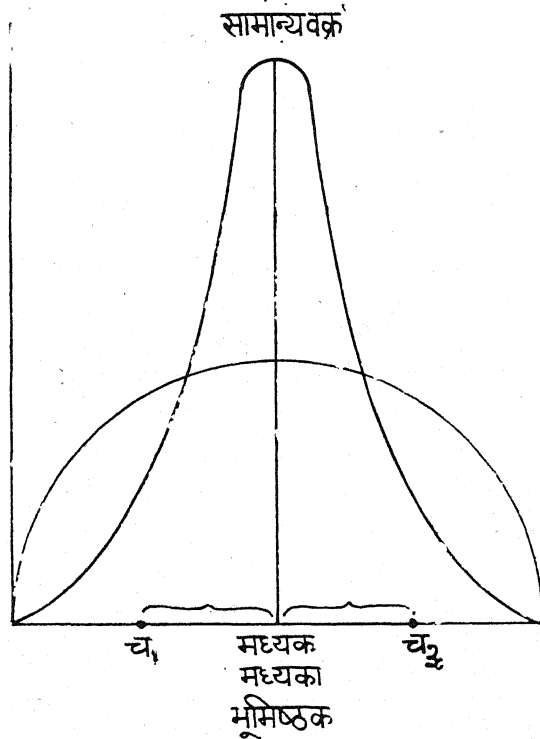
जैसा कि ऊपर कहा जा चुका है कि ऐसी सब घटनायें जिन पर मनुष्य का प्रभाव न हो प्राय: सामान्य-वक्र बनाती हैं। सामान्य वक्र के लक्षणों में से यदि कुछ लक्षण किसी समग्र में न पाये जायँ तो ऐसे समग्र को विषम या

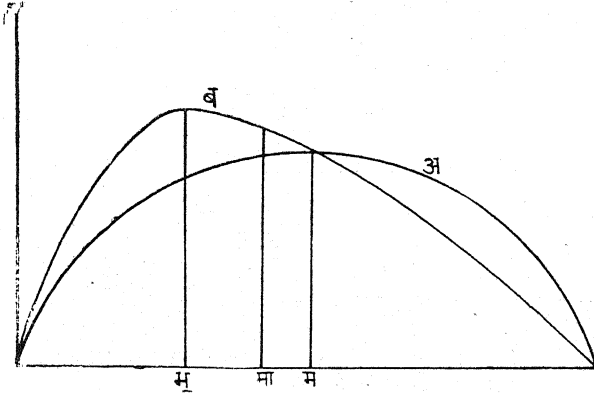
असंमित कहते हैं और वक्र की असंमित प्रकृति को विषमता (Skewness) कहते हैं ।

किसी भी संमित या सामान्य समग्र में प्रायः विषमता विभिन्न माध्यों की सापेक्षिक स्थिति के कारण निर्माण होती है । विषमता के अध्ययन में सामान्य वक्र के पूर्वोक्त लक्षणों में से निम्नलिखित लक्षण विशेष महत्व के हैं:—

(१) सामान्य वक्र में मध्यका, मध्यक और भूयिष्ठक एक ही स्थान पर होते हैं और उनकी आकृति बराबर होती है ।

(२) मध्यका से चतुर्थांश १ और चतुर्थांश ३ का अन्तर बराबर होता है ।

विषमता के माप उपरोक्त लक्षणों पर आधारित हैं ।

विषमता का प्रथम माप

जब किसी भी समग्र में भूयिष्ठक, मध्यका, और मध्यक एक ही स्थान पर नहीं रहते तो उसमें विषमता आ जाती है। यदि इन माध्यों के अन्तर मालूम कर लिये जायँ तो इनकी विषमता की मात्रा जानी जा सकती है।

जैसा कि उपरोक्त चित्र से स्पष्ट है कि (अ) वक्र की संमित प्रकृति जिसका कि मूल कारण मध्यक, भूयिष्ठक और मध्यका का एक होना था, इन माध्यों के परस्पर दूर हट जाने के कारण दूर हो गई है। (ब) वक्र में भूयिष्ठक, मध्यका और मध्यक में अन्तर है और वक्र की विषमता का मूल कारण मध्यक से भूयिष्ठक का बहुत अधिक दूर चला जाना है। यदि उनके परस्पर अन्तर को मालूम कर लिया जाय तो वही विषमता का प्रथम माप होगा।

सूत्रानुसार, Skewness = A — Z

विषमता = मध्यक — भूयिष्ठक

कभी कभी जब भूयिष्ठक मालूम करना सम्भव नहीं होता तो मध्यक से मध्यका की दूरी मालूम करके उसके आधार पर भूयिष्ठक की दूरी का अनुमान लगाया जाता है। एक साधारणतया विषम अंक-वंटन में भूयिष्ठक मध्यक से जितनी दूर चल पाता है मध्यका उस अन्तर का केवल १/३ ही चल पाती है। इसलिये यदि मध्यक और मध्यका के अन्तर को ३ गुणा कर दिया जाय तो भयिष्ठक की स्थिति का अनुमान लग सकता है।

सूत्रानुसार,

Skewness = 3 (A–M)

विषमता = ३ (मध्यक–मध्यका)

क्योंकि विषमता के उपरोक्त माप निरपेक्ष माप हैं उनके गुणक बनाना आवश्यक हो जाता है और कार्ल पियर्सन ने निम्नलिखित विषमता-गुणक बनाये हैं जिन्हें विषमता के उत्कृष्ट माप समझा जाता है।

(A) Coeff. of Skewness

$$= \frac{A - Z}{S.D.}$$

(B) Coeff. of Skewness

$$= \frac{3 (A - M)}{S.D.}$$

(अ) विषमता-गुणक = $\frac{\text{मध्यक–भूयिष्ठक}}{\text{प्र.वि.}}$

(ब) विषमता-गुणक = $\frac{\text{३ (मध्यक–मध्यका)}}{\text{प्र. वि.}}$

उदाहरण—१

समूह (अ)			समूह (ब)		
अंक	मध्यक से विचलन (१३६)	विचलनों का समायत	अंक	मध्यक से विचलन (६०७)	विचलनों का समायत
१३०	६	३६	५९६	११	१२१
१३२	४	१६	६०१	६	३६
१३३	३	९	६०२	५	२५
१३५	१	१	६०५	२	४
१३५	१	१	६०५	२	४
१३६	०	०	६०७	०	०
१३७	१	१	६०८	१	१
१३८	२	४	६१९	१२	१४४
१४८	१२	१४४	६००	१३	१६९
		Σ वि$^2_{य}$ = २१२			Σ वि$^2_{य}$ = ५०४

$$\text{Karl Pearson's Skewness} = \frac{\text{A—Z}}{\text{S. D.}}$$

$$\text{कार्ल पियर्सन का विषमता-गुणक} = \frac{\text{मध्यक—भूयिष्ठक}}{\text{प्र. वि.}}$$

समूह (अ)

मध्यक = १३६

$$\text{प्र. वि.} = \sqrt{\frac{\Sigma\ \text{वि}^2_{\text{य}}}{\text{यो}}}$$

$$= \sqrt{\frac{२१२}{९}} = \frac{१४\cdot५}{३} = ४\cdot८$$

भूयिष्ठक = १३५

$$\text{विषमता गुणक} = \frac{\text{मध्यक—भूयिष्ठक}}{\text{प्र. वि.}}$$

$$= \frac{१३६—१३५}{४\cdot८} = \cdot२०८$$

समूह (ब)

मध्यक = ६०७

$$\text{प्र. वि.} = \sqrt{\frac{\Sigma\ \text{वि}^2_{\text{य}}}{\text{यो}}}$$

$$= \sqrt{\frac{५०४}{९}} = \frac{२२४}{३} = ७\cdot५$$

भूयिष्ठक = ६०५

$$\text{विषमता-गुणक} = \frac{\text{मध्यक—भूयिष्ठक}}{\text{प्र. वि.}}$$

$$= \frac{६०७—६०५}{७\cdot५} = \cdot२६७$$

विषमता-गुणक देखने से ज्ञात होता है कि समूह (ब) में समह (अ) की अपेक्षा अधिक विषमता है।

विषमता का द्वितीय माप

किसी भी समग्र में यदि ($च_1$) और ($च_3$) मध्यका से बराबर दूरी पर न हों तो समग्र में विषमता आ जाती है और यदि यह जाना जा सके कि मध्यका से दोनों चतुर्थांशों की दूरी में कितना अन्तर पड़ गया है तो वही विषमता का माप होगा और उस निरपेक्ष माप का सापेक्षिक गुणक भी मालूम किया जा सकता है। यह बात निम्नलिखित सूत्रों द्वारा स्पष्ट हो जाती है—

$$\text{Skewness} \quad (Q_3 - M) - (M - Q_1)$$

$$\text{विषमता} = (च_3 - \text{मध्यका}) - (\text{मध्यका} - च_1)$$

$$\text{Coeff. of Skewness} = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}$$

$$\text{विषमता-गुणक} \quad \frac{(च_3 - म) - (म - च_1)}{(च_3 - म) - (म - च_1)}$$

$$\text{या} = \frac{च_3 + च_1 - २म}{च_3 - च_1}$$

उदाहरण—२

प्राप्तांक	कक्षा (अ)	कक्षा (ब)	संचयी आवृत्ति	
			कक्षा (अ)	कक्षा (ब)
५५–५८	१२	२०	१२	२०
५८–६१	१७	२२	२९	४२
६१–६४	२३	२५	५२	६७
६४–६७	१८	१३	७०	८०
६७–७०	११	७	८१	८७

कक्षा (अ)

$$\text{Quartile}_1 = L_1 + \frac{I}{F}\,(QI - Cf^P)$$

$$च_1 = सी_1 + \frac{वि}{बा}(अ.\ च_1 - सं_उ)$$

$$= ५८ + \frac{३}{१७} (२०\cdot५ — १२) = ५९\cdot५$$

$$Q_3 = L_1 + \frac{I}{F} (QI_3 — Cf^P)$$

$$च_3 = सी_1 + \frac{वि}{बा_1} (अ.च_3 — सं_उ)$$

$$= ६४ + \frac{३}{१८} (६\cdot१५ — ५२) = ६५\cdot६$$

$$\text{Median} = L_1 + \frac{I}{F} (MI — Cf^P)$$

$$मध्यका = सी_1 + \frac{वि}{बा} (म \ अं — सं_उ)$$

$$= ६१ + \frac{३}{२३} (४१ — २९) = ६२\cdot६$$

$$विषमता\text{-}गुणक = \frac{च_3 + च_1 — २म}{च_3 — च_1}$$

$$= \frac{६५\cdot६ + ५९\cdot५ — २ (६२\cdot६)}{६५\cdot६ — ५९\cdot५}$$

$$= \frac{१२५\cdot१ — १२५\cdot२}{६\cdot१} = \frac{\cdot१}{६\cdot१} = —\cdot०१६$$

कक्षा (ब)

$$च_1 = ५८ + \frac{३}{२२} (२२ — २०) = ५८\cdot३$$

$$च_3 = ६१ + \frac{३}{२५} (६६ — ४२) = ६३\cdot९$$

$$म = ६१ + \frac{३}{२५} (४४ — ४२) — ६१\cdot२$$

$$विषमता\text{-}गुणक = \frac{६३\cdot९ + ५८\cdot३ — २ (६१\cdot२)}{६३\cdot९ — ५८\cdot३}$$

$$= —\cdot०३४$$

विषमता-गुणकों को देखने से ज्ञात होता है कि कक्षा (ब) में कक्षा (अ) की अपेक्षा अंक-वंटन अधिक असंमित है ।

विषमता का तृतीय माप

विषमता का तृतीय माप तृतीय अपकिरण-घात पर आधारित है और उसका सूत्र निम्नलिखित है।

$$S.K. = 3\sqrt{\frac{\frac{\Sigma d^3_x}{N}}{S.D.}}$$

$$\text{वि. गु.} = 3\sqrt{\frac{\frac{\Sigma \text{वि}^3_\text{य}}{\text{यो}}}{\text{प्र. वि.}}}$$

विषमता-मापों के लक्षण

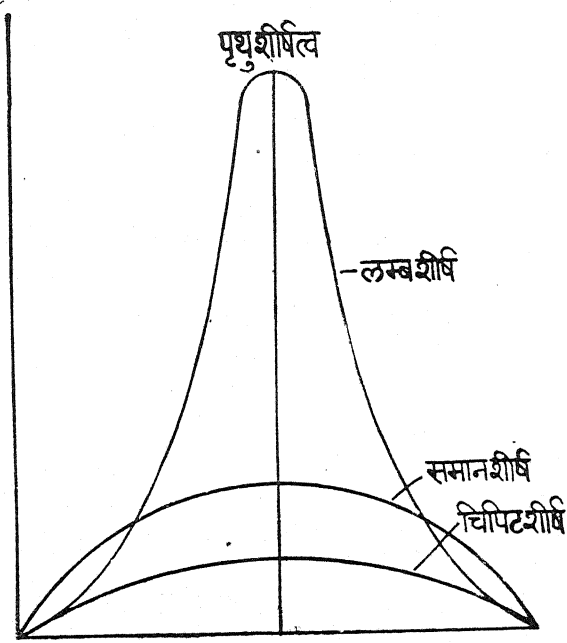
(१) विषमता के प्रथम माप समग्र के विभिन्न माध्यों पर आधारित होने के कारण समग्र के सम्पूर्ण अंकों का प्रतिनिधित्व नहीं करते।

(२) विषमता के द्वितीय माप स्थानिक मूल्यों पर आधारित होने के कारण कभी कभी विषमता की मात्रा के अच्छे माप होते हैं।

(३) विषमता के तृतीय माप इस कारण सर्वोत्तम हैं क्योंकि वह समग्र के प्रत्येक अंक को महत्व देते हैं परन्तु इन मापों का प्रयोग क्रिया की कठिनाई के कारण बहुत कम किया जाता है।

अङ्क–झुकाव (Kurtosis)

सामान्य-वक्र आवृत्तियों में क्रमशः घट-बढ़ के कारण प्रायः तीन प्रकार के स्वरूप का बन सकता है। सामान्य-वक्र का रूप समग्र में अंकों का झुकाव निश्चित करता है। प्रायः सामान्य वक्र में एक प्रकार की पृथुशीर्षता (Flat Topphedness) पाई जाती है जिसके कारण उसमें एक कूबड़ सा निकल आता है जिसके माप को अंक–झुकाव या पृथुशीर्षता कहते हैं।

उपरोक्त तीनों प्रकार की पृथुशीर्षता को अपकिरण के चतुर्थ-घात की सहायता से मालूम किया जा सकता है।

अपकिरण, विषमता और अङ्क-झुकाव की तुलना

(१) अपकिरण समग्र के विभिन्न अंकों के उनकी केन्द्रीय प्रवृत्ति से अन्तर या विचलन को नापता है। विषमता के द्वारा हम यह जान सकते हैं कि इस प्रकार के विचलनों की प्रवृत्ति के दोनों ओर समान हैं या विषम और पृथुशीर्षता से हम यह जान सकते हैं कि समग्र के मध्य में स्थिर समंक कितनी तेजी से घटते या बढ़ते हैं।

(२) अपकिरण विभिन्न अंकों के समग्र में स्थिति पर आधारित है परन्तु विषमता उन अंकों की केन्द्रीय और अन्तस्थ अंकों के प्रति प्रवृत्ति पर विचार करती है।

(३) अपकिरण के माप प्रथम, द्वितीय और तृतीय अपकिरण-घातों पर आधारित हैं। विषमता के माप प्रथम और तृतीय अपकिरण-घात पर आधारित हैं और पृथुशीर्षता चतुर्थ अपकिरण-घात के द्वारा नापी जाती हैं।

(४) अपकिरण के माप द्विघातीय माध्यों पर आधारित हैं। विषमता के माप प्रथमघातीय और द्विघातीय माध्यों पर आधारित हैं और पृथुशीर्षता केवल द्विघातीय माध्य पर आधारित है।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. Discuss the various ways in which the differences in the characteristics of frequency distribution (अंक-बंटन) are generally measured. (*B. Com., Luck.*, 1937).

2. (a) Define dispersion (अपकिरण). Account for its importance in statistical methods. How is it measured ?

(b) Mention the important methods of measuring dispersion (अपकिरण-माप) and disucss their comparative merits. (*B. Com., Luck.*, 1943).

3. Define carefully Mean deviation, (मध्यक विचलन); S.D. (प्र० वि०), Q.D. (च० वि०) of any given distribution. In what problems should each be used ? In a non-symmetrical distribution (विषम अंक-बंटन) how would you find the Skewness (विषमता). (*M.A., Alld.*, 1940).

4. What is meant by Skewness (विषमता) ? How does it differ from dispersion (अपकिरण). What is the object of measuring these? (*B. Com., Alld.*, 1943).

5. Describe the different measures of dispersion and assess the relative advantages of each. Calculate the S.D. (प्र० वि०) of the following two series. Which shows greater variation (अपकिरण) ?

Section A	Section B
192	83
288	87
236	93
229	109
184	124
260	126
348	126
291	101
330	102
243	108

(*P.C.S.*, 1938).

{ Mean (मध्यक) A=260·1, B=105·9
S. D. (प्र० वि०) A=51.6, B= 14.96
Coeff. of S. D. (प्र० वि० गु०) A=·198, B =·141 }

6. What purpose does a measure of dispersion serve? Define S. D. (प्र० वि०) and Semi-interquartile Range (अर्ध-चतुर्थांशान्तर विस्तार) and calculate them from the following table giving the age distribution of 542 members of the House of Commons.

Age	No. of Members
20	3
30	61
40	132
50	153
60	140
70	51
80	2
	542

(*B. Com.*, *Nag.*, 1942).

{ Mean (म)=49·724
S.D. (प्र० वि०)=11·874
Q.D. (च० वि०)=10 }

7. Find Quartiles (चतुर्थांश) and S.D. (प्र० वि०) in the figures in the following table to show whether the variation is greater in the area or yield ?

Years	Area in lacs of acres	Yield in lacs of bales of 400 lbs. each
1914—15	152	49
—16	114	51
—17	138	50
—18	154	45
—19	144	40
—20	153	53
—21	141	49
—22	117	60
—23	136	63
1923—24	154	60

(*B. Com.*, *Agra*, 1938).

[Q.D. (च०वि०) of x=11·125; of y=6
S.D. (प्र०वि०) of x=13·9; of y=6·8]

8. Calculate the Coefficient of Variation (विचरण गुणक) of the income of 20 families which are given below: Rs. 2000, 35, 400, 15, 40, 1500, 300, 6, 90, 250, 20, 12, 450, 10, 150, 8, 25 30, 1200, 60.

(*B. Com.*, *Alld.*, 1941).

[Mean (मध्यक) 330 S. D. =550·6
Coeff. of Variation (वि० गु०) =166·8]

9. The following table gives the distribution of populations in towns A and B in age groups. Compare the variation and Skewness (विषमता) of their frequencies.

Age groups	Population in thousands	
	A	B
0—10	18	10
10—20	16	12
20—30	15	24
30—40	12	32
40—50	10	29
50—60	5	11
60—70	2	3
Above 70	1	1

(*B. Com.*, *Agra*, 1947).

[Mean (मध्यक) A= 26 ; B=34
S.D. (प्र०वि०) A= 17·5; B=15·05

Coeff of V., (वि० गु०) A=39·7. ; B=42·8
Coeff. Sk., (विषमता गुणक) A=+·343; B= —·223]

10. Find out a Coefficient of Dispersion (अपकिरण गुणक) and a Coefficient of Skewness (विषमता गुणक) from the following figures and explain them.

Weight in lbs.	No. of Persons	Weight in lbs.	No. of Persons
70— 80	12	110—120	50
80— 90	18	120—130	45
90—100	35	130—140	20
100—110	49	140—150	8

(*B. Com.*, *Agra*, 1940)

[Mean (म) = 110·2; Mode (भू) = 111·66
S.D.(प्र०वि०) = 17; Coeff. of Sk. (विषमता-गुणक) = —·85]

11. Find the S.D. (प्र० वि०) of the following frequency distribution (आवृत्ति वंटन)

Exceeding	Not exceeding	Frequency
5·5	6·5	4
6·5	7·5	2
7·5	8·5	5
8·5	9·5	7
9·5	10·5	9
10·5	11·5	4
11·5	12·5	2

[Mean (मध्यक) = 9·06 ; S.D. (प्र० वि०) 1·7] (*M.A.*, *Agra*, 1934)

12. In any two samples, where the variates (च ल) n_1 and n_2 are measured in same units,

(यो$_1$) n_1 =36 (Summation) ΣX_1^2 (Σ वि$_1^2$) =49428
(यो$_2$) n_2 =49 (Do) ΣX_2^2 (Σ वि$_1^2$) =71258

Compute the values of the S.D.(प्र०वि०) of the two samples.

What additional information is required to calculate the coefficient of variation (विचरण–गुणक) of the above two samples ? (*B. Com.*, *Luck.*, 1943).

Indicate the uses of such a Coefficient

[S.D.$_1$ (प्र० वि०$_1$) =37·01 S.D.$_2$ (प्र० वि०$_2$) =38·08]

The Value of Arithmetic average is needed for the computation of the Coeff. of variation.

13. The following table gives the frequency distribution (अंक वंटन) of expenditure on 1000 per family per month among working class families in two localities, and the mean and standard deviation of the expenditure at both places, and discuss whether there is any difference in the expenditure in the 1000 families at these two places.

Range of expenditure in Rs. per month	No. of families Place A	Place B
Rs. 3— 6	28	39
„ 6— 9	292	284
„ 9—12	389	401
„ 12—15	212	202
„ 15—18	59	48
„ 18—21	18	21
„ 21—24	2	5

(*P.C.S.* 1941)

[Mean (मध्यक) A=10·6 S.D. (प्र०वि०) A=3·06
„ „ B=10·5 „ „ B=3·15]

14. The following table shows the number of workers in two factories whose weekly earnings are given in Column (1) Determine the Mean value (मध्यक मूल्य) of weekly earnings and Standard Deviation (प्र० वि०) in both the factories.

Range of weekly earnings	Number of workers Factory A	Factory B
4— 6	74	71
6— 8	376	379
8—10	304	303
10—12	110	112
12—14	18	18
14—16	0	1
16—18	9	3
18—20	9	9
20—22	0	4
Total	900	900

(*M.A.*, *Cal.*, 1936).

[Mean (मध्यक) A = 8·35, B =8·36]
[S. D. (प्र०वि०) A = 2·23, B =2·32]

15. Calculate the Standard Deviation (प्र० वि०) of th following data with regard to 2589 families in the U.K.

No. of persons in the families	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

No. of familes 156, 852, 580, 433, 268, 148, 77, 41, 20, 8, 5, 12,28!

(*M.A.*, *Alld.*, 1942)

[Mean (मध्यक) 3·4]
[S.D. (प्र०वि०) =17·5]

16. Calculate the Mean Deviation (मध्यक विचलन) from the following data. What light does it throw on the social conditions of the community ? Difference in ages between husband and wife in a particular community, are given below) :—

Difference in years	Frequency (आवृत्ति)
0— 5	449
5—10	705
10—15	507
15—20	281
20—25	109
25—30	52
30—35	16
35—40	4

(*B. Com.*, *Bombay*, 1936)

[Mean (मध्यक)=10·5 Mean Deviation (मध्यक विचलन)=5·3]

17. What do you understand by the term 'dispersion (अप· किरण)' ? Name and describe two standard measures of dispersion.

The Index Number of prices of cotton and coal shares in 1942 were as under:—

Month	Index Number of prices of cotton shares	Index Number prices of coal shares
January	188	131
February	178	130
March	173	130
April	164	129
May	172	129
June	183	120
July	184	127
August	185	127
September	211	130
October	217	137
November	232	140
December	240	142

Which of the two shares do you consider more variable (चल) in price ?

(*M.A.*, *Agra.*, 1944).

[Mean(मध्यक)A=194 B=131 S.D. (प्र०वि०)A=23·8 B=5·79
V(वि० गु०) A=12·8 B=4·4]

18. From the following data, find out one measure of dispersion (अपकिरण माप) and state whether the variation in receipts is greater than that in passengers.

Years	Receipts	Passengers
1925	2354	50,010
1926	2780	61,060
1927	3011	70,005
1928	3020	70,110
1929	3541	83,001
1930	4150	91,100
1931	5000	100,000

(*B. Com.*, *Alld.*, 1932),

[Median (मध्यका) Receipts = 3020 Passengers =70110
M.D. (म० वि०) ,, = 649 ,, =13289
Coeff. of M.D.(म०वि०गु०) = ·215 ,, = ·189]

19. The following are the rents of 18 houses in a certain locality.

Rs. As.	Rs. As.
6—8	6—4
5—0	3—0
5—4	9—8
5—8	4—8
5—4	4—0
4—12	3—0
4—0	3—12
5—0	5—0
4—8	3—0

Calculate the Mean Deviation (म०वि०) of this group.

(*B. Com., Luck.*, 1930)

[Median (मध्यका) =4.875 M.D. (म०वि०)=1.014]

20. The following table gives the number of finished articles turned out per day by different number of workers in a factory. Find the Mean value (मध्यक) and 'Standard Deviation' (प्र०वि०) of the daily output of finished articles and explain the significance of 'Standard Deviation' (प्र०वि०).

Number of articles	Number of workers	Number of articles	Number of workers
18	3	23	17
19	7	24	13
20	11	25	8
21	14	26	9
22	18	27	4

(*B. Com., Cal.*, 1937).

[Mean (मध्यक)=22.519 S.D. (प्र० वि०)=2.3]

21. Write Short Notes:—

(1) Dispersion (अपकिरण)

(2) Standard Deviation (प्रमाप विचलन)

Calculate the Standard Deviation from the following data:—

Size of item	Frequency
6	3
7	6
8	9
9	13
10	8
11	5
12	4

(*B. Com.*, *Bombay*, 1936)

[Mean (मध्यक) = 9 S.D. (प्र०वि०) =1.6]

22. From the following figures find the Standard Deviation (प्र० वि०) and the Coefficient of Variation (विचरण गुणक):—

Marks	No. of persons
0—10	5
10—20	10
20—30	20
30—40	40
40—50	30
50—60	20
60—70	10
70—80	4

(*B.Com.*, (*s*) *Agra*, 1948).

[Mean (मध्यक) =39·3 S.D. (प्र०वि०) =1·6
V (वि०गु०) =10·9]

23. Explain the meaning and significance of skewness (विषमता). Which of the following two distributions is more skewed ?

Distribution of weekly Index Nos. of cost of living in Bombay, 1942.		Distribution of weekly Index Nos. of cost of living in Bombay, 1943.	
Index No.	No. of weeks	Index No.	No of weeks
140—150	5	200—210	10
150—160	10	210—220	10
160—170	20	220—230	10
170—180	9	230—240	8
180—190	6	240—250	7
190—200	2	250—260	7

(*M. Com., Agra*, 1950).

[Q_1 A=158·25 B=213·25 Median A.=165·75 B=226.5
Q_3 A=175·3 B=242·5 Coeff. of sk. A=·105 B= .09]

24. Calculate the Mean deviation (म०वि०) and the Standard Deviation (प्र०वि०) from the following data:—

Size of item	Frequency
3—4	3
4—5	7
5—6	22
6—7	60
7—8	85
8—9	32
9—10	8

(*B. Com., Agra* 1942 *and* 54).

[Mean (मध्यक) =7.09 Median (माध्यक) =7.5
S.D. (प्र०वि०) =1.15 M. D. (म०वि०) =.85]

25. Calculate (a) Median Coefficient of dispersion (मध्यका अपकिरण गुणक) and (b) Mean Coefficient of dispersion (मध्यक अपकिरण गुणक) from the following data:—

Size of items :	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,
Frequency :	2,	4,	5,	3,	2,	1,	4,

(*MA. Agra*, 1954)

[For Solution please refer to page 164]

26. Find the Coefficient of Skewness (विषमता गुणक) of the two groups given below and point out which distribution is more skew :—

Marks	Group (A)	Group (B)
55—58	12	20
58—61	17	22
61—64	23	25
64—67	18	13
67—70	11	7

(*M. A., Agra.*, 1954).

[For Solution please refer to page 170]

अध्याय १०.

सह-सम्बन्ध
(Correlation)

अभी तक हमने किसी भी समग्र के अन्तर्गत स्थित समंकों के स्वरूप, केन्द्रीय प्रवृत्ति, परस्पर विचलन, असंमित वंटन और पृथुशीर्षता इत्यादि के सम्बन्ध में अध्ययन किया है। इस अध्याय में हमें एक से अधिक समंक-समूहों की प्रवृत्तियों और उनके पारस्परिक सह-सम्बन्ध के विषय में विचार करना है। यदि किन्हीं दो समंकमालाओं के समंक समान या प्रतिकूल दिशा में अपकिरण करते हों तो ऐसे अपकिरण को सह-विचरण (Co-variation) कहते हैं। उदाहरणार्थ, यदि (अ) समंकमाला के अंकों में आरोही प्रवृत्ति (Increasing tendency) हो और (ब) समंकमाला के अंकों में अवरोही प्रवृत्ति (Decreasing tendency) हो तो उनका सह-विचरण विलोम होगा। यदि दोनों ही समंकमालाओं की आकृतियों में एक ही क्रम पाया जाए तो उनका सह-विचरण अनुलोम होगा।

यदि किन्हीं दो या दो से अधिक समंकमालाओं में सह-विचरण हो और उसके साथ ही परस्पर कारण और प्रभाव सम्बन्धी आश्रयभूतत्व (Inter-dependence) पाया जाय तो ऐसे सह-विचरण को सह-सम्बन्ध (Corre-lation) कहते हैं। यदि किन्हीं दो समंकमालाओं में सह-सम्बन्ध हो और उनके परस्पर आश्रय भूतत्व में एक माला कारण और दूसरी तत्संवादी प्रभाव प्रदर्शित करती हो तो कारण बतलाने वाली समंकमाला को विधेय-माला (Subject Series) और प्रभाव बतलाने वाली समंकमाला को सम्बद्ध-माला (Relative Series) कहते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि सह-सम्बन्ध दो या दो से अधिक समंकमालाओं के हेतुक सम्बन्ध (Causal-connection) का माप है जो उनके परस्पर समान या विपरीत दिशा में विचलन के कारण अनुलोम (+) या विलोम (—) पाया जाता है।

सह-सम्बन्ध को नापने के लिये सह-सम्बन्ध के गुणक बनाये जाते हैं जो सदा (+१) और (—१) की परिसीमाओं के अन्तर्गत ही रहते हैं।

यदि सह-सम्बन्ध गुणक (०) हो तो तुलना की जाने वाली समंकमालाओं में आश्रयभूतत्व किंचितमात्र भी नहीं होता।

सह-सम्बन्ध के माप

किन्हीं भी दो या दो से अधिक समंकमालाओं के परस्पर सह-सम्बन्ध को निम्नलिखित रीतियों से नापा जाता है।

(१) कार्ल पिर्यसन की रीति

(२) संगामि-विचलन रीति (The Concurrent Deviation's Method).

(३) स्पियरमैन की अनुस्थिति रीति (Spearman's Ranking Method).

(४) बिन्दु रेखीय रीति

(५) प्रविक्षेप रेखि चित्र (Scatter Diagram)

कार्ल पियर्सन रीति

किसी भी समंकमाला के विभिन्न अंकों का विचलन उनके मध्यक से निकाले गये अन्तरों द्वारा समझा जाता है जैसा कि हम पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं। यदि किन्हीं भी दो समंकमालाओं के सह-विचरण की मात्रा मालूम करना हो तो उनके तत्संवादी विचलनों को गुणा करके उनका योग निकाला जा सकता है। यही योग सह-विचरण का माप कहलाता है। यदि उन समंकमालाओं में आश्रयभूतत्व हो तो यही सह-विचरण का माप सह-सम्बन्ध का माप कहलायेगा। सांख्यिकी में निरपेक्ष मापों का विशेष महत्व न होने के कारण सापेक्षिक गुणक मालूम किये जाते हैं। इसीलिये कार्ल पियर्सन महोदय ने उपरोक्त सह-सम्बन्ध के माप का गुणक उसे दोनों समंकमालाओं के प्रमाप-विचलनों और कुल समंक संख्या के गुणनफलों से भाग देकर प्राप्त किया जो उन्हीं के नाम से विख्यात है। कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध-गुणक का सूत्र निम्नलिखित है जिसे (r) या (स) द्वारा समझा जाता है।

Karl Pearsan's Coeffcient of Correlation

$$= \frac{\Sigma d_x \ d_y}{n. \ \sigma x \ \sigma y}$$

कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणक

$$= \frac{\Sigma \text{ वि}_{\text{य}} \text{ वि}_{\text{र}}}{\text{यो. प्र.वि}_{.\text{य}} \text{ प्र.वि.}_{\text{र}}}$$

जबकि उपरोक्त चिन्हों का प्रयोग सूत्र में निम्नलिखित के लिए किया गया है :—

Σ वि$_{य}$ वि$_{र}$ = दोनों समंकमालाओं के विभिन्न पदों के मध्यक से विचलनों के पारस्परिक गुणनफलों का योग

यो = समंकों की कुल संख्या

σय = (य) समंकमाला का प्रमाप विचलन

σर = (र) समंकमाला का प्रमाप विचलन

उदाहरण—१

विधेय माला (य)			सम्बद्ध माला (र)			
अंक	विचलन (वि$_{य}$) (२५)	विचलनों के वर्ग (वि$^{2}_{य}$)	अंक	विचलन (वि$_{र}$) (१२०)	विचलनों के वर्ग (वि$^{2}_{र}$)	वि$_{य}$ × वि$_{र}$
२४	—१	१	१२०	०	०	०
२५	०	०	१२२	+२	४	०
२६	+१	१	११९	—१	१	— १
२८	+३	९	११८	—२	४	— ६
२३	—२	४	१२१	+१	१	— २
२९	+४	१६	१२३	+३	९	+१२
२१	—४	१६	११७	—३	९	+१२
२७	+२	४	११६	—४	१६	— ८
२२	—३	९	१२४	+४	१६	—१२
		Σ वि$^{2}_{य}$ =६०			Σ वि$^{2}_{र}$ =६०	Σ वि$_{य}$. वि$_{र}$ = – ५

$$S.\ D.\ x. = \sqrt{\frac{\Sigma d^2_x}{n}}$$

$$\text{प्र. वि.}_{य} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2_{य}}{\text{यो}}}$$

$$= \sqrt{\frac{६०}{९}}$$

$$\text{प्र. वि.}_{र} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2_{र}}{\text{यो}}}$$

$$= \sqrt{\frac{६०}{९}}$$

$$\text{स} = \frac{\Sigma \text{वि}_{य.} \text{वि}_{र.}}{\text{यो.} \times \text{प्र. वि}_{य.} \times \text{प्र. वि.}_{र}}$$

$$= \frac{—५}{९ \times \sqrt{\frac{६०}{९}} \times \sqrt{\frac{६०}{९}}}$$

$$= \frac{—५}{६०} = — .०८३$$

सह-सम्बन्ध विलोम है ।

लघु-रीति

प्रमाप-विचलन की भांति सह-सम्बन्ध गुणक भी लघु-रीति द्वारा निकाला जा सकता है । इस रीति के अनुसार विधेय और संबद्ध दोनों ही मालाओं में कल्पित माध्यों से विचलन निकाले जाते हैं और प्रमाप-विचलन के समान उसमें यथार्थ माध्य और कल्पित माध्य के अन्तर के बराबर संशोधन कर दिया जाता है । कार्ल पियर्सन के सह–सम्बन्ध गुणक का लघु-रीति-गणन के लिये निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है ।

$$\text{(I)} \quad r = \frac{\Sigma d_x \, d_y - n \, (a_1 - x) \, (a_2 - y)}{N \sqrt{\frac{\Sigma d^2{}_x}{n} - (a_1 - x)^2} \sqrt{\frac{\Sigma d^{2}{}_y}{n} - (a_2 - y)^2}}$$

$$\text{स} = \frac{\Sigma \text{वि}_{य.} \text{वि}_{र.} - \text{यो} \, (\text{म}_1 - \text{य}) \, (\text{म}_2 - \text{र})}{\text{यो} \sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2{}_{य}}{\text{यो}} - (\text{म}_1 - \text{य})^2} \sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2{}_{र}}{\text{यो}} - (\text{म}_2 - \text{र})^2}}$$

$$(\text{II})\quad r = \frac{\Sigma d_x\, d_y - n\left\{\frac{\Sigma d_x}{n}\right\}\left\{\frac{\Sigma d_y}{n}\right\}}{N\sqrt{\frac{\Sigma d^2_x}{n} - \left\{\frac{\Sigma d_x}{n}\right\}^2}\sqrt{\frac{\Sigma d^2_y}{n} - \left\{\frac{\Sigma d_y}{n}\right\}^2}}$$

$$\text{स} = \frac{\Sigma \text{वि}_{\text{य}}.\ \text{वि}_{\text{र}} - \text{यो}\left\{\frac{\Sigma \text{वि}_{\text{य}}}{\text{यो}}\right\}\left\{\frac{\Sigma \text{वि}_{\text{र}}}{\text{यो}}\right\}}{\text{यो}\sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2_{\text{य}}}{\text{यो}} - \left\{\frac{\Sigma \text{वि}_{\text{य}}}{\text{यो}}\right\}^2}\sqrt{\frac{\Sigma \text{वि}^2_{\text{र}}}{\text{यो}} - \left\{\frac{\Sigma \text{वि}_{\text{र}}}{\text{यो}}\right\}^2}}$$

$$(\text{III})\quad r = \frac{\Sigma d_x\, d_y - \frac{\Sigma d_x\, \Sigma d_y}{n}}{N\sqrt{\Sigma d^2_x - \left\{\frac{\Sigma d_x}{n}\right\}^2}\sqrt{\Sigma d^2_y - \left\{\frac{\Sigma d_y}{n}\right\}^2}}$$

$$\text{स} = \frac{\Sigma \text{वि}_{\text{य}}.\ \text{वि}_{\text{र}} - \frac{\Sigma \text{वि}_{\text{य}}.\ \text{वि}_{\text{र}}}{\text{यो}}}{\sqrt{\Sigma \text{वि}^2_{\text{य}} - \left\{\frac{\Sigma \text{वि}_{\text{य}}}{\text{यो}}\right\}^2}\sqrt{\Sigma \text{वि}^2_{\text{र}} - \left\{\frac{\Sigma \text{वि}_{\text{र}}}{\text{यो}}\right\}^2}}$$

उपरोक्त सूत्रों में विभिन्न पदों का आशय निम्नलिखित हैः—

$\Sigma \text{वि}_{\text{य}}.\ \text{वि}_{\text{र}}$ = (य) और (र) मालाओं के विचलनों के गुणनफलों का योग

$\Sigma \text{वि}^2_{\text{य}}$ = (य) माला के विचलनों के वर्गों का योग

$\Sigma \text{वि}^2_{\text{र}}$ = (र) माला के विचलनों के वर्गों का योग

यो = कुल संख्याओं का योग।

$\Sigma \text{वि}_{\text{य}}$ = (य) माला के विचलनों के चिन्हों का ध्यान रखते हुए योग

$\Sigma \text{वि}_{\text{र}}$ = (र) माला के विचलनों के चिन्हों का ध्यान रखते हुए योग

म_1 एवं म_2 = दोनों मालाओं के यथार्थ मध्यक

उदाहरण—२ लघुरीति

विधेय माला (य)			संबद्ध माला (र)			
निर्यात टन	विचलन कल्पित मध्यक (५०)से $वि_य$	विचलनों के वर्ग	आयात टन	विचलन कल्पित माध्य (१००)से $वि_र$	विचलनों के वर्ग	$\Sigma वि_{य.} \times वि_र$
४५	—५	२५	९४	—६	३६	३०
४६	—४	१६	९६	—४	१६	१६
४८	—२	४	९८	—२	४	४
५०	—०	०	१००	०	०	०
५२	+२	४	१०४	+४	१६	८
५३	+३	९	१०५	+५	२५	१५
५१	+१	१	१०२	+२	४	२
४९	—१	१	९९	—१	१	१
४७	—३	९	९७	—३	९	९
	$\Sigma वि_य$ =—९	$\Sigma वि^2_य$ =६९		$\Sigma वि_र$ =—५	$\Sigma वि^2_र$ =—१११	$\Sigma वि_{य.} वि_र$ =८५

$$(i)\ r = \frac{\Sigma d_x\ d_y — n\ (a_1 — x)\ (a_2 — y)}{\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{n} - (a_1 — x)^2}\ \sqrt{\frac{\Sigma d^2y}{n} - (a_2 — y)^2}}$$

$$स = \frac{\Sigma वि_{य.}\ वि_र — यो\ (म_1 — य)\ (म_2 — र)}{यो \sqrt{\frac{वि^2_य}{यो} - (म_1 — य)^2}\ \sqrt{\frac{वि^2_र}{यो} - (म_2 — र)^2}}$$

$$= \frac{८५ — ९\ (४९ — ५०)\ (९९{\cdot}४ — १००)}{९ \sqrt{\frac{६९}{९} - (४९ — ५०)^2}\ \sqrt{\frac{१११}{९} - (९९{\cdot}४ — १००)^2}}$$

$$= \frac{८५ - ९(-१)(-\cdot६)}{९\sqrt{\frac{६९}{९} - (-१)^2}\ \sqrt{\frac{१११}{९} - (-\cdot६)^2}}$$

$$= \frac{७९\cdot६}{८५\cdot५} = \cdot९३$$

$$\text{(ii)}\ r = \frac{\Sigma d_x d_y - N\left\{\frac{\Sigma d_x}{n}\right\}\left\{\frac{\Sigma d_y}{n}\right\}}{N\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{n} - \left\{\frac{\Sigma d_x}{n}\right\}^2}\ \sqrt{\frac{d^2y}{n} - \left\{\frac{d_y}{n}\right\}^2}}$$

$$स = \frac{\Sigma वि_{य}.\ वि_{र} - यो\left\{\frac{\Sigma वि_{य}}{यो}\right\}\left\{\frac{\Sigma वि_{र}}{यो}\right\}}{यो\sqrt{\frac{वि^2_{य}}{यो} - \left\{\frac{वि_{य}}{यो}\right\}^2}\ \sqrt{\frac{वि_{र}}{यो} - \left\{\frac{वि_{र}}{यो}\right\}^2}}$$

$$= \frac{८५ - ९\left\{\frac{-९}{९}\right\}\left\{\frac{-५}{९}\right\}}{९\sqrt{\frac{६९}{९} - \left\{\frac{-९}{९}\right\}^2}\ \sqrt{\frac{१११}{९} - \left\{\frac{-५}{९}\right\}^2}}$$

$$= \frac{८५ - ९(-९)(\cdot६)}{९\sqrt{\frac{६९}{९} - (-१)}\ \sqrt{\frac{१११}{९} - (-\cdot६)}}$$

$$= \frac{७९\cdot६}{८५\cdot५} = \cdot९३$$

$$\text{(iii)}\ r = \frac{\Sigma d_x\cdot d_y - \left\{\frac{\Sigma d_x \times \Sigma d_y}{n}\right\}}{\sqrt{\Sigma d^2x - \left\{\frac{\Sigma dx}{n}\right\}^2}\ \sqrt{\Sigma d^2y - \left\{\frac{\Sigma d_y}{n}\right\}^2}}$$

$$स = \frac{\Sigma वि_य - \frac{\Sigma वि_य . \Sigma वि_र}{यो}}{\sqrt{वि^2_य - \left\{\frac{वि_य}{यो}\right\}^2} \sqrt{वि^2_र - \left\{\frac{वि_र}{यो}\right\}^2}}$$

$$= \frac{८५ - \frac{-९ \times -५}{९}}{\sqrt{६९ - \left\{\frac{-९}{९}\right\}^2} \sqrt{१११ - \left\{\frac{-५}{९}\right\}^2}}$$

$$= \frac{८०}{८५\cdot०२} = \cdot९६$$

सह-सम्बन्ध गुणक ये दिखलाता है कि दोनों मालाओं में अनुलोम सह-सम्बन्ध है और उसकी मात्रा अधिक है।

संगामी विचलन रीति

उपरोक्त रीति का प्रयोग किन्हीं दो मालाओं के दीर्घकालीन समंकों के आधार पर उनकी दीर्घकालीन सह-सम्बन्ध प्रवृत्ति की सीमा मालूम करने के लिये किया जाता है। परन्तु जब समंकमालायें अल्पकालीन उच्चावचन (Fluctuations) दिखलाती हों तो प्रायः गणन की सुविधा के कारण संगामी विचलन रीति (Concurrent Deviations Method) का प्रयोग किया जाता है जो कि केवल परिवर्तनों की दिशा को उनकी मात्रा की अपेक्षा अधिक महत्व देता है। यह गुणक आसान होने के कारण व्यवसाय के प्रारम्भ में बहुधा प्रयोग किया जाता है। इस रीति के अनुसार दोनों ही समंकमालाओं में पहले अंकों को छोड़ दिया जाता है और उसके बाद वाले अंकों के सामने परिवर्तन की दिशा (+) और (—) चिन्हों के द्वारा दिखलाई जाती है तत्पश्चात् एक अन्य स्कम्भ में दोनों ही मालाओं में संगामी विचलन को (+) और प्रतिगामी विचलन को (—) के रूप में दिखाया जाता है। संगामी विचलनों की संख्या जोड़ ली जाती है जिसे (सं) कहते

हैं और सह-सम्बन्ध-गुणक निकालने के लिये निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

$$C = \pm \sqrt{\pm \frac{2C - N}{N}}$$

$$सं = \pm \sqrt{\pm \frac{2 सं - यो}{यो}}$$

उदाहरण—

अवधि	पूर्त्ति		मूल्य		संगामि (सं)
	पूर्त्ति देशनांक	पूर्व मास से विचलन	मूल्य देशनांक	पूर्व मास से विचलन	
१९३८					
सितंबर	८४		१४४		
अक्टूबर	८८	+	१४०	—	—
नवम्बर	८३	—	१४६	—	—
दिसम्बर	८९	+	१३२	—	—
१९३९					
जनवरी	९०	+	१३०	—	—
फरवरी	९२	+	१२८	—	—
माच	९५	+	१२७	—	—
अप्रैल	९८	+	१२५	—	—
मई	१०४	+	९८	—	—
जून	१०७	+	९६	—	—
जुलाई	११५	+	९३	—	—
अगस्त	१२०	+	९२	—	—
सितंबर	१२४	+	१३०	+	+
अक्टूबर	१२८	+	१६०	+	+
नवम्बर	१३०	+	१८८	+	+
दिसम्बर	२००	+	२००	+	+
					सं= ४

$$r = \pm\sqrt{\pm\frac{2C-N}{N}}$$

$$\text{सं} = \pm\sqrt{\pm\frac{\text{२ सं} - \text{यो}}{\text{यो}}}$$

$$= \pm\sqrt{\pm\left\{\frac{२ \times ४ - १५}{१५}\right\}}$$

$$= \pm\sqrt{-\left\{\frac{७}{१५}\right\}}$$

$$= - \cdot ४६$$

इस रीति के अनुसार केवल संगामी विचलन पर ही गुणक आधारित होता है और प्रतिगामी विचलनों को छोड़ दिया जाता है। यदि किसी भी बाद वाले अंक में कोई घट-बढ़ न हो तो उसके आगे (=) का चिन्ह बना दिया जाता है और यदि दोनों ही मालाओं में तत्संवादी अंकों के चिन्ह (=) के हों तो उसे संगामी विचलन के स्कंभ में (+) लिख दिया जाता है। परन्तु यदि तत्संवादी अंक का परिवर्तन (—) या (+) हो तो उसे प्रतिगामी समझ कर संगामी विचलन के स्कंभ में (—) द्वारा दिखलाया जायगा।

पियर्सन का अल्पकालीन (स)

यदि अल्पकालीन समंक दिये हों और कार्ल पियर्सन के सूत्र का प्रयोग करना हो तो उनके सूत्र में एक परिवर्तन यह करना होता है कि विचलन किसी एक स्थिर मध्यक से न निकाल कर चल-माध्यों (Moving Averages) से लिये जायें। जैसा कि अगले उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण—

अवधि	पूर्ति				मूल्य				
	पूर्ति निर्देशांक	चल माध्य	च. म. से विचलन	$वि^2_य$	मूल्य निर्देशांक	चल माध्य	च. मा. से विचलन	$वि^2_र$	$वि_य. वि_र$
१९३६									
सितम्बर	८४				१४४				
अक्टूबर	८८				१४०				
नवम्बर	८३	८७	—४	१६	१४६	१३८	+ ८	६४	—३२
दिसम्बर	८९	८८	+१	१	१३२	१३५	— ३	९	— ३
१९३७									
सितम्बर	९०	९०	०	०	१३०	१३३	— ३	९	०
अक्टूबर	९२	९३	—१	१	१२८	१२८	०	०	०
नवम्बर	९५	९६	—१	१	१२७	१२२	+ ५	२५	— ५
दिसम्बर	९८	९९	—१	१	१२५	११५	+१०	१००	—१०
१९३८									
सितम्बर	१०४	१०४	०	०	९८	१०८	—१०	१००	०
अक्टूबर	१०७	१०९	—२	४	९६	१०१	— ५	२५	+१०
नवम्बर	११५	११४	+१	१	९३	१०२	— ९	८१	—९
दिसम्बर	१२०	११९	+१	१	९२	११४	—२२	४८४	—२२
१९३९									
सितम्बर	१२४	१२३	+१	१	१३०	१३१	—१	१	—१
अक्टूबर	१२८	१२७	+१	१	१६०	१५२	+८	६४	+८
नवम्बर	१३०				१८०				
दिसम्बर	१३४				२००				
				२८				९६२	—६४

$$S \cdot D. x = \sqrt{\frac{\Sigma d^2_x}{N}}$$

$$\text{प्र. वि.}_{\text{य}} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ वि}^2_{\text{य}}}{\text{यो}}}$$

$$= \sqrt{\frac{२८}{१२}} = \frac{५\cdot२}{३\cdot४} = १\cdot५३$$

$$S. D. y = \sqrt{\frac{\Sigma d^2_y}{N}}$$

$$\text{प्र. वि.}_{\text{र}} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{ वि}^2_{\text{र}}}{\text{यो}}}$$

$$= \sqrt{\frac{९६२}{१२}} = \frac{३१}{३\cdot४} = ९\cdot१२$$

$$r = \frac{\Sigma d_x \; d_y}{n \times \sigma x \times \sigma_y}$$

$$\text{स} = \frac{\Sigma \text{ वि}_{\text{य}} \cdot \text{ वि}_{\text{र}}.}{\text{यो} \times \sigma\text{य} \times \sigma\text{र}}$$

$$= \frac{-६४}{१२ \times १\cdot५३ \times ९.१२}$$

$$= \frac{६४}{१६७\cdot४४३२} = -\cdot३८२$$

सह-सम्बन्ध विलोम है ।

वर्गित माला में पियर्सन का (स)

कार्ल पियर्सन का (स) एक वर्गित माला में भी निकाला जा सकता है । वर्गित माला या सह-सम्बन्ध सारणी (Correlation Table) एक ऐसी माला है जिसमें एक ही आवृत्ति दोनों विधेय और सम्बद्ध मालाओं में पाई जा सकती हैं । ऐसी वर्गित माला में सह-सम्बन्ध गुणक निकालने के लिये उसमें से दो अविच्छिन्न मालायें बाहर लेकर उनसे दोनों ही मालाओं के प्रमाप विचलन मालूम कर लिये जाते हैं । तत्पश्चात् उस सारणी के द्वारा Σ वि$_{\text{य}}$· वि$_{\text{र}}$· मालूम करके पूर्वोक्त सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

उदाहरण—३

(र) पतियों की आयु	(य) पत्नियों की आयु						कुल योग आवृत्ति (र)
	बि	१०-२०	२०-३०	३०-४०	४०-५०	५०-६०	
	म.य बि$_{य}$	१५	२५	३५	४५	५५	
१५-२५	२०	६	३				९
२५-३५	३०	३	१६	१०			२९
३५-४५	४०		१०	१५	७		३२
४५-५५	५०			७	१०	४	२१
५५-६५	६०				४	५	९
कुल योग	आ$_{य}$	९	२९	३२	२१	९	१००

(य) माला का प्र. वि. गणन

उम्र संभाग	म.बि.	आवृत्ति बा	म.बि. × बा	कल्पित माध्य से वि$_{य}$	वि$^2_{य}$	वि$^2_{य}$ × बा
१०-२०	१५	९	१३५	—२०	४००	३६००
२०-३०	२५	२९	७२५	—१०	१००	२९००
३०-४०	३५	३२	११२०	०	०	०
४०-५०	४५	२१	९४५	+१०	१००	२१००
५०-६०	५५	९	४९५	+२०	४००	३६००
		यो=१००	३४२०			Σ वि$^2_{य}$. बा. १२,२००

कल्पित माध्य = ३५ वर्ष

यथार्थ माध्य = $\frac{३४२०}{१००}$ = ३४·२

प्र. वि.$_य$ $= \sqrt{\frac{\Sigma वि^2_य बा — यो (म_I — य)^2}{यो}}$

$= \sqrt{\frac{१२२००—१०० (३४·२—३५)^2}{१००}}$

$= \sqrt{\frac{१२१३६}{१००}} = \frac{११०·१६}{१०} =$ ११·०१६

(र) माला का प्र. वि. गणन

उम्र संभाग	म.बि.	आवृत्ति बा	म. बि×बा	कल्पित माध्य से वि$_र$	वि$^2_र$	वि$^2_र$ ×बा.
१५–२५	२०	९	१८०	—२२	४००	३६००
२५–३५	३०	२९	८७०	—१०	१००	२९००
३५–४५	४०	३२	१२७०	०	०	०
४५–५५	५०	२१	१०५०	+ १०	१००	२१००
५५–६५	६०	९	५४०	+ २०	४००	३६००
		यो=१००	३९२०			Σ वि^{2}र. बा =१२,२००

कल्पित माध्य=४० वर्ष

यथार्थ माध्य= $\frac{३९२०}{१००}$ = ३९·२

प्र. वि. र= $\sqrt{\frac{वि^2_र — यो(म_2 – र)^2}{यो}}$

$= \sqrt{\frac{१२२००—१०० (३९·२—४०)^2}{१००}}$

$= \sqrt{\frac{१२·१२६}{१००}} = \frac{११०·१६}{१०}$

=११·०१६

उम्र संभाग →य		10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	वि$_य$ × वि$_र$ × बा
↓ र	वि—य ↓ र	—20	—10	0	—10	—20	
15—25	—20	400 6 2400	200 3 600				3000
25—35	—10	200 3 600	100 16 1600	10			2200
35—45	0		10	15	7		0
45—55	—10			7	100 10 1000	200 4 800	1800
55—65	—20				200 4 800	400 5 2000	2800
वि$_य$ + वि$_र$ =बा		3000	2200	0	1800	2800	Σ वि$_य$. वि$_र$ =९८००

$$r = \frac{\sum d_x\, d_y - n(a_1 - x)\ (a_2 - y)}{n \quad \sigma_x \quad \sigma_y}$$

$$स = \frac{\sum वि_{य}\ वि_{र} - यो\ (म_1 - य)\ (म_2 - र)}{यो. \times प्र.वि._{य} \times प्र.वि._{र}}$$

$$= \frac{९८०० - १०० \ (३४\cdot२ - ३५)\ (३९\cdot२ - ४०)}{१०० \times ११\cdot०१६ \times ११\cdot०१६}$$

$$= \frac{९७३६}{१२१३५\cdot२२५६} = \cdot८०२$$

·८०२ विधेय एवं सम्बद्ध मालाओं में एक बड़ी मात्रा में अनुलोम आश्रयभूतत्व प्रदर्शित करता है ।

उपरोक्त सूत्र के स्थान पर यदि निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाए तो परिगणन अधिक आसान किया जा सकता है ।

$$r = \frac{\sum xy - n\left\{\frac{\sum d_x}{n}\right\}\left\{\frac{\sum d_y}{n}\right\}}{N\sqrt{\frac{\sum d^2_x}{n} - \left\{\frac{\sum d_x}{n}\right\}^2}\sqrt{\frac{\sum d^2_y}{n} - \left\{\frac{\sum d_y}{n}\right\}^2}}$$

$$स = \frac{\sum वि_{य}.\ वि_{र} - यो\left\{\frac{\sum वि_{य}}{यो}\right\}\left\{\frac{\sum वि_{र}}{यो}\right\}}{यो\sqrt{\frac{\sum वि^2_{य}}{यो} - \left\{\frac{\sum वि_{र}}{यो}\right\}^2}\sqrt{\frac{\sum वि^2_{र}}{यो} - \left\{\frac{\sum वि_{र}}{यो}\right\}^2}}$$

$$= \frac{९८०० - १००\left\{\frac{-८०}{१००}\right\}\left\{\frac{-८०}{१००}\right\}}{१००\sqrt{\frac{१२२००}{१००} - \left\{\frac{-८०}{१००}\right\}^2}\sqrt{\frac{१२२००}{१००} - \left\{\frac{-८०}{१००}\right\}^2}}$$

$$= \frac{९८०० - १०० \ (-\cdot८ \times -\cdot८)}{\sqrt{१२२०० - (-\cdot८)^2}\ \sqrt{१२२०० - (-\cdot८)^2}}$$

$$= \frac{९७३६}{१२१३५\cdot२२५६} = \cdot८०२$$

·८०२ एक बड़ी मात्रा में अनुलोम आश्रय भूतत्व प्रदर्शित करता है ।

कार्ल पियर्सन के (स) के लक्षण

(१) सह-सम्बन्ध यह माप हमेशा ही (+१) और (—१) के बीच में पाया जाता ह और यदि शून्य हो तो उसका अर्थ यह होता है कि दोनों ही मालायें स्वतन्त्र हैं और उनमें परस्पर कोई भी सह-सम्बन्ध नहीं है।

(२) यह माप समंकमाला के सभी अंकों को महत्व देता है इसलिये यह सह-विचरण का एक आदर्श माप है।

(३) यह माप संगामी-विचलन गुणक के प्रतिकूल केवल समंकों की आकृति के परिवर्तनों को महत्व न देकर उनकी आकृतियों को भी महत्व देता है इसलिये यह सह-सम्बन्ध का एक यथार्थ माप है।

(४) इस गुणक में केवल एक दोष है कि यदि किन्हीं भी दो समंक-मालाओं का गुणक निकाल दिया जाय तो उसे देख कर मालूम पड़ेगा कि दोनों मालायें सह-सम्बन्धित हैं। इस प्रकार यह गुणक यह नहीं बतलाता कि दोनों मालाओं में कारण और प्रभाव का सम्बन्ध है भी या नहीं।

(स) की परिकल्पनायें (Assumptions)

कार्ल पियर्सन का (स) निम्नलिखित परिकल्पनाओं के आधार पर निर्भर है—

(१) समंकमालाओं के सभी समंकों पर कुछ ऐसे स्वतन्त्र कारण प्रभाव डालते हैं जिनके द्वारा अंक-वंटन में सामान्यता निर्माण होती हो।

(२) यह स्वतन्त्र कारण एक दूसरे पर आश्रय भूत हैं और उनका सम्बन्ध कारण और प्रभाव का है।

सम्भाव्य विभ्रम (Probable Error)

जैसा कि पिछले अध्याय में कहा जा चुका है कि किसी भी 'संमित' अंक-वंटन या सामान्य-वक्र में संभाव्य-विभ्रम (Probable Error) प्रमाप-विचलन का २/३ या ·६७४५ होता है। इस विभ्रम का प्रयोग विभिन्न सांख्य-कीय मापों की यथार्थता जानने के लिये किया जाता है। इसके द्वारा मध्यक, प्रमाप-विचलन और सह-सम्बन्ध गुणक के महत्व का विश्लेषण किया जाता है। इन मापों के विश्लेषण के लिये संभाव्य विभ्रम के निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है—

$$P.E._{Mean} = \cdot 6745 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\text{सं. वि}_{\text{मध्यक}} = \cdot ६७४५ \frac{\text{प्र.वि.}}{\sqrt{\text{यो}}}$$

$$P.E._{S.D.} = \cdot 6745 \frac{\text{प्र.वि.}}{\sqrt{2N}}$$

$$\text{सं. वि.}_{\text{प्र. वि.}} = \cdot ६७४५ \frac{\text{प्र. वि.}}{\sqrt{\text{२ यो}}}$$

$$P.E._{r} = \cdot 6745 \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

$$\text{सं. वि.}_{\text{स.}} = \cdot ६७४५ \frac{१-(\text{स})^2}{\sqrt{\text{यो}}}$$

संभाव्य-विभ्रम का प्रयोग केवल निम्नलिखित दशाओं में ही उपयोगी होता है। (अ) जबकि समग्र के अंकों में वंटन संमितीय हो, (ब) जिस माप की यथार्थता जानने के लिये संभाव्य विभ्रम का प्रयोग किया जा रहा हो वह एक समुचित न्यादर्श पर आधारित हो, और (स) समुचित न्यादर्श दैव-प्रवरण प्रणाली द्वारा लिया गया हो।

(स) का निर्वचन (Interpretation)

सह-सम्बन्ध गुणक का निर्वचन उसकी मात्रा और महत्व के अनुसार किया जा सकता है। मात्रा के अनुसार गुणक का निर्वचन करते समय यह देखा जाता है कि वह (+१) और (—१) के बीच में कहाँ स्थित है।

महत्व के अनुसार (स) के निर्वचन में निम्नलिखित बातों का ध्यान रखा जाता है।

(१) यदि (स) ·३० से कम है तो सह–सम्बन्ध महत्वहीन है।

(२) यदि (स) ·५० से अधिक है तो सह–सम्बन्ध महत्वपूर्ण है।

(३) यदि (स) ·९० से अधिक है तो सह–सम्बन्ध अति महत्व-पूर्ण है।

(४) यदि (स) ·४० से अधिक है परन्तु ६० से कम है तो सह–सम्बन्ध साधारण है ।

(५) यदि (स) ·२५ से कम है तो सह–सम्बन्ध अति महत्वहीन है ।

(६) यदि (स) संभाव्य-विभ्रम से कम है तो समंक्र-मालाओं में सह–सम्बन्ध किंचित मात्र भी नहीं है ।

(७) यदि (स) ६ गुना संभाव्य विभ्रम से भी अधिक है तो सह–सम्बन्ध महत्वपूर्ण है ।

उदाहरण—

यदि समग्र के अंकों की संख्या क्रमशः ५० और ५०० हो तो निम्नलिखित (स) की मात्राओं का महत्व स्पष्ट कीजिए।

स= ·२, ·४, ·९

उत्तर—

(अ) जबकि अंकों की संख्या ५० हो—

(I) P. E. $= \cdot 6745 \frac{1-(r)^2}{\sqrt{N}} = \cdot ६७४५ \frac{१-(स)^2}{\sqrt{यो}}$

$= \cdot ६७४५ \frac{(\cdot २)^2}{\sqrt{50}} = \cdot ६७४५ \frac{\cdot ९६}{७\cdot ०७}$

$= \cdot ०९$

स. वि. का ६ गुना = ·५४

(II) P. E. $= \cdot 6745 \frac{1-(r)^2}{\sqrt{N}}$

$= \cdot ६७४५ \frac{१-(स)^2}{\sqrt{यो}}$

$= \cdot ६७४५ \frac{१-(\cdot ४)}{\sqrt{50}} = \frac{\cdot ८४}{७\cdot ०७}$

$= \cdot ०८$

सं. वि. का ६ गुना = ·४८

(III) $P.E. = \cdot 6745 \dfrac{1-(r)^2}{\sqrt{N}}$

$= \cdot ६७४५ \dfrac{१-(स)^2}{\sqrt{यो}}$

$= \cdot ६७४५ \dfrac{१-(\cdot ९)^2}{\sqrt{50}}$

$= \cdot ६७४५ \dfrac{\cdot १९}{७\cdot ०७} = \cdot ०१८$

सं. वि. का ६ गुना $= \cdot १०८$

(ब) जबकि अंकों की संख्या ५०० हो—

(I) $P.E. = \cdot 6745 \dfrac{1-(r)^2}{\sqrt{N}} = \cdot ६७४५ \dfrac{१-(स)^2}{\sqrt{यो}}$

$= \cdot ६७४५ \dfrac{१-(\cdot २)^2}{\sqrt{500}} = \cdot ३७४५ \dfrac{\cdot ९६}{२२\cdot ३६}$

$= \cdot ०२९$

सं. वि. का ६ गुना $= \cdot १९४$

(II) $P.E. = \cdot 6745 \dfrac{1-(r)^2}{\sqrt{N}} = \cdot ६७४५ \dfrac{१-(स)^2}{\sqrt{यो}}$

$= \cdot ६७४५ \dfrac{1-(\cdot ४)^2}{\sqrt{500}} = \cdot ६७४५ \dfrac{\cdot ८४}{२२\cdot ३६}$

$= \cdot ०२५$

सं. वि. का ६ गुना $= \cdot १५०$

(III) $P.E. = \cdot 6745 \dfrac{1-(r)^2}{\sqrt{N}} = \cdot ६७४५ \dfrac{१-(स)^2}{\sqrt{यो}}$

$= \cdot ६७४५ \dfrac{१-(\cdot ९)^2}{\sqrt{500}} = \cdot ६७४५ \dfrac{\cdot १९}{२२\cdot ३६}$

$= \cdot ००५८$

सं. वि. का ६ गुना $= \cdot ०३४८$

(अ) के (१) और (२) में सह-सम्बन्ध गुणक महत्वहीन हैं और (३) में महत्वपूर्ण। (ब) के (२) में सह-सम्बन्ध गुणक महत्वपूर्ण हैं और (३) में अति-महत्वपूर्ण हैं।

स्पियरमैन की अनुस्थिति रीति

प्रोफ़ेसर चार्ल स्पियरमैन ने सह-सम्बन्ध का एक माप बनाया जो कार्ल पियर्सन के गुणक की अपेक्षा अत्यन्त सरल है। यह गुणक सर्वप्रथम समंक-मालाओं के विभिन्न अंकों को उनकी अपनी माला में अनुस्थिति मालूम करके बनाया जाता है। यह गुणक यद्यपि बहुत सरल है फिर भी प्रोफ़ेसर थर्सटन के कथनानुसार यथार्थ भी हैं क्योंकि इसमें और कार्ल पियर्सन के गुणक में केवल तीसरे दशमलव अंक में अन्तर पड़ता है। इस गुणक को निकालने का परिगणन-क्रम निम्नलिखित है:—

(१) सभी समंकों की क्रमशः अपनी माला में अनुस्थिति (Rank) मालूम कीजिये। यदि कोई दो या अधिक आकृतियाँ बराबर हों तो उनकी अनुस्थितियों का मध्यक उन सभी के सामने रखा जायगा।

(२) विधेय माला के समंकों की अनुस्थिति से सम्बद्ध माला की तत्संवादी अनुस्थितियों को घटा कर उनके वर्ग मालूम करो।

(३) अनुस्थितियों के अन्तरों के वर्गों का जोड़ निकाल कर निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करो।

$$r = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{N (N^2 - 1)}$$

$$\text{स} = १ - \frac{\text{६ अ}^2}{\text{यो} (\text{यो}^2 - १)}$$

उपरोक्त सूत्र में (अ) का प्रयोग विधेय माला की अनुस्थितियों से सम्बद्ध माला की अनुस्थितियों के अन्तरों के लिये किया गया है और (यो) का अर्थ समंकमाला के अंकों की संख्या से है।

पूर्ति		मूल्य		अनुस्थितियों के अन्तर (अ)	(अ)^2
निर्देशांक *Index Nos.*	अनुस्थिति *Ranks.*	निर्देशांक *Index Nos.*	अनुस्थिति *Ranks.*		
८४	१५	१४४	५	१०	१००
८८	१४	१४०	६	८	६४
८३	१६	१४६	४	१२	१४४
८९	१३	१३२	७	६	३६
९०	१२	१३०	८·५	३·५	१२·२५
९२	११	१२८	१०	१	१
९५	१०	१२७	११	—१	१
९८	९	१२५	१२	—३	९
१०४	८	९८	१३	—५	२५
१०७	७	९६	१४	—७	४९
११५	६	९३	१५	—९	८१
१२०	५	९२	१६	—११	१२१
१२४	४	१३०	८·५	—४·५	२०·२५
१२८	३	१६०	३	०	०
१३०	२	१८०	२	०	०
१३४	१	२००	१	०	०
					Σ (अ)^2 =६६३·५

$$स = १ - \frac{६ \Sigma अ^2}{यो\ (यो^2 - १)}$$

$$= १ - \frac{६(६६३·५)}{१६(२५६ - १)}$$

$$= \frac{३९८१}{४०८०} = \frac{९९}{४०८०} = ·०२$$

अनुस्थिति रीति के लक्षण और प्रयोग

(१) इसकी परिगणन क्रिया अत्यन्त आसान है और यह समझ में जल्द आती है।

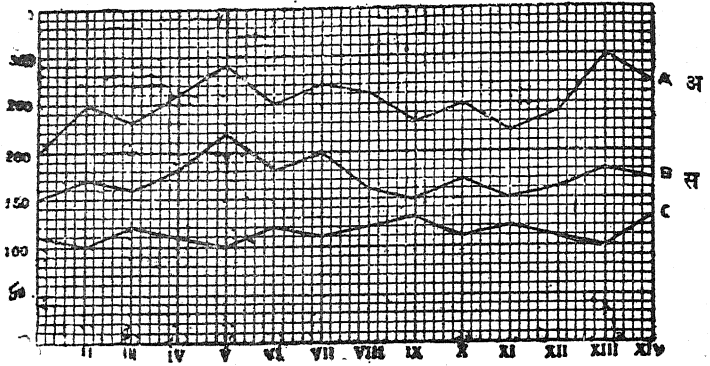
(२) अनुस्थिति गुणक उस समय भी निकाला जा सकता है जब केवल अंकों की अनुस्थिति दी हो।

(३) कार्ल पियर्सन के (स) की अपेक्षा यह गुणक व्यक्तिगत अंकों की अनुस्थितियों के अन्तर को महत्व देता है। इस कारण यह सह–विचरण का एक ऐसा माप है जो परस्पर अपकिरण पर आधारित है और समंकों का उनके माध्य से विचलन नहीं देखता।

(४) इस माप में कुछ कृतिमता है क्योंकि यह अनुस्थितियों पर आधारित है और कदाचित् विभिन्न व्यक्ति विभिन्न अंकों को विभिन्न प्रकार से अनुस्थिति प्रदान करते हैं।

(स) की बिन्दुरेखीय रीति

किन्हीं दो या अधिक समंकमालाओं के परस्पर सह-सम्बन्ध को बिन्दु-रेखा-चित्र बना कर उनके उच्चावचनों की समानता और असमानताओं की तुलना के द्वारा अध्ययन किया जा सकता है। बिन्दुरेखा-चित्रों को देखते ही सर्वसाधारण को सह-सम्बन्ध का अनुमान हो जाता है। यदि किसी भी वक्र का गतिक्रम अन्य वक्र के साथ साथ आरोही या अवरोही दिशा में हो तो सह-सम्बन्ध अनुलोम (+) होता है और यदि वह प्रतिकूल दिशा में हो तो (—) होता है। यदि कोई भी एक निश्चित प्रवृत्ति विभिन्न वक्रों में न दिखाई पड़ती हो तो सदा यही निष्कर्ष निकलेगा कि उनमें सह–सम्बन्ध का सर्वथा अभाव है।

वर्ष Year	(अ) (a)	(ब) (b)	(स) (c)
१	२००	१५०	११०
२	२५०	१७०	१००
३	२३०	१६०	१२०
४	२६०	१८०	११०
५	२९०	२२०	१००
६	२५०	१८०	१२०
७	२७०	२००	११०
८	२६०	१६०	१२०
९	२३०	१५०	१३०
१०	२५०	१७०	११०
११	२२०	१५०	१२०
१२	२४०	१६०	११०
१३	३००	१८०	१००
१४	२७०	१७०	१३०

पुरागमन और विलम्बना

जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि सह-सम्बन्ध केवल उन्हीं समग्रों के बीच हो सकता है जिनमें परस्पर आश्रयभूतत्व हो अर्थात् यदि एक विधेय हो तो दूसरी संबद्ध। संबद्धमाला विधेयमाला के प्रभाव को दिग्दर्शित करती है और प्राय: उसके अंकों के तत्संवादी अंक जो कि दूसरी माला में पाये जाते हैं उनके कारण बतलाते हैं। कभी कभी ऐसा होता है कि कारण और प्रभाव के बीच में समय का अन्तर पड़ जाता है। उदाहरणार्थ, यदि किसी विज्ञापन में कुछ रुपया खर्च किया जा रहा हो तो यह आवश्यक नहीं कि उसका प्रभाव तत्काल ही देखा जा सके। यदि प्रभाव कारण की अपेक्षा तात्कालिक न हो तो ऐसी दशा में कारण प्रभाव की अपेक्षा पुरागमन (Lead) करता है और प्रभाव में कारण की अपेक्षा विलम्बना (Lag) पाई जाती है।

जब किन्हीं भी विधेय और संबद्धमालाओं में कालिक विलम्बना (Time Lag) हो तो सह-सम्बंध गुणक निकालने के लिए उसका ध्यान रखना होता है और प्रत्येक कारण के तत्संवादी प्रभाव को उनके समक्ष रखकर ही गुणक बनाया जाता है। यह नीचे के उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा जिसमें कि एक वर्ष की विलम्बना है और पहला कारण और दूसरा प्रभाव तत्पश्चात दूसरा कारण और तीसरा प्रभाव इत्यादि लिए गए हैं।

उदाहरण—

औसत वार्षिक मूल्य रुई प्रति गाँठ	वि$_{य}$ (य=५१२)	वि$^{2}_{य}$	क्षेत्रफल रुई की खेती (००० एकड़ में)	वि$_{र}$ र =२०९	वि$^{2}_{र}$	वि$_{य}$ × वि$_{र}$
५००	—१२	१४४	२१०	* *	* *	* *
५०५	— ७	४९	२०८	—१	१	+१२
५१५	+३	९	२०५	—४	१६	+२८
५०८	— ४	१६	२१८	+९	८१	+२७
५१२	०	०	२०६	—३	९	+१२
५१०	— २	४	२०९	०	०	०
५२०	+ ८	६४	२०७	—२	४	+ ४
५१८	+ ६	३६	२१०	+१	१	+ ८
५२२	+१०	१००	२१२	+३	९	+१८
५१०	— २	४	२०९	०	०	०
५०१	* *	* *	२०४	—५	२५	+१०
		४२६			१४६	११९

$$r=\frac{\Sigma d_x \; d_y}{n \times \sigma_x \times \sigma_y}$$

$$\text{स} = \frac{\Sigma \text{ वि}_{\text{य}} . \text{ वि}_{\text{र}}}{\text{यो} \times \text{प्र.वि.}_{\text{य}} \times \text{प्र.वि.}_{\text{र}}}$$

$$= \frac{११९}{१० \times \sqrt{\frac{४२६}{१०}} \times \sqrt{\frac{१४६}{१०}}}$$

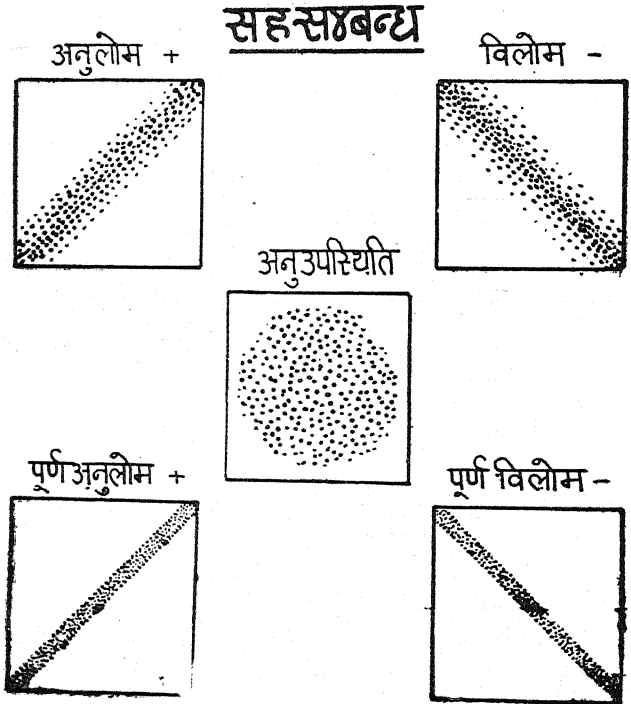
$$= \frac{११९}{\sqrt{४२६ \times १४६}} = \frac{११९}{२४९.२९}$$

$$= \cdot ४७$$

यह सम्बन्ध गणक ये दिखलाता है कि एक वर्ष की विलम्बना छोड़ने पर भी दोनों मालाओं में अनुलोम सह-सम्बन्ध पाया जाता है। पुरागमन

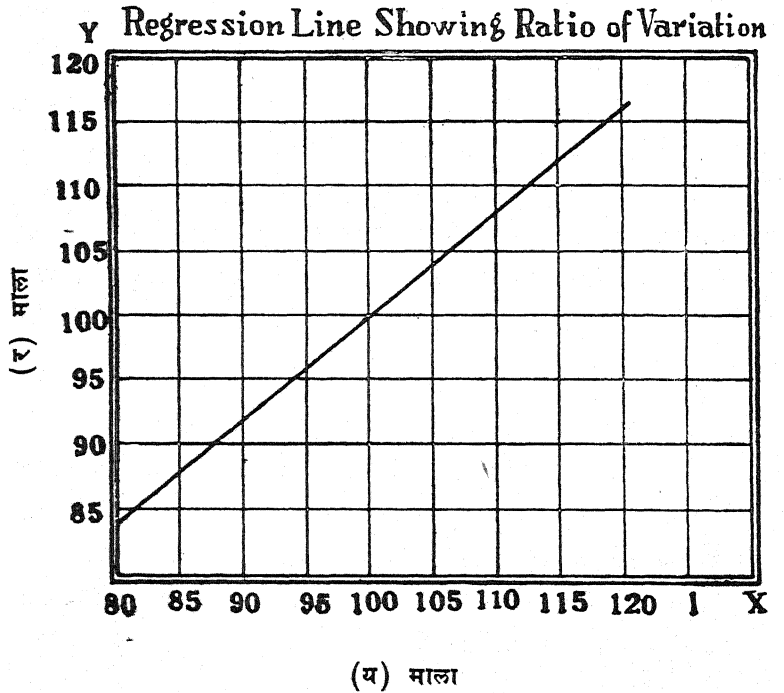
और विलम्बना बहुत अच्छी प्रकार से समझाई जा सकती है यदि दोनों ही मालायें बिन्दु रेखाओं के द्वारा दिखलाई जाँय।

प्रविक्षेप रेखि–चित्र

यदि विधेय और संबद्ध मालाओं के समंकों को बिन्दुरेख कागज पर दिखलाया जाय तो यदि उनमें परस्पर सह-सम्बन्ध होगा तो बिन्दुओं की निश्चित प्रकार की लकीरें सी बन जाँयगी। यदि पूर्ण सह-सम्बन्ध होगा तो एक ही रेखा में सभी बिन्दु आ जाँयगे और यदि समंक–मालाओं में सह–सम्बन्ध का अभाव होगा तो उनके समंकों को प्रदर्शित करने वाले बिन्दु इधर उधर बिखरे से दिखाई देंगे और उनकी कोई निश्चित प्रवृत्ति नहीं जानी जा सकेगी। इन रेखि–चित्रों को प्रविक्षेप रेखि-चित्र (Scatter Diagram) कहते हैं।

विचरण का अनुपात

अभी तक जितने भी सह-सम्बन्ध के मापों का अध्ययन किया गया है वे दोनों ही समंकमालाओं के विभिन्न चल-समंकों (Variables) के परिवर्तनों के अनुपात को महत्व नहीं देते हैं और केवल उनके द्वारा सह-सम्बन्ध की प्रकृति और मात्रा का ज्ञान होता है। कभी कभी पारस्परिक परिवर्तनों के अनुपात जानना भी आवश्यक होता है। उदाहरणार्थ, यह जानना अच्छा ही होगा कि मूल्य की अपेक्षा मांग में कितना अनुपातिक परिवर्तन हुआ है अथवा विभिन्न वर्गों के व्यक्तियों के आय और बचत में क्या अनुपातिक सम्बन्ध है। इसका अध्ययन एक ऐसी रेखा को खींच कर किया जा सकता है जो दोनों ही मालाओं की केन्द्रीय प्रवृत्तियों को दिग्दर्शित करती हो। ऐसी रेखा को अनुकूलतम रेखा (Line of best fit) कहते हैं। यदि इस रेखा के द्वारा (य) अक्ष पर बनाये हुये कोण (Angle) को नाप लिया जाय तो वही दोनों समंकमालाओं के विचरण का अनुपात होगा। यदि यह कोण ४५° का हो तो निष्कर्ष यह निकलेगा कि दोनों मालाओं में (य) और (र) चल-समंकों के परिवर्तनों का अनुपात बराबर है। यह कोण ४५° से जितना ही कम ज्यादा होता जायगा, उतना ही विचरण के अनुपात में अन्तर पड़ता जायगा। जितना ही अनुकूलतम रेखा (य) अक्ष के समानान्तर हो जायगी, उतना ही परिवर्तन का अनुपात (य) माला में (र) की अपेक्षा अधिक होता जायगा और इसी प्रकार इसका प्रतिकूल भी सत्य होगा। अनुकूलतम रेखा को उत्तम अन्वायोजन रेखा भी कहते हैं।

यदि वास्तविक समंकों को बिन्दु रेखा द्वारा न दिखा कर उनके मध्यकों पर आधारित प्रतिशत मूल्यों को ग्राफ पर दिखाया जाय तो विचरण के अनुपात का अध्ययन अधिक अच्छा हो सकेगा। इस विधि के अनुसार दोनों ही मालाओं के मध्यक निकाल लिये जायेंगे और उनके आधार पर विभिन्न समंकों के निर्देशाँक बना कर उन्हें बिन्दुरेखा चित्र पर दिखाया जायगा। यह रीति गॉल्टन (Galton) महोदय ने सर्वप्रथम बतलाई थी, इसीलिये इस चित्र को गॉल्टन-ग्राफ (Galton Graph) कहते हैं।

(य)	%	(र)	%
२३	११५	२८	११२
२४	१२०	२९	११६
२२	११०	२७	१०८
२१	१०५	२६	१०४
२०	१००	२५	१००
१८	९०	२३	९२
१७	८५	२२	८८
१६	८०	२१	८४
१९	९५	२४	९६

प्रतीपगमन रेखा

जैसा कि हम देख चुके हैं कि सह-सम्बन्ध का अर्थ एक प्रकार के आश्रय भूतत्व से होता है जिसमें विधेयमाला यदि कारण प्रदर्शित करती है तो संबद्धमाला उस पर आश्रित होकर उन कारणों का प्रभाव दिखलाती है। प्रत्येक समंकमाला के मध्यक उस माला के विभिन्न अंकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति दिग्दर्शित करते हैं जिस ओर प्रायः सभी अंकों का झुकाव रहता है। यदि यों कहा जाये कि समंकमाला के सभी अंकों की प्रवृत्ति उनके मध्यक की ओर प्रतीपगामी (Regressing) होती है तो अत्युक्ति न होगी। यदि दो समंकमालाओं में परस्पर सह-संबन्ध हो तो दोनों ही मालाओं के अंक एक दूसरे के मध्यकों की ओर प्रतीपगामी होंगे। यदि दोनों ही मालाओं के मध्यकों की आकृति एक ही हो तो केवल एक ही प्रतीपगमन रेखा (Line of Regression) होगी अन्यथा दोनों की केन्द्रीय प्रवृत्तियों को दिग्दर्शित करने के लिये दो रेखायें होंगी। इन प्रतीपगमन रेखाओं को निम्नलिखित सूत्रों द्वारा समझाया जाता है।

(१) $(y-\overline{y}) = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x-\overline{x})$

$$(\text{र}-\overline{\text{र}}) = \text{स} \frac{\text{प्र.वि.}_{\text{य}}}{\text{प्र.वि.}_{\text{र}}} (\text{य}-\overline{\text{य}})$$

(२) $(x-\overline{x}) = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y-\overline{y})$

$$(\text{य}-\overline{\text{य}}) = \text{स} \frac{\text{प्र.वि.}_{\text{य}}}{\text{प्र.वि.}_{\text{र}}} (\text{र}-\overline{\text{र}})$$

उपरोक्त सूत्रों में से पहला (र) माला का (य) पर प्रतीपगमन और दूसरा (य) माला का (र) पर प्रतीपगमन दिखलाता है। इन सूत्रों में (य) और (र) का प्रयोग (य) और (र) मालाओं के मध्यकों के लिये और (स) का प्रयोग सह-सम्बन्ध गुणक और (σ य) और (σ व) का प्रयोग दोनों मालाओं के प्रमाप-विचलनों के लिये और (य) और (र) का प्रयोग दोनों मालाओं के विशिष्ट अंकों के लिये किया गया है।

उपरोक्त प्रतीपगमन रेखाओं की प्रवृत्ति निम्नलिखित गुणक दिखलाते हैं जिन्हें प्रतीपगमन गुणक (Coefficients of Regression) कहते हैं—

Regression Coefficient of x on y.

$$= r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= स \frac{प्र.वि._य}{प्र.वि._र}$$

Regression Coefficient of y on x

$$= r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= स \frac{प्र.वि._र}{प्र.वि._य}$$

प्रतीपगमन रेखाओं के सूत्रों का प्रयोग विधेय और संबद्धमालाओं के किसी भी एक ज्ञात अंक के तत्संवादी अज्ञात अंक को मालूम करने के लिये किया जाता है। जैसा कि पहले कहा जा चुका है कि यदि दोनों मालाओं के सह-सम्बन्ध की मात्रा, मध्यक और मध्यक से प्रमापविचलन दिये हों तो किसी भी एक माला के अंक का अन्य माला में तत्संवादी अंक मालूम करना आसान होगा। यह कि निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण १—निम्नलिखित समंकों की सहायता से कलकत्ता की ७०) मूल्य का बंबई में तत्संवादी मूल्य निकालिये।

कलकत्ता में मध्यक मूल्य ६५)

बम्बई में मध्यक मूल्य ६७) बंबई के मूल्यों का प्र. वि. ३·५

कलकत्ता के मूल्यों का प्र. वि. २·५ सह-संबन्ध गुणक = +·८

उत्तर

मान लिया कि बंबई का मूल्य (य) है और कलकत्ता का मूल्य (र) है। तो हमें उपरोक्त प्रश्न में (र) के दिए हुए मूल्य के लिए (य) का तत्संवादी मूल्य मालूम करना है जो कि निम्नलिखित सूत्र की सहायता से संभव होगा।

$$(x - \overline{x}) = r \frac{\sigma x}{\sigma y} (y - \overline{y})$$

$$(य - \overline{य}) = स \frac{प्र.वि._य}{प्र.वि._र} (र - \overline{र})$$

$$(य-६७) = \cdot८ \frac{३\cdot५}{२\cdot५} \quad (७०-६५)$$

$$य = ६७ + ५\cdot६ = ७२\cdot६$$

इस प्रकार बम्बई में कलकत्ते के ७०) मूल्य का तत्संवादी मूल्य ७२·६ होगा ।

उदाहरण २–

निम्नलिखित दिए हुए समंकों की सहायता से गेहूँ का (अ) हापुड़ में मूल्य निकालिए जब कि कराँची में वह २·३३४ रुपये है और (ब) कराची में मूल्य निकालिए जब कि हापुड़ में वह ३·०५२ रुपये हैं ।

	हापुड़	कराची
मध्यक मूल्य प्रतिमन	२·४६३	२·७९७
प्रमाप–विचलन	·३२६	·२०७
सह-संबन्ध गुणक	+०·७७४	

(P. C. S. 1938)

उत्तर

माना कि हापुड़ का मूल्य (य) और कराची का मूल्य (र) है ।

प्रश्न के पहिले भाग के अनुसार (र) की दी हुई संख्या के लिए (य) की संख्या मालूम करना है जोकि (य) के (र) पर प्रतीपगमन सूत्र द्वारा सम्भव है —

$$(x-\overline{x}) = r \frac{\sigma x}{\sigma y} \quad (y-\overline{y})$$

$$(य-\overline{य}) = स \frac{प्र.वि._य}{प्र.वि._र} -(र-\overline{र})$$

$$(य-२\cdot४६३) = \cdot७७४ \frac{\cdot३२६}{\cdot२०७} (२\cdot३३४-२\cdot७९७)$$

$$(य) = १\cdot२१९ \times -\cdot४६३ + २\cdot४६३$$

$$(य) = २\cdot४६३ - \cdot५६४४$$

$$(य) = १\cdot८९८६$$

प्रश्न के दूसरे भाग के अनुसार (य) की दी हुई संख्या के लिए (र) की संख्या मालूम करना है जो कि (र) के (य) पर प्रतीपगमन सूत्र द्वारा संभव है—

$$(y-\bar{y}) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad (x-x)$$

$$(\text{र}-\bar{\text{र}}) = \text{स}\,\frac{\text{प्र.वि.}_{\text{र}}}{\text{प्र.वि.}_{\text{य}}} \quad (\text{य}-\bar{\text{य}})$$

$$(\text{र}-\text{२·७९७}) = \text{·७७४}\,\frac{\text{·२०७}}{\text{·३२६}}\,(\text{३·०५२}-\text{२·४६३})$$

$$(\text{र}) = \text{·४९}\,(\text{३·०५२}-\text{२·४६३})+\text{२·७९७}$$

$$= \text{·४९}\times\text{·५८९}+\text{२·७९७}$$

$$= \text{·२८८६१}+\text{२·७९७}$$

$$= \text{३·०८५६}$$

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. Explain how a Correlation table (सह-सम्बन्ध सारणी) and a Dot diagram (प्रविक्षेप चित्र) are prepared and state their uses. Show how the Correlation Coefficient (सह-सम्बन्ध-गुणक) can be calculated from a Correlation table.

(*Combined Competitive Exam.*, 1936).

2. What is correlation (सह-सम्बन्ध) ? Explain how will you use the following methods in determining correlation:—

(a) Graph (बिन्दु रेख) (b) Correlation table (सह-सम्बन्ध सारणी), (c) Karl Pearson's Coefficient of Correlation सह-सम्बन्ध गुणक)।

(*B. Com.*, *Agra.*,1940).

3. Discuss the problems involved in correlation analysis सह-सम्बन्ध विश्लेषण) in the case of time series (कालिक माला) nd state how can they be solved.

(*M. A. Alld.*, 1950).

4. Explain by graphical illustration or otherwise the meaning of the term Regression Equation (प्रतीपगमन समीकार) Prove that (r स) is Geometric Mean (गुणोत्तर माध्य) between regression coefficient (प्रतीपगमन गुणक) of y on x and that of x on y. (*I.C.S.*, 1938).

5. Write Short Notes on:— (a) Correlation (विलोम सह-सम्बन्ध), (b) Regression (प्रतीपगमन), (c) Ratio of Variation (विचरणानुपात). (*M.A., Agra.*, 1941.)

6. What are the assumptions (परिकल्पनाएँ) on which the Pearsonian Coefficient of correlations (सह-सम्बन्ध गुणक) is based ? How does the positive (अनुलोम) correlation differ from the negative (विलोम) ? Compute r (स) of the short-time oscilliations (अल्पकालीन उच्चावचन) from the following data.

Year	Supply	Price
1921	80	146
1922	82	140
1923	86	130
1924	91	117
1925	83	133
1926	85	127
1927	89	115
1928	96	95
1929	93	100

(Assume a three-year cycle and ignore decimals).

[$r = -\cdot 99$] (*B. Com., Alld.*, 1943).

7. The following statistical coefficients (सांख्यिकीय माप) were deduced in the course of an examination of the relationship between yields of wheat and the amount of rainfall.

	Yield in lb. per acre	Annual Rainfall in inches
Mean (मध्यक)	985·0	12·8
Standard Deviation (प्र.वि.)	70·1	1·6
r (स) between yield and rainfall		0·52

From the above data Calculate: (a) the most likely yield of wheat per acre when the annual rainfall in 9·2″, and (b) probable annual rainfall for yield of 1400 lbs per acre.

(*M.A.*, *Agra*, 1938).

[(a) 903 lbs.
(b) 17·78 inches]

8. The following data are given for marks in English and Maths. in the S.L.C. examination of the U.P. in a certain year.

Mean (मध्यक) marks in English	39·5
,, ,, ,, Maths	47·6
S.D. (प्र०वि०) of marks in English	10·8
,, ,, ,,	16·9
r (स) between marks in English and Maths.	0·42

Form the two Lines of Regression (प्रतीपगमन रेखा) and explain why there are two equations (समीकार) of regression. Calculate the expected average marks in Maths. of candidates who received 50 marks in English.

[Ans. 54·5] (*P.C.S.*, 1941).

9. Find r (स) from the following Index Numbers and interpret it :—

Wages	Cost of living	Wages	Cost of living
100	98	99	92
101	99	97	95
103	99	98	94
102	97	96	90
100	95	95	91

[r (स) =·85] (*B. Com.*, *Agra*, 1943).

10. The following table gives the birth rates and death rates of a few countries of the world during the year 1931:—

Country	Birth rate	Death rate
Egypt	44	27
Canada	24	11
U.S.A.	19	12
India	33	24
Japan	32	19
Germany	16	11
France	18	16
Irish Free State	20	14
United Kingdom	16	12
Soviet Russia	40	18
Australia	20	9
Newzealand	18	8
Palestine	53	23
Swedan	15	12
Norway	17	11

Find r (स) between the birth rate and the death rate.

[r (स) $= + \cdot 84$] (*Lucknow, B. Com.* 1938).

11. Calculate r (स) from the following table and interpret (निर्वचन) it.

Year	Average Daily No. of Labourers (in '000)	Lakhs of Bales consumed by Mills
1925	368	22
1926	384	21
1927	385	24
1928	361	20
1929	347	22
1930	384	26
1931	395	26
1932	403	29
1933	400	28
1934	385	27

[r (स)$=.78$] (*Agra., B. Com.,* 1941).

12. The following table gives the average annual production of wheat and the average rainfall in the U.P.:—

Year	Price of Wheat (Rs. per maund)	Average annual rainfall (in inches)
1929	5.5	27
1930	3.6	36
1931	2.6	39
1932	3.4	39
1933	3.1	32
1934	2.7	35
1935	3.0	40
1936	2.0	33
1937	2.3	59
1938	3.1	36
1939	3.2	44
1940	3.8	36

Calculate the Coefficient of Correlation between the price of wheat and rainfall.

[*r* (स) = ·5] (*Agra, B. Com.*, 1944).

13. The following table gives data, regarding rainfall, rents of ordinary tenants per acre, under cultivation, and the average annual price of wheat in the U.P. during the last two decades :—

Year	Av. annual price of Wheat (Rs. per md.)	Rainfall (in inches)	Area (crores of acres)	Rent Rs. (per acre)
1920	6.1	29	3.5	6.5
1921	6.9	33	3.4	6.5
1922	6.6	45	3.5	6.6
1923	4.7	51	3.5	6.7
1924	4.7	48	3.5	6.9
1925	5.9	45	3.5	7.0
1926	5.9	40	3.4	7.1
1927	5.2	38	3.4	7.1

1928	5.5	44	3.4	8.0
1929	5.5	27	3.4	8.0
1930	3.6	36	3.4	8.0
1931	3.0	39	3.5	8.0
1932	3.5	39	3.5	7.9
1933	3.1	32	3.5	7.8
1934	2.7	35	3.5	7.8
1935	3.0	40	3.5	7.7
1936	2.0	33	3.5	7.7
1937	2.3	59	3.6	7.6
1938	3.1	36	3.6	7.4
1939	3.2	44	3.6	7.2

Calculate *r* (स) between the Prices of Wheat and Rainfall as given above. (*M. A.*, *Alld.*, 1944).)

[*r* (स) = ·098]

14. The following table gives the results of the Matriculation Examination held in 1936 of a certain University in India :—

Age of Candidates	Percentage of failures
13	39.2
14	40.6
15	43.4
16	34.2
17	36.6
18	39.2
19	48.9
20	47.1
21	54.5

Calculate *r* (स) and estimate its probable error (सम्भाव्य विभ्रम) from your results. Can you definitely assert that failure is correlated with age. (*P.C.S.*, 1940).

[*r* (स) = .68
P.E. (सं० वि०) = .12]

15. The following table gives the distribution of the total population and those who are wholly or partially blind among them. Find out if there is any relation between age and blindness :—

Age	No. of Persons in thousands	Blind
0—10	100	55
10—20	60	40
20—30	40	40
30—40	36	40
40—50	24	36
50—60	11	22
60—70	6	18
70—80	3	15

[Before computing the Coefficient of Correlation (सह-सम्बन्ध गुणक) between age and blindness, the rate of blindness per thousand or per lakh should be determined first, and then *r* (स) calculated between age and rate of blindness.)

[*r* (स) = .898] (*B. Com., Agra,* 1939).

16. Vital Statistical of U.P. (in thousands).

Years	Fevers	Respiratory Diseases	Dyssentry & Diarrohea	others	Total
1931	1025	37	16	228	1306
1932	853	34	13	176	1076
1933	698	35	12	160	905
1934	970	47	18	260	1295

Find out *r* (स) of the death from the fevers and total deaths given above. Calculate Standard Error (प्रमाप विभ्रम) of this Coefficient and the line of regression (प्रतीपगमन रेखा) of the deaths from fevers on total deaths.

[*r* (स) = 0.99 Standard Error (प्र० विभ्रम) = 5,
Regression Equation (समीकार) is y=0.744 x + 34]

(*M. A., Agra.,* 1937).

17. The following table gives the Frequency (आवृत्ति) according to age - group of marks obtained by 67 students in an intelligence test :—

Test Marks	Age—groups 18	19	20	21	Total
200—250	4	4	2	1	11
250—300	3	5	4	2	14
300—350	2	6	8	5	21
350—400	1	4	6	10	21
Total	10	10	19	20	67

Is there any relation between Age and Intelligence ?

[r (स) =.48] (*B. Com.*, *Agra*, 1942).

18. The following table gives the value of exports of raw cotton from India and the value of imports of manufactured cotton goods into India during the year 1913-14 to 1931-32 :—

(In cores of Rupees)

Year	Exports of raw cotton	Imports of manufactured cotton goods
1913—14	42	16
1917—18	44	49
1919—20	58	53
1921—22	55	58
1923—24	89	65
1929—30	98	76
1931—32	66	58

Calculate the coefficient of correlation (सह सम्बन्ध गुणक) between values of exports of raw cotton and the value of imports of cotton manufactured goods.

[r (स) = +·912] (*M. A.*, *Cal.*, 1937).

19. The following table gives the wholesale price index numbers for Calcutta and Karachi for the period 1927-1941:—

Year	Calcutta Index number (Base July, 1914)	Karachi Index number (Base July, 1941)
1927	148	137
1928	145	137
1929	141	133
1930	116	108
1931	96	95
1932	91	99
1933	87	97
1934	89	96
1935	91	99
1936	91	102
1937	102	108
1938	95	104
1939	108	108
1940	120	116
1941	139	120

(a) Calculate the Coefficient of Correlation *r* (स) between the above two series, and state what it indicates.

(b) Point out whether the Calcutta indices are more variable (चल) than the Karachi ones.

[*r* (स) = +.98] (*B. Com. Alld.* 1944).

20. Calculate the Coefficient of correlation *r* (स) between the cost of living and the weekly wages rate from the following data:—

Date	Cost of living Index	Index of weekly wage Rates
1920	151	155
1921	110	126
1922	102	99
1923	101	98
1924	103	101
1925	100	101

1926	100	102
1927	96	100
1928	95	99
1929	95	99
1930	87	98
1931	84	96
1932	81	94

[r (स) = + .836] *(M.A., Alld.,* 1937).

21. The following table gives the number of students having different heights & weights :—

Height in inches	Weight in pounds 80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	Total
50—55	1	3	7	5	2	18
55—60	2	4	10	7	4	27
60—65	1	5	12	10	7	35
65—70	—	3	8	6	3	20
Total	4	15	37	28	16	100

Do you find any relation between height and wieght ?

[r (स) = ·052] *(B. Com., Alld.,* 1949).

22. The following table giving the Index Numbers of Industrial Production of Great Britain and the number of registered unemployed persons in the same country during 1924-1931 :—

Year	Industrial Production (Index Number)	Number of registered unemployed (Hundred thousands)
1924	100	11.3
1925	102	12.4
1926	104	14.0
1927	107	11.1
1928	105	12.3
1929	112	12.2
1930	103	19.1
1931	94	26.4

Calculate coefficient of Correlation between production and the number of unemployed.

[r (स) = — .695] (*B. Com., Luck.*, 1944).

23. From the following table find out how far the fluctuations (उच्चावचन) in prices correspond to the amount of money in circulation in India :—

Year	Rupees and Notes in circulation (crores)	Index Number of prices (1873=100)
1912	248	137
1913	256	143
1914	248	147
1915	266	152
1916	297	184
1917	338	196
1918	407	225
1919	463	276
1920	411	281
1921	393	260

[r (स)= ·96] (*B. Com., Agra.*, 1937).

24. The following table shows the distribution of marks. Calculate the Coefficient of Correlation r (स) and its Probable Error (सम्भाव्य विभ्रम)

Marks in Geography

	Range of Marks	0—20	20—40	40—60	60—80	Total
Marks in Mathematics	0—20	32	88	15	—	135
	20—40	45	436	200	4	685
	40—60	16	500	398	25	939
	60—80	—	105	532	40	677
	80—100	—	8	40	16	64
	Total	93	1,137	1,185	85	2,500

[r (स) = + .485
P.E. (सं. वि.) + .01032] (*M.A., Cal.*, 1935).

25. What is meant by Correlation (सह संम्बंध) ? Give the general rules for interpreting (निर्वचन) its coefficient.

Calculate the Coefficient of Correlation *r* (स) the age of 100 husbands and wives from the following data:—

Age of Husbands in years	Age of wives in years 10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	Total
15—25	6	3	—	—	—	9
25—35	3	16	10	—	—	29
35—45	—	10	15	7	—	32
45—55	—	—	7	10	4	21
55—65	—	—	—	4	5	9
Total	9	29	32	21	9	100

[*r* (स) =0.8] (*M. Com., Alld.*, 1944.)

अध्याय ११

निर्देशांक
(Index Numbers)

निर्देशांक किसी भी ऐसे अंक को कहते हैं जो किसी निश्चित परिवर्तन की ओर निर्देश करे। यदि हमें किसी भी घटना से सम्बन्धित चल-समंकों का अध्ययन करना हो तो हम उनके परिवर्तनों को किसी भी एक निश्चित समय पर उनकी स्थिति को आधार मान कर निर्देशांक की सहायता से किसी अन्य समय में प्रतिशत परिवर्तन के रूप में जान सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि किसी वस्तु का मूल्य सन् १९३८ में ४) प्रति मन था और आज वही ६) प्रति मन हो गया है तो उस वस्तु के मूल्य में जो भी परिवर्तन हुआ है उसकी ओर संकेत करने वाली संख्या निर्देशांक कहलायेगी। अतः यदि हम यह कहें कि सन् १९३८ की अपेक्षा आज उस वस्तु का मूल्य १५० हो गया है तो यह निर्देशांक होगा, जिसे बनाने के लिये आधार वर्ष (१९३८) के मूल्य को १०० मान लिया गया है।

जैसा कि हम देख चुके हैं कि साँख्यिकी में निरपेक्ष मापों की अपेक्षा सापेक्षिक माप अधिक महत्वपूर्ण होते हैं। निर्देशांक एक ऐसा ही सापेक्षिक माप है जो किसी भी निश्चित समय पर संबद्ध समंकों के अन्तर को नापने के लिये बनाया जाता है। यह किसी भी घटना या वस्तु के लिये बनाया जा सकता है जिसमें उच्चावचन पाये जायँ और इनके द्वारा कालिक परिवर्तनों की तुलना के द्वारा किसी भी देश की आर्थिक प्रवृत्तियों की नाप की जा सकती है। इन प्रवृत्तियों की नाप करके देश के आर्थिक स्तर का अनुमान लग सकता है जिसके आधार पर भावी राष्ट्र नियोजन सम्भव है। निर्देशांकों का प्रयोग प्रायः व्यवसाइयों, अर्थशास्त्रियों और सामाजिक कार्यकर्त्ताओं के द्वारा मूल्य मजदूरी, विक्रय, उत्पादन और जीवन-निर्वाह का स्तर इत्यादि नापने में किया जाता है।

प्रायः निर्देशांक दो महत्वपूर्ण कार्य करते हैं—(अ) इनके द्वारा मूल्यों के कालिक परिवर्तनों को नापा जाता है और (ब) इनके प्रयोग के द्वारा

इन मूल्य परिवर्तनों का जनसाधारण के जीवन पर क्या प्रभाव पड़ा है इसे भी जाना जा सकता है। सबसे अधिक प्रयोग किया जान वाला निर्देशांक प्रायः मूल्य निर्देशांक होता है और कभी कभी उनके आधार पर भृत्ति सम्बन्धी समंकों से यथार्थ भृत्ति (Real wages) की एक व्युत्पन्न माला भी बना ली जाती है जो राष्ट्र जीवन के आर्थिक स्तर के परिवर्तनों की ओर समुचित संकेत करती है।

निर्देशांकों के द्वारा मूल्य में परिवर्तन नापे जाते हैं जिससे कि उनके कारणों के प्रति अनुसंधान के लिए आकर्षण निर्माण हो और मूल्यों के आरोही क्रम को जनसाधारण के लाभ के लिए रोका जा सके। इनके द्वारा मूल्य-निर्धारण के लिए उपयोगिता के पुनरुत्पादन की लागत का भी अध्ययन किया जा सकता है। निर्देशांकों की सहायता से राष्ट्रीय आय, व्यवसायिक उत्पादन, कृषि उत्पादन इत्यादि के सामयिक परिवर्तनों को एक सरल और सुगम ढंग से अध्ययन किया जा सकता है।

निर्देशांकों का निर्माण

निर्देशांको का निर्माण १८ वीं शताब्दी के मध्य में इटली के कार्ली (Carli) नामक व्यक्ति ने सर्वप्रथम किया और इनके द्वारा उसने अमेरिका के अन्वेषण का इटली के अनाज, तेल और शराब पर प्रभाव नापने का प्रयत्न किया था। कार्ली ने सन् १५०० ई० के मूल्यों को १०० के बराबर मान कर निर्देशांक मालूम किए थे। उसके बाद १९ वीं शताब्दी के अन्तिम पक्ष में जेवन्स (Jevons) ने निर्देशांकों की सहायता से मूल्य-स्तरों का अध्ययन किया। कार्ली और जेवन्स के समय से अब तक निर्देशांकों के क्षेत्र और गणन में बहुत प्रगति हो गई है।

निर्देशांको के परिगणन में निम्नलिखित बातों पर ध्यान देना आवश्यक होता है—

(अ) वस्तुओं का चुनाव

(ब) आधार वर्ष का निर्णय

(स) उचित माध्य का प्रयोग

(द) भार और भारित करने की विधि

वस्तुओं का चुनाव

वस्तुओं का चुनाव करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि केवल वही वस्तुयें चुनी जायें जो जन-साधारण के उपभोग में आती हों। अपने देश में विभिन्न वर्गों के उपभोग के स्तर विभिन्न होने के कारण वस्तुओं के चुनाव का कार्य काफी कठिन है और कभी कभी यदि कम वस्तुयें चुनी जायें तो वे समुचित रूप से सम्पूर्ण समाज के उपभोग स्तर को प्रदर्शित करने में असमर्थ होती हैं। इसलिये वस्तुओं की संख्या, जनसंख्या की प्रकृति और अपेक्षित यथार्थता की मात्रा पर निर्भर होती है और प्राय: विश्वस्त उद्गमों से प्राप्त मूल्यों का ही प्रयोग करना चाहिये।

आधार वर्ष

निर्देशांक बनाने में आधार वर्ष दो प्रकार का हो सकता है, (अ) स्थिर आधार (Fixed Base) और श्रंखला आधार (Chain Base)।

यदि आधार वर्ष स्थिर हो तो दो प्रकार से निर्देशांक बनाये जाते हैं:—

(१) किसी भी एक वर्ष के समाज के उपभोग की वस्तुओं के मध्यक मूल्य को आधार मान लिया जाय और उन्हें १०० के बराबर मान कर उनके तुलनात्मक मूल्य अन्य वर्षों के लिये निकाल लिये जायें।

(२) किसी भी एक ही वस्तु के कई वर्षों के मध्यक मूल्य को आधार मान लिया जाय और निर्देशांक उनकी तुलना करके बनाया जाय।

किसी भी एक निश्चित वर्ष को आधार वर्ष मानने के पहिले यह देख लेना चाहिये कि वह एक सामान्य प्रकृति का वर्ष रहा है या नहीं क्योंकि किसी भी युद्धकालीन, बाढ़, दुर्भिक्ष, मन्दी या तेज़ी वाले वर्ष को आधार मानने से राष्ट्र-जीवन के परिवर्तनों का यथार्थ माप न हो सकेगा। इसीलिये प्राय: निर्देशांक बनाने के पहिले सन् १९१३ और १९३९ को आधार वर्ष माना जाता रहा है क्योंकि वे युद्धकालीन प्रभावों से सर्वथा रहित थे। अब ऐसा प्रतीत होने लगे कि वस्तुओं के मूल्य प्राय: स्थिर हो चले हैं तो उन पुराने वर्षों को आधार न मान कर कोई नया आधार वर्ष लेना चाहिये। कभी कभी ऐसा भी होता है कि कोई सामान्य वर्ष ढूंढने पर भी नहीं मिलता ऐसी दशा में कई वर्षों के मूल्यों के औसत को आधार मानना उपयोगी होता है।

उदाहरण—१

वस्तुयें	प्रतिशत या मूल्यानुपात, १९३८=१००					
	१९३८	१९३९	१९४०	१९४१	१९४२	१९४३
१—चावल	१००	१०२	११४	११२	११२	१२२
२—गेहूं	१००	१०५	१०५	१०८	१०८	११५
३—जौ	१००	९५	९५	१०२	१०४	११०
४—अलसी	१००	१०४	१०६	१०२	१०२	१०४
५—तम्बाकू	१००	१०४	१०८	१०२	१०४	१०४
मूल्यानुपातों का योग	५००	५१०	५२८	५२६	५३०	५५५
मूल्यानुपातों का मध्यक	१००	१०२	१०६	१०५	१०६	१११
मूल्यानुपातों का मध्यका	१००	१०४	१०६	१०२	१०४	११०
गुणोत्तर माध्य	१००	१०२	१०५	१०५	१०६	१११

उपरोक्त उदाहरण में निर्देशांकों के परिगणन के क्रम निम्नलिखित हैं:—

(१) १९३८ के मूल्यों को आधार माना गया है और उन्हें १०० के बराबर मानकर मूल्यानुपात निकाले गये हैं।

(२) मूल्यानुपात निकालने में प्रत्येक चालू वर्ष के मूल्य को आधार वर्ष के मूल्य से भाग देकर १०० से गुणा किया गया है। जिसका सूत्र निम्न-लिखित है जिसमें P_0 (मू$_0$) और P_1 (मू$_1$) क्रमशः आधार वर्ष और चालू वर्ष के मूल्यों के लिए प्रयुक्त किए गए हैं—

$$\text{चालू वर्ष का निर्देशांक} = \frac{P_1}{P_0} \times १००$$

$$= \frac{\text{मू}_1}{\text{मू}_0} \times १००$$

(३) विभिन्न वस्तुओं के मूल्यानुपातों को जोड़कर उनके विभिन्न माध्य निकाले गये हैं ।

समूह	मूल्य प्रति इकाई					(मध्यक-मूल्य)
	१९१५	१९१६	१९१७	१९१८	१९१९	
१	२	३	४	५	६	४
२	३	४	५	६	७	५
३	४	५	६	७	८	६
१	१००	१५०	२००	२५०	३००	आधार वर्ष १९१५
२	१००	१३३	१६७	२००	२३३	
३	१००	१२५	१५०	१७५	२००	
योग	३००	४०८	५१७	६२५	७३३	
निर्देशांक (मध्यक)	१००	१३६	१७२	२०८	२४४	
१	५०	७५	१००	१२५	१५०	आधार (मध्यक-मूल्य)
२	६०	८०	१००	१२०	१४०	
३	६७	८३	१००	११७	१३३	
योग	१७७	२३८	३००	३६२	४२३	
निर्देशांक (मध्यक)	५९	७९	१००	१२१	१४१	

शृंखला-आधार

आज कल जीवन-निर्वाह का स्तर बहुत अधिक परिवर्तनशील होने के कारण प्राय: उपभोग की वस्तुओं की संख्या और गुणों में बहुत अधिक अन्तर होते रहते हैं। इसलिये यदि एक स्थिर-आधार की अपेक्षा चल-आधार (Shifting Base) लिया जाय तो उसके ऊपर निर्भर मूल्यानुपात राष्ट्र-जीवन की एक अच्छी झांकी प्रस्तुत कर सकेगा। इस रीति के अनुसार आधार वर्ष स्थिर न होकर गतिशील होता है और प्रत्येक आगे के वर्ष के लिये उसके पहिले का वर्ष आधार बन जाता है जिसके कारण निर्देशांक के परिगणन में नई वस्तुओं का समावेश होता रहता है। यह रीति प्रत्येक चालू वर्ष का उसके पहिले के वर्ष से सम्बन्ध समुचित रूप से व्यक्त करने में समर्थ होती है।

प्राय: चल-आधार (Shifting Base) ले लेने से ही काम नहीं चलता और श्रंखला–आधार (Chain Base) पर निर्देशांक बनाने होते हैं।

समूह	मूल्य प्रति इकाई					
	१९४०	१९४१	१९४२	१९४३	१९४४	१९४५
१	४	५	६	८	८	१०
२	५	६	८	९	१०	१२
३	२	३	४	४	५	६
मूल्यानुपात (स्थिर-आधार)						
१	१००	१२५	१५०	२००	२००	२५०
२	१००	१२०	१६०	१८०	२००	२४०
३	१००	१५०	२००	२००	२५०	३००
योग	३००	३९५	५१०	५८०	६५०	७९०
मध्यक	१००	१३२	१७०	१९३	२१७	२६३

समूह	मूल्य प्रति इकाई					
	१९४०	१९४१	१९४२	१९४३	१९४४	१९४५
चल-मूल्या-नुपात						
१	१००	१२५	१२०	१३३	१००	१२५
२	१००	१२०	१३३	११३	१११	१२०
३	१००	१५०	१३३	१००	१२५	१२०
योग	३००	३९५	३८६	३४६	३३६	३६५
मध्यक	१००	१३२	१७०	१९६	२२०	२६८
श्रृंखला—मूल्यानुपात	१००	१३२	११५	१२९	११२	१२२

उपरोक्त उदाहरण में श्रृंखला-मूल्यानुपातों के निकालने का परिगणन क्रम निम्नलिखित है:—

(१) पहिले वर्ष के मूल्य को आधार मान कर दूसरे वर्ष का मूल्यानुपात पूर्वोक्त सूत्र के द्वारा मालूम कीजिये।

(२) तत्पश्चात् दूसरे वर्ष के मूल्य को आधार मान कर तीसरे वर्ष का मूल्यानुपात उसी सूत्र की सहायता से निकालिये और दूसरी रीति के द्वारा सभी वर्षों के क्रमशः चल-मूल्यानुपात (Shifting Base Relatives) मालूम कीजिये।

(३) विभिन्न वर्षों के चल मूल्यानुपातों को जोड़ कर और कुल समूहों की संख्या से भाग देकर मध्यक निकालिये जिन्हें हम चल-आधार-निर्देशांक कह सकते हैं।

(४) यद्यपि चल-आधार-निर्देशांक मालूम कर लेने पर विभिन्न वर्षों के मूल्यानुपातों में एक क्रमबद्ध सम्बन्ध स्थापित हो गया है परन्तु श्रृंखला-पूर्ण करने के लिये उन सब चल-मूल्यानुपातों का फिर से एक स्थिर आधार

से सम्बन्ध स्थापित करना आवश्यक है। इस प्रकार श्रंखला मूल्यानुपात निकालने के लिये निम्नलिखित पद्धति अपनानी पड़ेगी।

∵ जब १९४१ में मूल्य १०० था तो १९४२ में मूल्य १७० था।

∴ जब १९४१ में मूल्य १३२ है तो १९४२ में मूल्य $\frac{१७०}{१००} \times १३२$ होगा।]

∵ जब १९४२ में मूल्य १०० था तो १९४३ में मूल्य १९६ था।

∴ जब १९४२ में मूल्य $\frac{१७०}{१००} \times १३२$ है तो १९४३ में मूल्य $\frac{१९६}{१००} \times \frac{१७०}{१००} \times १३२$ होगा।

∵ जब १९४३ में मूल्य १०० था तो १९४४ में मूल्य २२० था।

∴ जब १९४३ में मल्य $\frac{१९६}{१००} \times \frac{१७०}{१००} \times १३२$ है तो १९४४ में मूल्य $\frac{२२०}{१००} \times \frac{१९६}{१००} \times \frac{१७०}{१००} \times १३२$ होगा।

(५) इसी प्रकार अन्य वर्षों के श्रंखला-मूल्यानुपात निकालिये।

उचित माध्य का प्रयोग

विभिन्न माध्यों में मध्यक का प्रयोग व्यवसायिक समंकों के लिये प्रायः किया जाता है क्योंकि वह बहुत सरल और सुगम होता है परन्तु निर्देशांक बनाने में प्रायः मध्यका और गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है। जबकि किसी भी बाजार में समान वस्तुओं के विभिन्न मल्य चल रहे हों तो मध्यका एक प्रतिनिधि माध्य होता है जोकि एक वास्तविक संख्या हो। गुणोत्तर माध्य का इसलिये प्रयोग किया जाता है कि यह महान परिवर्तनों को कम महत्व देता है और कालिक उच्चावाचनों को छोड़ देने के कारण यह बाजार की प्रवृत्ति का एक यथार्थ मापक होता है इसके अतिरिक्त इसमें

एक बहुत बडा गुण होता है जिसे कि उत्क्राम्यता (Reversibility) कहते हैं।

भार-वंटन (Weighting)

निर्देशांकों के उपरोक्त विवरण में जो भी उदाहरण लिये गय हैं, उनके निर्देशांक बनाते समय सभी अंकों को समान महत्व दिया गया है। परन्तु प्रायः कभी कभी निर्देशांकों में ऐसी वस्तुओं के मूल्य सम्मिलित किये जाते हैं जो परस्पर विभिन्न महत्व रखते हों और जिनका प्रभाव समाज पर विभिन्न हो। इन विभिन्नताओं के कारण भार-वंटन की आवश्यकता पड़ती है। यदि एक ही प्रकृति की परन्तु विभिन्न गुणों वाली वस्तुयें ली जाँय तो उन्हें उनकी संख्याओं द्वारा विभाजित करना चाहिए। भार प्रायः दो प्रकार के होते हैं आन्तरिक (Implicit) और वाह्य (Explicit)। आन्तरिक भार-वंटन वास्तव में वस्तुओं को चुनते समय किया जाता है और वाह्य भार-वंटन मूल्यों की स्पष्ट प्रकृति पर निर्भर रहता है। भार-वंटन प्रायः वाह्य परिमाण, मौद्रिक-मूल्य, और कल्पित महत्व के आधार पर किया जाता है।

जीवन निर्वाह निर्देशांक

ऐसे निर्देशांक जो समाज के विशिष्ट वर्गों के जीवन निर्वाह स्तर के परिवर्तनों की ओर संकेत करते हैं, जीवन निर्वाह निर्देशांक (Cost of Living Index Numbers) कहलाते हैं।

इन निर्देशांकों को बनाते समय इस बात का ध्यान रखना होता है कि वे ही वस्तुयें प्रयोग में लाई जाय जोकि उसकी विशेष के उपयोग में काम आती हैं जिसके कि जीवननिर्वाह स्तर के अध्यपन के लिये निर्देशाँक बनाये जा रहे हैं। क्योंकि प्रत्येक वर्ग के उपयोग की वस्तुयें समान होते हुए भी सामाजिक स्तर विभिन्न होने के कारण उनके गुण एक नहीं होते और इसलिये उनके मूल्य भी एक नहीं हो सकते। उदाहरणार्थ विद्यार्थियों, अफ़सरों और मजदूरों सभी की आवश्यकतायें विभिन्न होंगी और इस कारण निर्देशाँक तभी उनके जीवन का दर्शन करा सकेंगे जब कि वे उनके उपयोग की वस्तुओं के मूल्य पर ही आधारित हों। जीवन-निर्वाह निर्देशाँक बनाते समय भार-वंटन का एक विशेष महत्व होता है। क्योंकि

इसके द्वारा विभिन्न स्तरों के व्यक्तियों के अनकूल ही वस्तुओं के मूल्यों को महत्व दिया जाता है।

जीवन निर्वाह निर्देशाँक बनाने की दो रीतियाँ हैं, (अ) समूही-व्यय रीति (Aggregate Expenditure Method) और (ब) परिवार आय-व्ययक रीति (Family Budget Method)।

समूही-व्यय रीति

इस रीति में आय-व्ययक सम्बन्धी अनुसन्धान करने की आवश्यकता नहीं होती और जिस वर्ग का जीवन निर्वाह निर्देशाँक बनाना होता है उसका आधार वर्ष और चालू वर्ष का समूही व्यय को निकाल कर चालू वर्ष के समूही व्यय को आधार वर्ष के समूही व्यय से भाग देकर लब्धि को १०० से गुणा किया जाता है।

इस निर्देशाँक को समूही-व्यय-रीति से निकालने के परिगणन क्रम निम्नलिखित हैं:—

(१) आधार वर्ष के मूल्यों को उनके तत्संवादी परिमाणों (भार) से गुणा करके उनका योग निकालिये।

(२) इसी प्रकार चालू वर्ष के मूल्यों को आधार वर्ष के परिमाणों से गुणा करके गुणनफलों का योग निकालिये।

(३) चालू वर्ष के समूही व्यय को आधार वर्ष के समूही व्यय से भाग देकर १०० से गुणा कीजिये।

अगले पृष्ठ पर दी गई तालिका में दिए हुए समंकों के आधार पर चालू वर्ष का निर्देशांक निम्नलिखित होगा:—

चालू वर्ष का निर्देशाँक

$$= \frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} = \frac{\Sigma \text{मू}_1 \text{प}_0}{\Sigma \text{मू}_0 \text{प}_0}$$

$$= \frac{३२८}{०२४} \times १०० = \frac{३२८००}{२०४} = १६१$$

आधार वर्ष=१९२६ चल वर्ष=१९४२

वस्तुये	आधार वर्ष में उपभोग परिमाण प॰(Q_0)	इकाई	आधार वर्ष का मूल्य मू॰ (P_0)	चालू वर्ष का मूल्य मू$_I$ (P_I)	आधार वर्ष का समूही व्यय (P_0Q_0) (मू॰प॰)	चालू वर्ष का समूही व्यय ($_IPQ_0$) (मू$_I$प॰)
गेहूं	६ मन	प्रति मन	५	१०	३०	६०
चावल	७ मन	प्रति मन	५	८	३५	५६
चना	४ मन	प्रति मन	३	६	१२	२४
अरहर	२ मन	प्रति मन	४	६	८	१२
घी	६ सेर	प्रति सेर	२	३	१२	१८
गुड़	३ मन	प्रति मन	३	६	९	१८
नमक	२० सेर	प्रति मन	२	४	१	२
तेल	३० सेर	प्रति मन	२०	२८	१५	२१
कपड़ा	५० गज	प्रति गज	१	१·५	५०	७५
लकड़ी	१६ मन	प्रति मन	·७५	१	१२	१६
मिट्टी का तेल	१ टिन	प्रति टिन	४	६	४	६
मकान भाड़ा	—	प्रति मकान	१६	२०	१६	२०
					Σ मू॰ प॰=२०४	Σ मू$_I$प॰=३२८

परिवार आय व्यय रीति

इस रीति के अनुसार विशिष्ट वर्गों के पारिवारिक आय-व्ययकों को एकत्र करके उनके आधार पर भार-वंटन किया जाता है। निर्देशांक बनाने के लिये सर्व प्रथम चालू वर्ष के आधार वर्ष पर आधारित मूल्यानुपात निकाले जाते हैं। इन मूल्यानुपातों को आधार वर्ष के परिमाणों से गुणा करके गुणनफलों के योग को परिमाणों के योग से भाग दे दिया जाता है।

वस्तुयें	इकाई	आधारवर्ष का मूल्य मू$_0$ (P_0) रु०	चालू वर्ष का मूल्य मू$_1$ (P_1) रु०	चालू वर्ष का मूल्यानुपात $\frac{\text{मू}_1}{\text{मू}_0} \times$ १०० = नि (I)	भार (आधार वर्ष प$_0$) = भा (V)	नि × भा (I × V)
गेहूँ	प्रति मन	५	१०	२००	३०	६०००
चावल	,, ,,	५	८	१६०	३५	५६००
चना	,, ,,	३	६	२००	१२	२४००
अरहर	,, ,,	४	६	१५०	८	१२००
घी	प्रति सेर	२	३	१५०	१२	१८००
गुड़	,, मन	३	६	२००	९	१८००
नमक	,, ,,	२	४	२००	१	२००
तेल	,, ,,	२०	२८	१४०	१५	२१००
कपड़ा	प्रति गज	१	१·५	१५०	५०	७५००
लकड़ी	,, मन	७·५	१	१३·३	१२	१५९९·६
मिट्टी का तेल	प्रति टिन	४	६	१५०	४	६००
मकान भाड़ा	—	१६	२०	१२५	१६	२०००
					Σ भा = २०४	Σ नि.भा = ३२,७९९·६

चालू वर्ष का निर्देशांक

$$= \frac{\Sigma \text{ IV}}{\Sigma \text{ I}} = \frac{\Sigma \text{ नि. भा}}{\Sigma \text{ भा}}$$

$$= \frac{३२,७९९·६}{२०४} = १६१$$

जीवन निर्वाह निर्देशांक को परिवार आय-व्ययक रीति से निकालने के परिगणन क्रम निम्नलिखित हैं:—

(१) आधार-वर्ष के मूल्य को १०० मान कर चालू वर्ष के मूल्यानुपात निकाल कर १०० से गुणा करिए।

(२) प्रत्येक चालू वर्ष के मूल्यानुपात को तत्संवादी परिमाणों से गुणा करिए और गुणनफलों के योग को परिमाण के योग से भाग देकर निर्देशाँक निकालिए।

फिशर का आदर्श सूत्र

उपरोक्त उदाहरणों में भार के स्थान पर आधार-वर्ष के परिमाणों को लिया गया है। परन्तु यह रीति केवल ऐसे काल में ही काम में आ सकती है जबकि मनुष्य की इच्छायें और उपभोग की वस्तुओं में स्थिरता हो। प्रायः चालू वर्ष में उपभोग की जाने वाली वस्तुओं का परिमाण वही नहीं होता जोकि आधार वर्ष में रहा हो। इसलिये एक ऐसे सूत्र की आवश्यकता है जो आधार वर्ष और चालू वर्ष दोनों ही के परिमाणों पर आधारित हो। इस आवश्यकता की पूर्ति प्रोफेसर फ़िशर ने अपने आदर्श सूत्र के द्वारा की है जोकि दोनों ही वर्षों के मूल्यों और परिमाणों पर आधारित है। इस सूत्र में $(मू_0)$ और $(म_1)$ एवं $(प_0)$ और $(प_1)$ क्रमशः आधार वर्ष और चालू वर्ष के मूल्य और परिमाण के लिये प्रयुक्त किये गये हैं।

Index No. for the Current Year =

$$100 \times \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}}$$

$$\text{चालू वर्ष का निर्देशाँक} = १०० \times \sqrt{\frac{\Sigma मू_1 प_0}{\Sigma मू_0 प_0} \times \frac{\Sigma मू_1 प_1}{\Sigma मू_0 प_1}}$$

उदाहरण—

सन् १९३९ और १९४९ में एक कुटुम्ब ने निम्नलिखित वस्तुओं का उपभोग किया जिनके कि मूल्य और परिमाण नीचे दिये गये हैं। मूल्य के बढ़ने का कुटुम्ब पर क्या प्रभाव पड़ा है यह निर्देशाँक द्वारा समझाइये।

वस्तुयें	१९३९		१९४९	
	परिमाण $(प_0)$ सेर	मूल्य $(मू_0)$ रु०	परिमाण $(प_1)$ सेर	मूल्य $(मू_1)$ रु०
खाद्यान्न ...	५०	८	४५	३०
सब्जी और फल	३०	६	२५	२०
तेल, घी इत्यादि	१५	२०	१०	७०

आदर्श सूत्र के मूल्यानुपात

	$P_0 Q_0$ मू$_0$ प$_0$	$P_0 Q_1$ मू$_0$ प$_1$	$P_1 Q_0$ मू$_1$ प$_0$	$P_1 Q_1$ मू$_1$ प$_1$
खाद्यान्न ...	४००	३६०	१५००	१३५०
सब्जी और फल	१८०	१५०	६००	५००
तेल, घी इत्यादि	३००	२००	१०५०	७००
योग	८८०	७१०	३१५०	२५५०

चालूवर्ष का निर्देशांक=

$$१०० \times \sqrt{\frac{\Sigma \text{ मू}_1 \text{ प}_0}{\Sigma \text{ मू}_0 \text{ प}_0} \times \frac{\Sigma \text{ मू}_1 \text{ प}_1}{\Sigma \text{ मू}_0 \text{ प}_1}}$$

$$= १०० \times \sqrt{\frac{३१५०}{८८०} \times \frac{२५५०}{७१०}}$$

$$= १०० \times \sqrt{\frac{८०३२५}{६२४८}}$$

$$= १०० \times ३{\cdot}५८$$

$$= ३५८$$

उपरोक्त सूत्र अन्य सूत्रों से उत्तम है क्योंकि उसमें निम्नलिखित दो विशेषतायें हैं:—

(अ) यह सूत्र आधार और चालू दोनों ही वर्षों के मूल्य और परिमाणों को बराबर महत्व देता है और इस कारण इस पर यह आरोप किंचित मात्र भी नहीं लगाया जा सकता है कि किसी भी वर्ष की कुछ संख्याओं को छोड़ दिया गया है।

(ब) यह सूत्र काल-उत्क्रमण-परीक्षा (Time Reversal Test) और तत्व-उत्क्रमण-परीक्षा (Factor Reversal Test) में खरा उतरता है।

काल-उत्क्रमण परीक्षा के अनुसार यदि आधार वर्ष को चालूवर्ष और चालू वर्ष को आधार वर्ष मान लिया जाय तो प्राप्त निदशाँक पूर्व निर्देशाँक का व्युत्क्रम (Reciprocal) होगा ।

तत्व-उत्क्रमण-परीक्षा के अनुसार यदि दोनों वर्षों के मूल्य और परिमाणों में अदल बदल हो जाय तो निष्कर्ष में अन्तर न पड़ेगा ।

उदाहरण—

वस्तुएँ	आधार वर्ष		चालूवर्ष		मू$_0$ प$_0$	मू$_1$ प$_0$	मू$_0$ प$_1$	मू$_1$ प$_1$
	मू$_0$	प$_0$	मू$_1$	प$_1$				
१	६	५०	१०	५६	३००	५००	३३६	५६०
२	२	१००	२	१२०	२००	२००	२४०	२४०
३	४	६०	६	६०	२४०	३६०	२४०	३६०
४	१०	३०	१२	२४	३००	३६०	२४०	२८८
५	८	४०	१२	३६	३२०	४८०	२८८	४३२
					Σ मू$_0$ प$_0$ = १३६०	Σ मू$_1$ प$_0$ = १९००	Σ मू$_0$ प$_1$ = १३४४	Σ मू$_1$प$_1$ =१८८०

फिशर के अनुसार तत्व-उत्क्रमण-परीक्षा की संतुष्टि हो जायगी यदि निम्नलिखित सम्बन्ध पाया जाए, यथा—

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma\ P_1\ Q_1}{\Sigma\ P_0\ Q_0}$$

$$\text{मू}_{01} \times \text{प}_{01} = \frac{\Sigma\ \text{मू}_1\ \text{प}_1}{\Sigma\ \text{म}_0\ \text{प}_0}$$

जबकि (मू$_{01}$) का प्रयोग चालू वर्ष के मूल्य का आधार वर्ष के मूल्य पर आधारित मूल्यानुपात और (प$_{01}$) का प्रयोग चालू वर्ष के परिमाण का आधार वर्ष के परिमाण पर आधारित परिमाणानुपात के लिए किया गया हो ।

फिशर के आदर्श सूत्र के अनुसार

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma\ P_1\ Q_0}{\Sigma\ P_0\ Q_0} \times \frac{\Sigma\ P_1\ Q_1}{\Sigma\ P_0\ Q_1}}$$

$$मू_{०१} = \sqrt{\frac{\Sigma\ मू_१\ प_०}{\Sigma\ मू_०\ प_०} \times \frac{\Sigma\ मू_१\ प_१}{\Sigma\ मू_०\ प_१}}$$

$$= \sqrt{\frac{१९००}{१३६०} \times \frac{१८८०}{१३४४}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma\ P_0\ Q_1}{\Sigma\ P_0\ Q_0} \times \frac{\Sigma\ P_1\ Q_1}{\Sigma\ P_1\ Q_0}}$$

$$प_{०१} = \sqrt{\frac{\Sigma\ मू_०\ प_१}{\Sigma\ मू_०\ प_०} \times \frac{\Sigma\ मू_१\ प_१}{\Sigma\ मू_१\ प_०}}$$

$$= \sqrt{\frac{१३४४}{१३६०} \times \frac{१८८०}{१९००}}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma\ P_1\ Q_0}{\Sigma\ P_0\ Q_0} \times \frac{\Sigma\ P_1\ Q_1}{\Sigma\ P_0\ Q_1} \times \frac{\Sigma\ P_0\ Q_1}{\Sigma\ P_0\ Q_0} \times \frac{\Sigma\ P_1 Q_1}{\Sigma\ P_1 Q_0}}$$

$$मू_{०१} \times प_{०१} = \sqrt{\frac{\Sigma\ मू_१\ प_०}{\Sigma\ मू_०\ प_०} \times \frac{\Sigma\ मू_१\ प_१}{\Sigma\ मू_०\ प_१} \times \frac{\Sigma\ मू_०\ प_१}{\Sigma\ मू_०\ प_०} \times \frac{\Sigma\ मू_१\ प_१}{\Sigma\ मू_१\ प_०}}$$

$$= \sqrt{\frac{१९००}{१३६०} \times \frac{१८८०}{१३४४} + \frac{१३४४}{१३६०} \times \frac{१८८०}{१९००}}$$

$$= \sqrt{\frac{१८८०}{१३६०} \times \frac{१८८०}{१३६०}}$$

$$= \frac{१८८०}{१३६०} = \frac{\Sigma\ P_1\ Q_1}{\Sigma\ P_0\ Q_0} = \frac{\Sigma\ मू_१\ प_१}{\Sigma\ मू_०\ प_०}$$

इस प्रकार तत्व-उत्क्रमण-परीक्षा की संतुष्टि हो जाती है।

फिशर के अनुसार काल-उत्क्रमण-परीक्षा की संतुष्टि हो जावेगी यदि निम्नलिखित सम्बन्ध पाया जाए,

$$P_{01} \times P_{10} = 1$$

$$मू_{०१} \times मू_{१०} = १$$

जबकि ($मू_{०१}$) का प्रयोग चालू वर्ष के आधार वर्ष पर आधारित मूल्यानुपात और ($मू_{१०}$) का प्रयोग आधार वर्ष के चालू वर्ष पर आधारित मूल्यानुपात के लिये किया गया हो।

फिशर के आदर्श सूत्र के अनुसार

$$P_{0I} = \sqrt{\frac{\Sigma\ P_I\ Q_0}{\Sigma\ P_0\ Q_0} \times \frac{\Sigma\ P_I\ Q_I}{\Sigma\ P_0\ Q_I}}$$

$$\text{मू}_{0I} = \sqrt{\frac{\Sigma\ \text{मू}_I\ \text{प}_0}{\Sigma\ \text{मू}_0\ \text{प}_0} \times \frac{\Sigma\ \text{मू}_I\ \text{प}_I}{\Sigma\ \text{मू}_0\ \text{प}_I}}$$

$$= \sqrt{\frac{१९००}{१३६०} \times \frac{१८८०}{१३४४}}$$

$$P_{I0} = \sqrt{\frac{\Sigma\ P_0\ Q_0}{\Sigma\ P_I\ Q_0} \times \frac{\Sigma\ P_0\ Q_I}{\Sigma\ P_I\ Q_I}}$$

$$\text{म}_{I0} = \sqrt{\frac{\Sigma\ \text{मू}_0\ \text{प}_0}{\Sigma\ \text{मू}_I\ \text{प}_0} \times \frac{\Sigma\ \text{मू}_0\ \text{प}_I}{\Sigma\ \text{मू}_I\ \text{प}_I}}$$

$$= \sqrt{\frac{१३६०}{१९००} \times \frac{१३४४}{१८८०}}$$

$$\text{मू}_{0I} \times \text{मू}_{I0} = \sqrt{\frac{१९००}{१३६०} \times \frac{१८८०}{१३४४} \times \frac{१३६०}{१९००} \times \frac{१३४४}{१८८०}}$$

$$= \sqrt{१} = १$$

इस प्रकार काल-उत्क्रमण-परीक्षा की संतुष्टि हो जाती है ।

विदेशी निर्देशांक

इंगलैण्ड

(१) सार बेक निर्देशांक (Saurbeck's Index)

यह निर्देशांक इंगलैण्ड में बनाया जाता था और इसका आधार वर्ष १८६७ से १८७७ तक के ११ वर्षों का औसत मूल्य रखा गया था । इसमें

जिन वस्तुओं के मूल्यों को लिया गया था उन्हें ४५ वर्गों में बांटा गया था। कुछ वर्गों के दो या तीन विभाग भी किये गए थे। निर्देशांक के परिगणन में मध्यक का प्रयोग किया जाता था। प्रत्येक वस्तु की अनुपातिक संख्या मालूम करने के लिए आधार काल के औसत मूल्य को १०० के बराबर मान लिया जाता था और उसके अनुसार चालू वर्ष का मूल्यानुपात मालूम कर लिया जाता था।

(२) स्टेटिस्ट निर्देशांक ('Statist's' Index)

इंगलैण्ड की 'स्टेटिस्ट' नामक पत्रिका प्रतिमास मूल्यों के निर्देशांक छापती है और ये प्रायः सारबेक के निर्देशांकों के आधार पर ही बनाये जाते हैं। एक प्रकार से ये सारबेक के निर्देशांकों के अविच्छिन्न क्रम (Continuation) के रूप में चालू हैं और इन्हें बनाने में वे ही वस्तुएं और आधार वर्षों का प्रयोग किया जाता है। इन निर्देशांकों में केवल एक अन्तर है और वह यह कि सारबेक निर्देशांकों की अपेक्षा वर्गीकरण में कुछ परिवर्त्तन कर दिया गया है।

(३) इकानॉमिस्ट निर्देशांक ('Economist's' Index)

यह इंगलैण्ड का एक प्रमुख पत्र है जिसमें मूल्य-निर्देशांक प्रकाशित होते हैं। आरम्भ काल में २२ वस्तुओं के मूल्यों के आधार पर उपरोक्त प्रकार से वर्गीकरण करके मूल्य निर्देशांक १८४५ से १८५० के औसत मूल्यों के अनुसार बनाया जाता था। सन् १९११ में इस निर्देशांक में परिवर्त्तन किये गए और अब १९०१ से १९०५ की अवधि को आधार माना जाता है और आधार काल का निर्देशांक १०० न मान कर २२०० लिया जाता है। चालू वर्ष का निर्देशांक निकालने के लिए चालू अवधि के औसत मूल्य को आधार मूल्य के प्रतिशत के रूप में परिवर्त्तित कर दिया जाता है और सभी प्रतिशतों को जोड़ कर दो से विभाजित कर दिया जाता है। इस निर्देशांक को बनाने में ४४ वस्तुओं का प्रयोग किया जाता है जो कि निम्न पाँच वर्गों में बँटी है—(१) अनाज, (२) अन्य खाद्य पदार्थ (चाय, शक्कर, इत्यादि), (३) टेक्सटाइल, (४) खनिज पदार्थ, (५) मिश्रित (मक्खन, लकड़ी इत्यादि)। प्रत्येक वर्ग के लिए अलग अलग भी निर्देशांक बनाया जाता है।

संयुक्त राष्ट्र के विदेशी और देशी व्यापार ब्यूरो (Bureau of Foreign and Domestic Commerce) द्वारा एक विश्व-मूल्य निर्देशाँक बनाया जाता है ।

संयुक्त राष्ट्र में सिक्युरटी मूल्यों के तीन प्रमुख निर्देशाँक हैं—(अ) डो-जोन्स निर्देशाँक (Dow-jones Index of stock prices) जोकि सबसे पुराना निर्देशाँक है और सन् १८८४ से चालू है । यह ११ शेयरों के बन्द होने के भाव पर आधारित ह । (ब) न्ययार्क टाइम्स निर्देशाँक जो सन् १९११ से प्रारम्भ किया गया है और (स) स्टैण्डर्ड स्टैटिस्टिक्ज कंपनी का निर्देशाँक जो शेयरों पर आधारित एक भारित मध्यक है । इसका आधार वर्ष सन् १९२६ है ।

न्यूयार्क का फेडरल रिजर्व बैंक अब सामान्य मूल्य स्तर के लिए निर्देशाँक बनाता है जिसे स्नाइडर निर्देशाँक (Snyder's Index) कहते हैं । यह एक भारित मध्यक है और प्रत्येक वर्ग के लिए अलग अलग निर्देशाँक प्रदान करता है ।

(२) जीवन-निर्वाह निर्देशांक

संयुक्त राष्ट्र श्रम ब्यूरो जीवन निर्वाह के निर्देशाँक नेशनल इन्डस्ट्रियल कान्फ्रेन्स बोर्ड द्वारा प्रतिमाह छापे जाते हैं । ये जोवन निर्वाह निर्देशाँक ३२ नगरों (जिनकी जनसंख्या ५०,००० से ऊपर हो) के लिए बनाए जाते हैं और संयुक्त राज्यों के लिए भी एक संयुक्त निर्देशाँक छापा जाता है । इसके बनाने में समूही-व्यय पद्धति (Aggregative Method) का प्रयोग किया जाता है । इसमें वस्तुओं को निम्नलिखित ६ वर्गों में बाँटा गया है—(१) खाद्यपदार्थ, (२) कपड़े, (३) किराया, (४) लकड़ी व रोशनी, (५) फर्नीचर इत्यादि, (६) मिश्रित ।

(३) अन्य निर्देशांक

अमरीका में उत्पादन के भौतिक आयतन संबन्धी निर्देशांक फेडरल रिजर्व बुलेटिन में छापे जाते हैं जो कि समूही पद्धति पर आधारित हैं ।

इनका आधार सन १९२३–१९२५ तक तीन वर्षों का औसत है। उपरोक्त निर्देशाँक के अतिरिक्त फेडरल रिजर्व बैंक आफ न्यूयार्क उत्पादन और व्यापार के मासिक निर्देशाँक छापता है जिनमें उत्पादन के अतिरिक्त व्यापार के आयतन को भी लिया जाता है।

व्यवसायिक चक्रों (Business Cycles) के निर्देशाँक भी कई एक छपते हैं जोकि चक्रीय उच्चावचनों के अतिरिक्त अन्य सभी आर्तव व अल्पकालीन प्रभावों को दूर करते हैं। बैरन का उत्पादन और व्यापारिक निर्देशाँक (Barron's Index of Production and Trade) एक वार्षिक निर्देशाँक है जिसमें शिल्प-उत्पादन के आयतन, खनिज संबंधी उत्पादन, गृह निर्माण, विद्युत-शक्ति उत्पादन, रेलों का उत्पादन और थोक व फुटकर व्यापार संबंधी समंकों का प्रयोग किया जाता है। इसके परिगणन में गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है।

न्यूयार्क टाइम्स द्वारा व्यवसायिक क्रिया को साप्ताहिक निर्देशाँक छापा जाता है जिसमें प्रवृत्ति (Trend) और साप्ताहिक आर्तव उच्चावचनों के निमित्त संशोधन करने के उपरान्त मूल्यों को सम्मिलित किया जाता है।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. What is the purpose of Index Numbers (निर्देशांकों). Explain clearly how they are prepared and used.

(*B. Com.*, *Agra*, 1937).

2. It is desired to find the difference in the cost of living (जीवन-निर्वाह स्तर) in the years 1929 and 1938 in the case of (*i*) clerks and (*ii*) labourers in a big town.

Explain fully the necessary procedure to be adopted.

(*B. Com.*, *Agra*, 1939).

2. Index numbers are Economic Barometers (वापीडमान). Explain the statement and mention what precautions should be taken in making use of any published index numbers.

Show with the help of an example how would you convert the index numbers from one basic period to another.

(*B. Com., Agra*, 1940).

3. Explain the uses of Index Numbers. Describe the procedure followed in the preparation of general and cost of living index numbers.

(*B. Com., Agra*, 1942.)

4. What is a weighted index number (भारित निर्देशांक). Enumerate some of the important methods of weighting a price index and discuss their relative merits and demerits.

(*P.C.S.* 1948).

5. Distinguish between Fixed Base (स्थिर आधार) and Chain Base (श्रंखला आधार) methods of constructing Index Numbers giving examples. Describe the various methods of weighting (भार वंटन) the index numbers of prices.

(*I.A.S.*, 1945).

6. You are required to construct a cost of living index for textile workers of a city. Indicate what information you would collect for the purpose and explain the method of constructing the index. (*I.A.S.*, 1948).

7. Explain the importance of weighting in the construction of Index Numbers. How would you determine the weights in computing an—

(*a*) Index of Wholesale Prices,

(बहुशो मूल्य या थोक मूल्य निर्देशांक)

(*b*) Index Number of Cost of Living,

(जीवन निर्वाह निर्देशांक)

(*c*) Index Number of Industrial Production,

(व्यवसायिक उत्पादन निर्देशांक)

(*M. A., Agra*, 1946).

8. What are the main sources of errors (विभ्रम के उद्गम) in Cost of living Index Number. How can these errors be avoided ?

(*B. Com., Alld.*, 1933).

9. Explain the meaning of Economic Barometers (आर्थिक वापीडमान). How is this Barometer constructed, and how far it is being used successfully in forecasting economic events. (*M.A. Alld.*, 1938).

10. Discuss the problem of obtaining an ideal formula (आदर्श सूत्र) for an index number of prices. What is meant by the 'Factor Reversal test' (तत्व-उत्कमण-परिक्षा) and by the 'Time Reversal test' (काल उत्क्रमण परीक्षा) (*P.C.S.* 1939).

11. Use the following data of industrial production in India to compare the annual fluctuations (उच्चावचन) in Indian industrial activity by the chain base (श्रंखला आधार) method :—

Index Numbers of Industrial Production in India.

Year	Index No.	Year	Index No.
1919—20	120	1926—27	149
—21	122	—28	156
—22	116	—29	137
—23	120	—30	162
—24	120	—31	149
—25	137	—32	160
—26	136	—33	160

(*M. Com.*, *Luck.*, 1943).

[Link Relatives 100, 101.7, 95.1, 103.4, 100, 114.2, 99.3 109.6, 104.7, 87.8, 118.2, 91.9, 107.4, 100]

{ Chain Base Index No. (श्रंखला निर्देशांक) 100, 101.7, 95.1 98.4, 98.4, 111.7, 110.8, 121.32, 127.02, 110.52, 130.63, 120.17, 129.06, 129.06. }

12. The following are the group index numbers and the group weights of an average working class family's budget. Construct the cost of living index number (जीवन निर्वाह निर्देशांक) assigning the given wei ghts.

Groups	Index Nos.	Weight
Food	352	48
Fuel and Lighting	220	10
Clothing	230	8
Rent	160	12
Miscellaneous	190	15

[Cost of living Index No.=276.4] (*I.A.S.* 1950).

13. An enquiry into the budgets (आय व्ययक) of the middle class families in a city in England gave the following information :—

Expenses on	Food 35%	Rent 15%	Clothing 10%	Fuel 10%	Misc. 20%
Prices (1928)	£150	£30	£75	£25	£40
Prices (1929)	£145	£30	£65	£23	£45

What changes in cost of living figures of 1929 as compared with that of 1928 are seen.

(*B. Com., Luck.*, 1944).

[Cost of Living Index (जीवन निर्वाह निर्देशांक) based on 1928= 97.95]

14. Given the following data, what index numbers would you use for purposes of comparison ? Give reasons

Year	Rice		Wheat		Jowar	
	Price	quantity	Price	quantity	Price	quantiy
1927	9.3	100	6.4	11	5.1	5
1934	4.5	90	3.7	10	2.7	3

Prices and Quantities are given in arbitrary units.

(*M. A. Cal.*, 1937).

$$\left\{ \text{Index No. for Current year} = 100 \times \sqrt{\frac{\Sigma p^1 q^0}{\Sigma p^0 q^0} \times \frac{\Sigma p^1 q^1}{\Sigma p^0 q^1}} = 49 \right\}$$

15. Construct the cost of living Index for April 1944 from the following data.

Groups	Weights proportionate to total expenditure	Group Index No. for April 1944
Food	47	247
Fuel and Lighting	7	293
Clothing	8	289
House rent	13	100
Miscellaneous	14	236

(*B. Com., Alld.* 1945)

[The Cost of Living Index for April 1944=231. (जीवन निर्वाह निर्देशांक)]

16. From the following group average prices prepare Index Numbers with a view to determine the amount of wages:—

Group	1913 Rs.	as.	p.	1914 Rs.	as.	p.	1915 Rs.	as.	p.	1916 Rs.	as.	p.
(1) Food per md.	4	0	0	4	8	0	5	0	0	6	0	0
(2) Rent per room	2	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0
(3) Cloth per yard	0	6	0	0	8	0	0	12	0	0	14	0
(4) Misc. per unit	2	0	0	2	8	0	3	4	0	3	8	0

Take the prices of 1913 as the base and give the four groups weightage (भार) in the porportion of 8,5,3 and 2.

[Index Nos. 100, 114, 149 and 181] (*B. Com. Agra.* 1947).

17. Explain what is meant by 'Factor Reversal Test' (तत्व-उत्क्रमण-परीक्षा). Construct with the help of data given below, Fishers ideal Index and show how it satisfies the Factor Reversal test.

Article	Estimated Total Produce in thousand Tons in Distt. Saran		Harvest Price per maund in Distt Saran			
	1931-32	1932-33	1931-32		1932-33	
Winter Rice	71	26	3	8	3	[illegible]
Burely	107	83	2	0	1	1[illegible]
Maize	62	48	2	9	1	1[illegible]

(*M.A.*, *Patna*, 1942).

[Fisher's Ideal Index=84.8 (फिशर का आदर्श निर्देशांक)]

18. Prepare Index Numbers of prices for three years with the average price as base.

	Rate for Rupee		
	Wheat	Cotton	Oil
1st year	10 srs.	4 srs.	3 srs
2nd year	9 srs.	$3\frac{1}{2}$ srs.	3 srs
3rd year	9 srs.	3 srs.	$2\frac{1}{2}$ srs

(*B. Com.*, *Agra*, 1941).

{ The prices should first be converted into Rupee per seer, the average price then determined and the price relatives computed. }

19. Explain the Fisher's Ideal formula for preparing Index Numbers. What are 'Time Reversal' (काल उत्क्रमण) and 'Factor Reversal' (तत्व उत्क्रमण) tests ? Prepare Index Number for 1904 on the basis, of 1902, where the following information is given.

Year	Article I		Article II		Article III	
	Price	Quantity	Price	Quantity	Price	Quantity
1902	5	10	8	6	6	4
1904	4	12	7	7	5	3

[Fisher's Ideal Index (आदर्श निर्देशांक) of Price =83.15]

(*M. Com.*, *Agra*, 1947).

20. Construct the Cost of living index number, (जीवन निर्वाह निर्देशांक) for 1940 on the basis of 1939 from the following data using the Aggregate Expenditure Method (समूही व्यय रीति):—

Article	Quantity consumed in 1939	Price in Rupees in 1939			Price in Rupees in 1940		
		Rs.	as.	p.	Rs.	as.	p.
Rice	6 mds.	5	12	0	6	0	0
Wheat	6 mds.	5	0	0	8	0	0
Gram	1 md.	6	0	0	9	0	0
Arhar	6 mds.	8	0	0	10	0	0
Ghee	4 srs.	2	0	0	1	8	0
Sugar	1 md.	20	0	0	15	0	0
Oil	20 srs.	20	8	0	18	0	0
Salt	12 srs.	4	0	0	4	12	0
Fuel	12 mds.	0	12	0	1	0	0
Cloth	50 yds.	0	8	0	0	12	0
House Rent	—	10	0	0	12	0	0

(*B. Com*, *Agra*, 1953).

[Cost of living Index No. for 1940 based on 1939 according to Aggregate Expenditure Method=121.7]

21. From the information given below prepare Cost of Living Index Nos. for 1948 and 1949 taking the average price of 1947 as base.

Article	Estimated Total Produce in thousand Tons in Distt. Saran		Harvest Price per maund in Distt Saran			
	1931-32	1932-33	1931-32		1932-33	
Winter Rice	71	26	3	8	3	2
Burely	107	83	2	0	1	14
Maize	62	48	2	9	1	12

(*M.A.*, *Patna*, 1942).

[Fisher's Ideal Index=84.8
(फिशर का आदर्श निर्देशांक)]

18. Prepare Index Numbers of prices for three years with the average price as base.

	Rate for Rupee		
	Wheat	Cotton	Oil
1st year	10 srs.	4 srs.	3 srs.
2nd year	9 srs.	$3\frac{1}{2}$ srs.	3 srs.
3rd year	9 srs.	3 srs.	$2\frac{1}{2}$ srs.

(*B. Com.*, *Agra*, 1941).

{ The prices should first be converted into Rupee per seer, the average price then determined and the price relatives computed. }

19. Explain the Fisher's Ideal formula for preparing Index Numbers. What are 'Time Reversal' (काल उत्क्रमण) and 'Factor Reversal' (तत्व उत्क्रमण) tests ? Prepare Index Number for 1904 on the basis, of 1902, where the following information is given.

Year	Article I		Article II		Article III	
	Price	Quantity	Price	Quantity	Price	Quantity
1902	5	10	8	6	6	4
1904	4	12	7	7	5	3

[Fisher's Ideal Index (आदर्श निर्देशांक) of Price =83.15]

(*M. Com.*, *Agra*, 1947).

20. Construct the Cost of living index number, (जीवन निर्वाह निर्देशांक) for 1940 on the basis of 1939 from the following data using the Aggregate Expenditure Method (समूही व्यय रीति):—

Article	Quantity consumed in 1939	Price in Rupees in 1939 Rs. as. p.	Price in Rupees in 1940 Rs. as. p.
Rice	6 mds.	5 12 0	6 0 0
Wheat	6 mds.	5 0 0	8 0 0
Gram	1 md.	6 0 0	9 0 0
Arhar	6 mds.	8 0 0	10 0 0
Ghee	4 srs.	2 0 0	1 8 0
Sugar	1 md.	20 0 0	15 0 0
Oil	20 srs.	20 8 0	18 0 0
Salt	12 srs.	4 0 0	4 12 0
Fuel	12 mds.	0 12 0	1 0 0
Cloth	50 yds.	0 8 0	0 12 0
House Rent	—	10 0 0	12 0 0

(*B. Com*, *Agra*, 1953).

[Cost of living Index No. for 1940 based on 1939 according to Aggregate Expenditure Method=121.7]

21. From the information given below prepare Cost of Living Index Nos. for 1948 and 1949 taking the average price of 1947 as base.

Group of articles	1947 Rs. as. p.			1948 Rs. as. p.			1949 Rs. as. p.		
I. Food per md.	20	0	0	24	0	0	21	0	0
II. Cloth per yd.	1	4	0	1	8	0	1	0	0
III. Rent per room	5	0	0	8	0	0	8	0	0
IV. Misc per unit	2	0	0	2	4	0	2	2	0

Give weight to the four groups as 4,3,2,1, respectively.

(*B. Com., Agra,* 1951):

[Index Number for 1948 based on 1947 = 123.369
Index Number for 1949 based on 1947 = 109.8]

22. From the following average prices of the three groups of commodities in Rupee per unit, find Chain Base index numbers (श्रंखला निर्देशांक) with 1939 as base year.

Groups	1939	1940	1941	1942	1943
1	2	3	4	5	6
2	8	10	12	15	18
3	4	5	8	10	12

(*B. Com. Agra* 1949).

{ Average link relatives (चल या सबद्ध मूल्यानुपात)—
100, 133, 138, 125, 120.
Chain Relatives (श्रंखला मूल्यानुपात)—100, 133, 183, 229, 275 }

23. What points should be taken into consideration in choosing the base and determining the weights in the preparation of cost of living index numbers. (जीवन निर्वाह निर्देशांक)

From the fixed base index numbers given below prepare Chain Base Index Numbers (श्रंखला आधार निर्देशांक)

1935	1936	1937	1938	1939	1940
94	98	102	95	98	100

(*B. Com. Agra* 1943).

[Average link relatives (संबद्ध मूल्यानुपात)–94,104,104, 93,103, 102
Chain Relatives (श्रंखला मूल्यानुपात) — 94, 98, 102, 95, 98, 100]

24. The annual wages of worker in Rupee along with price Index Numbers are given below. Prepare Index Numbers for Real wages (यथार्थ भृत्ति निर्देशाक) of the worker.

Year	Wages	Price Index Nos.
1939	200	100
1942	240	160
1943	350	280
1944	360	290
1945	360	300
1946	370	320
1947	375	330

Explain the relation between the Real Wage (यथार्थ भृत्ति) Index Numbers and the Price Index Numbers (मूल्य निर्देशांक).

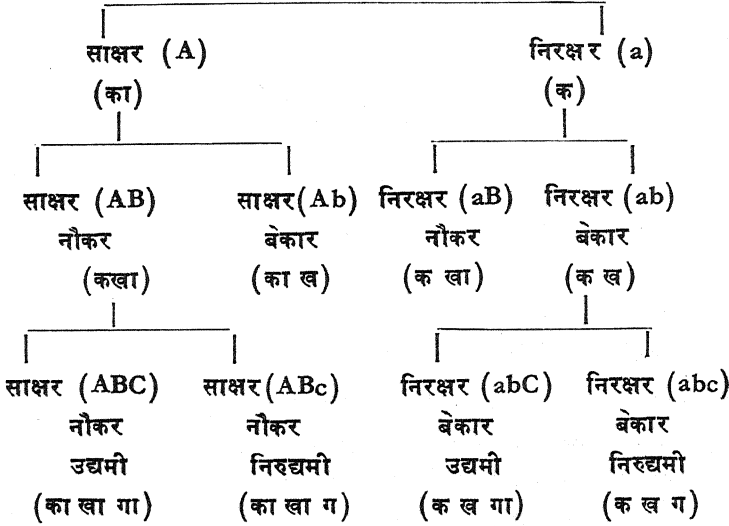
(*B. Com., Agra,* 1950).

[For preparing Real Wage Index Numbers, Money Wages Index Numbers should be determined first by taking the wage during 1939 as 100. The Money Wage Index Numbers will be 100,120,175,180,180,185, and 187.5 for the various years. The Real Wage Index Number for 1942 will be determind by the formula $\frac{\text{Money Wage Index}}{\text{Price}} \times 160 = \frac{120}{160} \times 100 = 75$
By adopting the same formula for the succeeding year the Real Wage Index Numbers will be obtained as ,100, 75, 62.5, 62, 60, 57.90 and 56.8.]

अध्याय १२.

गुण-सम्बन्ध
(Association of Attributes)

अभी तक जो कुछ भी हमने पढ़ा है उसमें ऐसे समंकों का प्रयोग किया गया है जो कि किसी भी समग्र के तथ्यों का केवल आँकिक स्वरूप प्रस्तुत करते थे। प्रायः समंक दो प्रकार से उत्पन्न होते हैं (अ) समग्र के विभिन्न तथ्यों की आकृतियों को नापने से और (ब) विभिन्न तथ्यों के गुणों की उपस्थिति या अनुपस्थिति नापने से। यदि किसी भी एक मुहल्ले के रहने वाले व्यक्तियों को उनके गुणों के अनुसार वर्गों में रखा जाय (अन्धे, बहरे, पढ़े-लिखे और बेपढ़े) और उन गुणों की उपस्थिति और अनुपस्थिति की संख्यायें गिन ली जायें तो ऐसे समंकों का निर्माण होगा, जिन्हें गुण-समंक (Statistics of Attributes) कहते हैं। अभी तक (अ) श्रेणी के अन्तर्गत आने वाले जिन समंकों का अध्ययन किया गया है उन्हें चल-समंक (Statistics of Variables) कहते हैं। किन्हीं दो या दो से अधिक गुण-समंकमालाओं के सम्बन्ध को गुण-सम्बन्ध और चल-समंक-मालाओं के सम्बन्ध को सह-सम्बन्ध (Correlation) कहते हैं। इस प्रकार यदि सह-सम्बन्ध तथ्यों के आंकिक लक्षणों पर आधारित है तो गुण-सम्बन्ध उनके गुणों की उपस्थिति या अभाव का अध्ययन है।

यदि किसी भी समग्र (Universe) को गुणों के अनुसार दो भागों में विभाजित किया जाय तो ऐसे संभाजन को द्वन्द-भाजन (Dichotomy) कहते हैं। उदाहरणार्थ, एक समूह किसी गुण की यदि उपस्थिति की ओर संकेत करता हो तो दूसरा उसकी अनुपस्थिति का द्योतक हो। यदि दो उप-भागों को फिर से अन्य उप-भागों में संभाजित किया जाय तो ऐसे संभाजन को बहु-गुणी वर्गीकरण (Manifold Classification) कहते हैं जोकि निम्नलिखित तालिका से स्पष्ट है।

प्राय: गुणों की उपस्थिति और अनुपस्थिति के प्रदर्शन के लिये कुछ संकेताक्षरों की आवश्यकता होती है। उपरोक्त तालिका में ऐसे ही संकेताक्षरों का प्रयोग किया गया है और दीर्घ वर्णाक्षर किसी गुण विशेष की उपस्थिति और ह्रस्व वर्णाक्षर उसके अभाव की ओर संकेत करते हैं। जब संकेताक्षरों को अभिवार ( ) में रख दिया जाता है तो वे गुण की उपस्थिति या अभाव की आवृत्ति (Frequency) की ओर संकेत करते हैं। दीर्घ संकेताक्षरों को अनुलोम गुण (Positive Attributes) और ह्रस्व संकेताक्षरों को विलोम गुण (Negative Attributes) कहते हैं। उपरोक्त तालिका में दिखलाई गई अन्तिम उप-विभागों (Sub-Populations) की आवृत्तियों को अन्तस्थ आवृत्ति (Ultimate frequencies) कहते हैं।

किसी भी समग्र के विभिन्न गुण आवृत्तियों में परस्पर एक गहरा सम्बन्ध होता है और कुछ ज्ञात आवृत्तियों की सहायता से अज्ञात आवृत्तियों का पता लगाया जा सकता है, यथा,

$$N = (A + a)$$
$$= (AB) + (Ab) + (aB) + (ab)$$
$$= (ABC) + (ABc) + (AbC) + (Abc)$$
$$+ (aBC) + (aBc) + (abC) + (abc)$$

स = (का + क)
= (का खा) + (का ख) + (क खा) + (क ख)
= (का खा गा) + (का खा ग) + (का ख गा)
+ (का ख ग) + (क खा गा) + (क खा ग)
+ (क ख गा) + (क ख ग)

$$(AB) = (ABC) + (ABc)$$
$$(A) = (AB) + (Ab)$$
$$(aB) = (aBC) + (aBc)$$
$$(a) = (aB) + (ab)$$

(का खा) = (का खा गा) + (का खा ग)
(का) = (का खा) + (का ख)
(क खा) = (क ख गा) + (क खा ग)
(क) = (क खा) + (क ख)

अज्ञात वर्ग-आवृत्तियाँ निम्नलिखित नौ वर्गों की सारणी की सहायता से आसानी से मालूम की जा सकती है। इस सारणी को गुण-सम्बन्ध सारणी (Association Table) कहते हैं।

(AB) (का खा)	(aB) (क खा)	(B) (खा)
(Ab) (का ख)	(ab) (कख)	(b) (ख)
(A) (का)	(a) (क)	(N) (स)

उदाहरण १—

यदि निम्नलिखित वर्ग-आवृत्तियाँ दी हों तो अज्ञात वर्ग-आवृत्तियाँ निकालिये। — (का खा) = ४००, (खा) = ६००, (का) = ५०० और (स) = ८०० ।

(a) = (N) — (A)
(क) = (स) — (का)
= ८०० — ५०० = ३००

(b) = (N) — (B)
(ख) = (स) — (खा)
= ८०० — ६०० = २००

(A b) = (A) — (AB)
(का ख) = (का) — (का खा)
= ५०० — ४०० = १००

(aB) = (B) — (AB)
(क खा) = (खा) — (का खा)
= ६०० — ४०० = २००

(ab) = (b) — (Ab)
(क ख) = (स) — (का ख)
= २०० — १०० = १००

उदाहरण २— यदि निम्नलिखित आवृत्तियाँ दी हों तो अज्ञात वर्ग-आवृत्तियाँ निकालिए। (का) = ५५०, (खा) = ६००, (का खा) = ४००; (स) = १०००

(का खा) ४००	(क खा) २००	(खा) ६००
(का ख) १५०	(क ख) २५०	(ख) ४००
(का) ५५०	(क) ४५०	(स) १०००

संभाविता और आशंशा

सह-सम्बन्ध के समान ही गुण-सम्बन्ध भी संभावना के सिद्धान्त पर आधारित है यदि किसी एक भाग्यशाली व्यक्ति को २० लोगों के एक समूह में लाटरी निकाल कर इनाम देना हो और यदि उस समूह में १२ स्त्रियाँ और ८ पुरुष हों तो प्रत्येक पुरुष की इनाम पाने की सम्भावना ८/२० और स्त्री की इनाम पाने की सम्भावना १२/२० होगी । यदि ५० बार लाटरी निकाली जाय तो स्त्री के इनाम पाने की आशंशा (Expectation) १२/२०×५०=३० और पुरुष के इनाम पाने की आशंशा ८/२०×५०=२० है ।

यदि (का) ऐसे व्यक्तियों की संख्या है जो समग्र में (का) गुणा वाले ह तो समग्र से दैव प्रवरण द्वारा न्यादर्श निकाला जाय तो इस गुण वाले व्यक्तियों के चुने जाने की 'सम्भावना' (का/स) होगी और यदि (य) बार चुनाव किया जाय तो इस गुण वाले व्यक्तियों के चुने जाने की 'आशंशा' (का/स×य)होगी ।

स्वतंत्रता की कसौटी

संभावना और आशंशा के पूर्वोक्त विवरण पर ही गुण-सम्बन्ध के परस्पर आश्रय भूतत्व के माप आधारित हैं । यदि किसी भी गुण के पाये जाने की आशंशा उसकी यथार्थ आकृति या संख्या के बराबर हो तो यह मान लिया जाता है कि गुण की आवृत्ति सर्वथा स्वतंत्र है । यदि इसके प्रतिकूल आशंशा से आवृत्ति कम या अधिक हो तो गुणों की आवृत्तियों में परस्पर गुण सम्बन्ध पाया जाता है । इस प्रकार हम देखते हैं कि आशंशा और आवृत्ति की तुलना ही गुणों की स्वतन्त्रता की कसौटी है ।

उदाहरण– किसी एक परीक्षा में २०० विद्यार्थियों ने भाग लिया जिनमें से १६० उत्तीर्ण हो गये । इन दो सौ विद्यार्थियों में से पचास विद्यार्थियों ने एक व्यक्तिगत शिक्षण–कक्षा में अध्ययन किया था जिनमें से ४८ विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए । यह मालूम कीजिए कि पास होने में एवं शिक्षण–कक्षा में अध्ययन करने में परस्पर कोई गुण–सम्बन्ध है अथवा नहीं ?

स्वतन्त्रता की कसौटी वाले सिद्धान्त के अनुसार यदि आशंशा और आवृत्ति बराबर हो तो हमारा यह निष्कर्ष होगा कि पास होने में और व्यक्तिगत शिक्षण में परस्पर गुणों की स्वतन्त्रता है ।

यदि पास होने को (का) मान लिया जाय और व्यक्तिगत शिक्षण को (खा) तो,

शिक्षण प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की पास होने की आशंशा

$$= \frac{A}{N} \times B = \frac{\text{का}}{\text{स}} \times \text{खा}$$

$$= \frac{१६०}{२००} \times ५०$$

$$= ४०$$

शिक्षण कक्षा में न जाने वाले विद्यार्थियों की पास होने की आशंशा

$$= \frac{A}{N} \times b = \frac{\text{का}}{\text{स}} \times \text{ख}$$

$$= \frac{१६०}{२००} \times १५०$$

$$= १२०$$

स्वतंत्रता की कसौटी के सिद्धान्त के अनुसार गुण-सम्बन्ध जानने के लिए आशंशा से वास्तविक आवृत्ति की तुलना करना आवश्यक है, यथा,

शिक्षण प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों के पास होने की आशंशा ४० है जबकि उनकी यथार्थ संख्या ४८ हैं। इससे यह सिद्ध होता है कि पास होने और शिक्षण लेने में अनुलोम गुण-सम्बन्ध (Positive Association) है।

शिक्षण न लेने वाले विद्यार्थियों की पास होने की आशंशा १२० है। यदि उनमें से पास होने वालों की वास्तविक संख्या दी होती तो गुण-सम्बन्ध निकाला जा सकता था।

इस प्रकार हम स्वतन्त्रता की कसौटी के सिद्धान्त को हम निम्नलिखित समीकार (Equation) के द्वारा समझ सकते हैं।

$$\frac{(A\ B)}{(B)} = \frac{(A\ b)}{(b)}$$

$$\frac{(\text{का खा})}{(\text{खा})} = \frac{(\text{का ख})}{(\text{ख})}$$

गुण-सम्बन्ध

जब (का खा), $\left\{\frac{(\text{का})\ (\text{खा})}{\text{स}}\right\}$ से बड़ा हो तो (का) और (खा) गुणों में अनुलोम गुण-सम्बन्ध (Positive Association) होता है।

जब (का खा), $\left\{\frac{(\text{का})\ (\text{खा})}{\text{स}}\right\}$ से छोटा हो तो (का) और (खा) गुणों में विलोम गुण-सम्बन्ध (Negative Association) होता है।

जब (का खा), $\left\{\frac{(\text{का}) \times (\text{खा})}{\text{स}}\right\}$ के बराबर हो तो (का) और (खा) दोनों ही स्वतंत्र होते हैं।

गुण-सम्बन्ध गुणक (Coefficient of Association)

उपरोक्त विवरण से यह स्पष्ट हो गया है कि यदि (का) और (खा) गुण परस्पर स्वतंत्र हो तो निम्नलिखित समीकार उनके सम्बन्ध को प्रदर्शित करेगा। —

$$\frac{(AB)}{(aB)} = \frac{(Ab)}{(ab)} \quad \text{or} \quad \frac{(AB)}{(Ab)} = \frac{(aB)}{(ab)}$$

$$\frac{(\text{का खा})}{(\text{क खा})} = \frac{(\text{का ख})}{(\text{क ख})} \quad \text{या} \quad \frac{(\text{का खा})}{(\text{का ख})} = \frac{(\text{क खा})}{(\text{क ख})}$$

तो वज्र-गुणन (Cross Multiplication) के द्वारा,

$$(AB)\ (ab) = (Ab)\ (aB)$$

$$(\text{का खा})\ (\text{क ख}) = (\text{का ख})\ (\text{क खा})$$

$$\text{or} \quad (AB)\ (ab) - (Ab)\ (aB) = 0$$

$$(\text{का खा})\ (\text{क ख}) - (\text{का ख})\ (\text{क खा}) = 0$$

यदि समीकार के दोनों ही विभागों का अन्तर शून्य के बराबर नहीं है तो (का) और (खा) गुणों में उनके अनुलोम या विलोम अंतर के बराबर गुण-सम्बंध पाया जाता है। ये गुण-सम्बंध का एक निरपेक्ष माप है और उसका सापेक्षिक माप निम्नलिखित सूत्र के द्वारा निकाला जाता है जो कि श्री यूल (Yule) के द्वारा बनाया जाने के कारण 'यूल का गुण-सम्बंध-गुणक' कहलाता है।

$$Q. = \frac{(AB)\ (ab) - (Ab)\ (aB)}{(AB)\ (ab) + (Ab)\ (aB)}$$

$$\text{गु. स.} = \frac{(\text{का खा})\ (\text{क ख}) - (\text{का ख})\ (\text{क खा})}{(\text{का खा})\ (\text{क ख}) + (\text{का ख})\ (\text{क खा})}$$

यह गुणक सह-सम्बंध गुणक की भांति (+१) और (—१) के बीच में विचलन करता है और यदि यह शून्य हो तो गुणों में स्वतन्त्रता होती है।

उदाहरण—

एक मुहल्ले में ४००० व्यक्ति रहते हैं जिनमें से १००० व्यक्यिों पर चेचक का प्रभाव हुआ है। कुल व्यक्तियों में से २००० व्यक्तियों के चेचक का टीका लगाया गया था जिनमें से केवल २०० व्यक्तियों को चेचक हुई। यह बतलाइए कि क्या टीका लगवाना चेचक के लिए रोक है या नहीं ?

माना कि (का) का प्रयोग उन व्यक्तियों के लिए किया गया है जिन पर चेचक का प्रकोप नहीं हुआ है और (खा) उनके लिए जिन्होंने टीका लगवाया था। तो गुण-सम्बंध-सारणी निम्नलिखित होगी।

(का खा) १८००	(क खा) २००	(खा) २०००
(का ख) १२००	(क ख) ८००	(ख) २०००
(का) ३०००	(क) १०००	(स) ४०००

(का) = ४०००—१००० = ३०००

(क) = १०००

(खा) = २०००

(स) = ४०००

गुण-सम्बन्ध-गुणक

$$= \frac{(\text{का खा})\ (\text{क ख}) — (\text{क खा})\ (\text{का ख})}{(\text{का खा})\ (\text{क ख}) — (\text{क खा})\ (\text{का ख})}$$

$$= \frac{(१८००)(८००) — (२००)(१२००)}{(१८००)(८००) \times (२००)(१२००)}$$

$$= \frac{१२,००,०००}{१६,८०,०००} = +\cdot७१$$

गुणक को देखने से ज्ञात होता है कि (का) और (खा) गुणों में अनुलोम गुण-संबंध है जिससे यह सिद्ध होता है कि टीके लगवाने का प्रभाव चेचक को रोकना है।

आँशिक गुण-सम्बन्ध

किसी उप-विभाग में जबकि तीन गुण पाए जाए कभी कभी ऐसा होता है कि उनमें से प्रत्येक दो गुणों में तीसरे का प्रभाव पाया जाए। ऐशी दशा में गुण-संबन्ध संपूर्ण न होकर आँशिक (Partial) होता है। ये आवश्यक नहीं कि प्रत्येक उप-विभाग में 'आंशिक' गुण-संबन्ध पाया जाए और किसी किसी में संपूर्ण गुण संबंध भी हो सकता है।

यदि किसी भी उप-विभाग में $(\text{का खा गा}) > \frac{(\text{का खा})\ (\text{खा गा})}{(\text{गा})}$ तो (का) और (खा) का सम्बन्ध अनुलोम होता है और यदि $(\text{का खा गा}) < \frac{(\text{का गा})\ (\text{खा गा})}{(\text{गा})}$ तो गुण-सम्बन्ध विलोम होगा।

आँशिक गुण सम्बन्ध का गुणक निम्नलिखित सूत्र द्वारा मालूम किया जाता है—

$$Q.\ AB.\ C = \frac{(ABC)\ (abC) — (AbC)\ (aBC)}{(ABC)\ (abC) + (AbC)\ (aBC)}$$

$$\text{गु. स.} = \frac{(\text{का खा गा})\ (\text{क ख गा}) — (\text{का ख गा})\ (\text{क खा गा})}{(\text{का खा गा})\ (\text{क ख गा}) + (\text{का ख गा})\ (\text{क खा गा})}$$

भ्रमात्मक गुण-सम्बन्ध (Illusory Association)

ऐसे उप-विभागों में जिनमें ३ गुण पाए जाए प्रायः किन्हीं दो का गुण-सम्बन्ध स्वतंत्र नहीं होता है और उन पर तीसरे गुण की उपस्थिति अपना प्रभाव डालती है। कभी कभी ऐसे अवसर आते हैं कि तीन गुणों

में से यदि कोई दो समूह लिए जाए तो तीसरे समूह में भ्रमपूर्ण गुण-सम्बन्ध मालूम पड़े। इस प्रकार यदि (का) और (गा) में और (खा) और (गा) में अनुलोम गुण-सम्बन्ध हो तो यह आवश्यक नहीं कि (का) और (खा) में भी अनुलोम सम्बन्ध पाया जाए अथवा यदि (का) और (गा) में विलोम सम्बन्ध होता यह आवश्यक नहीं कि (का) और (खा) में भी विलोम गुण सम्बन्ध हो। उदाहरणार्थ—

किसी एक राज्य में ५०,००० जन संख्या है, जिसमें से २४,००० पुरुष हैं और ४,००० ग्रेजुएटों में से ५०० स्त्रियाँ हैं। यदि १००० राजकीय कर्मचारियों में से १५० स्त्रियाँ हो तो बतलाइये कि क्या नौकरी देने में जाति का ध्यान रखा जाता है या नहीं ? यदि पुरुषों को (का), कर्मचारियों को (खा) और ग्रेजुएटों को (गा) माना जाए तो उपरोक्त विवरण के अनुसार (का) और (गा) में अनुलोम गुण-सम्बन्ध, और (खा) और (गा) में भी अनुलोम गुण-सम्बन्ध पाया जाता है जिसके फलस्वरूप (का) और (खा) में भी अनुलोम गुण सम्बन्ध पाया जाना चाहिए। परन्तु इस उप-वर्ग में (गा) की उपस्थिति के कारण एक भ्रान्ति उत्पन्न हो जाती है क्योंकि स्त्रियाँ पुरुषों की अपेक्षा कम पढ़ती हैं। इसीलिए (का) और (खा) का गुण-सम्बन्ध भी पूर्ण न कहलाकर केवल आँशिक कहलाएगा, भ्रमात्मक गुण सम्बन्ध केवल आँशिक गुण-सम्बन्ध की दशा में ही होगा। भ्रमात्मक गुण-सम्बन्ध व्यक्तिगत अभिनति अवलोकन के उच्चावचनों और निर्वचन के कारण भी उत्पन्न हो जाता है।

EXERCISES
अभ्यास प्रश्न

1. Explain the method of finding association between two attributes (द्विगुण सम्बन्ध). Out of 70,000 literates in a particular district of India, number of criminals was 500. Out of 930 thousand of illiterates in the same district number of criminals was 15,000. On the basis of these figures do you find any association between illiteracy (निरक्षरता) and criminality (अपराध)? (*M.A., Agra*, 1941).

[Percentage of illiterates who are criminals is 1.6 and the percentage of literates who are criminals is ·7, suggesting that illiteracy and criminality are positively associated.]

Coeff. of Association (गुण सम्बन्ध गुणक) = ·390

2. The male population of a town is 250 lakhs. The number of literate males is 50 lakhs and the total number of male criminals is 36 thousand. The number of literate male criminals is 2 thousand. Do you find any association between literacy and Criminality in U.P. (*M.A.*, *Agra*, 1943).

[Criminality among literates is 1% while among illiterates it is 1.043 % suggesting that a light negative association exists between criminality and literacy.]

3. In an anti-malarial campaign (मलेरिया निरोध योजना) in a certain area quinine was administered to 812 person out of a total population of 3,248. The number of fever cases is shown below :—

Treatment	Fever	No fever
Quinine	20	792
No. Quinine	220	2,216

Discuss the usefulness of quinine in checking Malaria.

(*P.C.S.*, 1941).

[Percentage of quinine treatment cases which were attacked is 2.5 and the percentage of no-quinine treatment cases which were attacked is 9, suggesting that quinine treatment and attack from fever are negatively (विलोम) associated.]

4. Can vaccination (टीका) be regulated as a preventive measure for small pox from the data given below ?

Of 1,482 persons in a locality exposed to small pox 368 in all were attacked.

Of 1,482 persons, 343 had been vaccinated and of these only 35 were attacked. (*M.A.*, *Alld.*, 1944).

[Percentage of vaccinated persons who were not attacked is 90 and the percentage of not vaccinated persons who were not attacked is 71, bringing out the fact that vaccination and exemption from attack are postively (अनुलोम) associated.

5. The following table gives the number of persons suffering from certain infirmities in Bengal in 1931 :—

Sex	Total	Insane Number	Deaf-mutes	Deaf Mutes & In sane
Males	260 Lakhs	12,650	21,301	545
Females	241 „	9,055	14,136	317

Trace the association between insanity and deaf-muteness for males and females of Bengal separately.

(*M. A.*, *Alld.*, 1938).

[Coefficient of association for Males is .6 and for females it is .9 leading us to the conclusion that there is a positive association between insanity and deaf-muteness for both males and females of Bengal.]

6. (*a*) Write a short note on the use of co-efficient of association (गुणसम्बन्ध गुणक) in analysing economic statistics.

From the figures given in the following table, compare the association between literacy and unemployment in the rural and urban area, and give reasons for the difference, if any :—

	Urban	Rural
Total Adult males	25 Lakhs	200 Lakhs
Literate Males	10 „	40 „
Unemployed Males	5 „	12 „
Literate Unemployed Males	3 „	4 „

(*M. Com.*, *Agra*, 1954).
(*M. A.*, *Patna*, 1943).

[Coefficient of association (गुणसम्बन्ध गुणक) is 0.36 suggesting a positive association between literacy and unemployment.]

7. In the course of anti-malarial work quinine was administered to 606 adults out of a total population of 3,540. The incidence of malaria fever is shown below. Discuss the preventive value of quinine.

	Fever	No. Fever	Total
Quinine	19	587	606
No. quinine	123	2,741	2,924
Total	212	3,328	3,540

(*M. A., Cal.,* 1935).

[Percentage of persons given quinine and suffering from fever is 3·14 and the percentage of persons not given quinine and suffering from fever is 6·57, suggesting that quinine has a preventive effect (निरोधक प्रभाव) with regard to malaria.]

8. In the study of aggregates having different attributes how would you determine whether the attributes are mutually independent or are associated in some way ?

1660 candidates appeared for a competitive examination, 422 were successful. 256 had attended a coaching class and of these 150 came out successful. Estimate the utility of the coaching class.

(*M. Com., Agra,* 1947).

[Coefficient of association (सहसम्बन्ध गुणक) between coaching and success is 0·71. Success among those who attended is 58·6 % and those who did not attend is 19·40 % and among all the candidates it is 25.4 %]

9. A census revealed the following figures of the blind and the insane in two age groups in a certain population.

	Age group 15—25 yrs.	Age group Over 75 yrs.
Total population	27,13,000	1,60,200
Number of blind	1,000	2,000
Number of insane	6,000	1,000
Number of insane among the blind	19	9

(a) Obtain a measure of the association between blindness and sanity in each of the two age groups.

(b) Do you consider that blindness and insanity are associated or disassociated with each other in the two age groups or more in one age group than in the other ?

(P.C.S., 1948).

[Coefficient of association (सहसम्बन्ध गुणक) for (15-25) age groups is —·07 and coefficient for (over 75) age group is —·16 suggesting that there is dissociation between blindness and insanity in both the age groups.]

10. Calculate the Coefficient of Association (सहसम्बन्ध गुणक) between extravagance in fathers and sons from the following data :

Extravagant fathers with extravagant sons	237
Extravagant fathers with miserly sons	545
Miserly fathers with extravagant sons	741
Miserly fathers with miserly sons	235

(M. Com., Luck., 1947).

[The Coefficient of association between extravagance in father and sons is —·6 which shows that there is a negative association (विलोम गुण सम्बन्ध)]

अध्याय १३.

आन्तरगणन और वाह्यगणन
(Interpolation & Extrapolation)

जब किसी समंकमाला में कोई समंक किसी कारणवश अज्ञात हों तो ज्ञात समंकों की आकृतियों के उतार चढ़ाव के आधार पर उनके लिये समंकों का अनुमान कर लिया जाता है। इस क्रिया को आन्तरगणन कहते हैं। इस प्रकार आन्तरगणन के द्वारा (य) के किसी ज्ञात मूल्य की (र) में तत्संवादी आकृति मालूम की जाती है। इस प्रकार के अनुमान व्यवसायिक, आर्थिक और सामाजिक अध्ययनों में बहुत महत्व रखते हैं क्योंकि यदि समंकमाला की सभी आकृतियाँ न मालूम हों तो यथार्थ गुणक नहीं निकाले जा सकते और यदि वे मालूम भी हो जाँयें तो पूर्ण रूप से समग्र के प्रतिनिधि नहीं होंगे। कभी कभी भूयिष्ठक और मध्यका मालूम करने में भी आन्तरगणन का प्रयोग किया जाता है जैसा कि आठवें अध्याय में समझाया जा चुका है।

यदि समंकों की ज्ञात आकृतियों के आधार पर कुछ पूर्वानुमान लगाये जाँये तो इस क्रिया को वाह्यगणन कहते हैं। वाह्यगणन या पूर्वानुमान व्यवसाइयों और अर्थशास्त्रियों के लिये एक बहुत महत्व की वस्तु है। पूर्वानुमान लगाते समय सांख्यिक को समग्र के अंक-वंटन, घटनाओं की प्रवृत्ति और सामान्य परिस्थितियों का पूर्ण ज्ञान होना चाहिये।

आन्तरगणन की आवश्यकता कई परिस्थितियों में होती है, जैसे कुछ अज्ञात समंकों की आवश्यकता समग्र के निर्वचन में पड़ सकती। किसी कारणवश यदि व्यवसाय के हिसाब नष्ट हो गये हों तो उनके विषय में आन्तरगणन द्वारा अनुमान लगाया जाता है। मध्यका और भूयिष्ठक मालूम करने में संभागान्तरों के बीच संभाग-आवृत्तियों के आधार पर आन्तरगणन द्वारा उनकी आकृति मालूम की जाती है।

अनुमान की रीति निम्नलिखित परिकल्पनाओं (Assumptions) पर आधारित है—

(१) जिन वर्षों के समंक दिये हों उनमें कोई महत्वपूर्ण उच्चावचन न होना चाहिये।

(२) प्रतिकूल स्थिति के अभाव में यह परिकल्पना रहती है कि समस्त समंकों में घट-बढ़ एक सी है।

(३) यदि विभिन्न वर्गों के सम्बन्ध में समंक दिये हों तो यह परिकल्पना होती है कि उन वर्गों की परिस्थितियों में समानता है।

श्री० वाउले महोदय के कथनानुसार यथार्थ आन्तरगणन दो बातों पर निर्भर रहता है—

(अ) अनुमान लगाई जाने वाली आकृतियों की सम्भावित घट-बढ़ के सम्बन्ध में ज्ञान और (ब) ऐसी घटनाओं के क्रम सम्बन्धी ज्ञान जिनसे कि ज्ञात समंक सम्बन्धित हों।

आन्तरगणन की रीतियाँ

किसी भी समग्र के अज्ञात समंकों का निम्नलिखित रीतियों से अनुमान लगाया जा सकता है—

(अ) बिन्दु रेखीय रीति और (ब) बीजगणितीय रीति।

बीजगणितीय रीति के निम्नलिखित स्वरूप हैं :—

(१) एकेन्द्र-वक्र अन्वायोजन रीति (Fitting a Parabolic Curve)

(२) न्यूटन की प्रगामी अन्तर रीति (Newton's Method of Advancing Differences)

(३) परमितान्तर रीति (Binomial Method of Finite Differences)

(४) लैंगरेन्ज की रीति (Lagrange's Method)

बिन्दुरेखीय रीति

बिन्दुरेखीय रीति प्रायः अविच्छिन्न–मालाओं में उपयोगी होती है और उसमें दिये हुये समंकों को ग्राफ पर दिखाया जाता है। इसका प्रयोग प्रायः एक कालिक समंक माला (Time Series) में किया जाता है, जिसमें

समय (य) अक्ष पर और अन्य समंक (र) अक्ष पर दिखलाये जाते हैं। समंकों के ग्राफ पर बिन्दुरूप से निकाल लेने पर उन्हें मिला कर एक वक्र बना दिया जाता है और (य) अक्ष पर (र) की अज्ञात आकृति के आन्तर-गणन के लिये एक लम्ब डाला जाता है और वह वक्र को जिस स्थान पर छूता है उसकी आकृति मालूम कर ली जाती है। यदि पूर्वानुमान के लिये बाह्य-गणन की आवश्यकता हो तो वक्र का आगे की ओर विक्षेपण (Projection) कर दिया जाता है और दिये हुये (य) से (र) अक्ष पर लम्ब डाल कर अज्ञात आकृति मालूम कर ली जाती है।

बीजगणितीय रीति

१. एकेन्द्र-वक्र अन्वायोजन रीति

यह रीति इस परिकल्पना पर आधारित है कि (य) और (र) चल समंक परस्पर संबद्ध हैं और उनमें से कोई अज्ञात चल (Variate) मालूम किया जा सकता है यदि उसका तत्संवादी समंक मालूम हो। यह मान लिया जाता है कि एक एकेन्द्र-वक्र (Parabola) (र) की सभी आकृतियों से होता हुआ गुजरता है जिसका कि समीकार (Equation) निम्नलिखित है—

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots nx^n$$

$$\text{र} = \text{क} + \text{ख}_{\text{य}} + \text{ग}_{\text{य}^2} + \text{घ}_{\text{य}^3} \ldots\ldots \text{स}_{\text{य}^{\text{स}}}$$

जबकि क, ख, ग, घ, इत्यादि अचल पद (Constants) हैं जिन्हें ज्ञात करना है और उनकी आकृतियाँ (य) की आकृति पर निर्भर है। उपरोक्त समीकार को (स) वें घात का एकेन्द्र-वक्र (Parabola of the Nth Order) कहते हैं।

उदाहरण—

नीचे विभिन्न वर्षों के लिए उत्पादन निर्देशांक दिए गए हैं कृपया १९४१ के लिए अनुमानित निर्देशांक निकालिए।

(य) x	(र) y
१९३९	१००
१९४०	१०७
१९४१	?
१९४२	१५७
१९४३	२१२

एकेन्द्र–वक्र अन्वायोजन का ये नियम है कि जितने ज्ञात पद होते हैं उससे एक कम घात वाला एकेन्द्र-वक्र लगाया जाता है। उपरोक्त प्रश्न में ४ ज्ञात पद हैं इसलिए त्रिघातीय एकेन्द्र-वक्र बनेगा जिसका कि समीकार निम्नलिखित है—

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 ......nx^n$$

$$र = क + ख_{य} + ग_{य^2} + घ_{य^3} ...... स_{य}^{स}$$

यदि १९४१ को प्रारम्भ वर्ष माना जाए तो उसके दोनों ओर (य) माला में निम्नलिखित विचलन होंगे।

य = — २, — १, ०, + १, + २, जिनके तत्संवादी (र) पद निम्नलिखित हैं—

र = १००, १०७, $र_0$, १५७, २१२

उपरोक्त समंकों को हम निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं—

(य)	(र)	(य) के मूल्य
१९३९	१००	—२
१९४०	१०७	—१
१९४१	$र_0$	०
१९४२	१५७	+१
१९४३	२१२	+२

उपरोक्त (य) के ज्ञात मूल्यों के आधार पर हम अपने समीकार से निम्नलिखित युगपत–समीकार (Simultaneons Equations) बना सकते हैं।

$100 = a - 2b + 4c - 8d$ ... (i)

$107 = a - b + c - d$ ... ... (ii)

$y_0 = a$ ... ...(iii)

$157 = a + b + c + d$ ... ...(iv)

$212 = a + 2b + 4c + 8d$ ... (v)

१०० = क — २ ख + ४ ग — ८ घ ... (१)
१०७ = क — ख + ग — घ ... ... (२)
$र_0$ = क ... ... (३)
१५७ = क + ख + ग + घ ... ... (४)
२१२ = क + २ ख + ४ ग + ८ घ ... (५)

उपरोक्त युगपत-समीकारो को देखने से हम यह जानते हैं कि (३) समीकार के द्वारा ($र_0$) जो कि हमें मालूम करना है (क) अचल पद के बराबर हैं और यदि (क) का मूल्य हमें मालूम पड़ जाए तो वही ($र_0$) का आन्तरगणित मूल्य होगा ।

उपरोक्त युगपत-समीकारों से अब हम (क) अचल पद का मूल्य निकालने के लिए निम्नलिखित क्रिया करेंगे ।

पहिले (२) और (४) समीकारों को जोड़ने से हमें निम्नलिखित समीकार प्राप्त होता है—

264 = 2 a + 2 c ......(vi)
२६४ = २ क + २ ग......(६)

पहिले और पांचवे समीकारो को जोड़ने से निम्नलिखित समीकार प्राप्त होता है ।

312 = 2 a + 8 c ......(vii)

३१२ = २ क + ८ग ......(७)

अब ७वें समीकार से ६ठें समीकार को घटाने से हमें निम्नलिखित समीकार मिलता है ।

४८ = ६ग......(८)

∴ ग = ८

अब यदि (ग) के मूल्य को हम ७ वें समीकार में लगा दे तो हमें (क) का मूल्य मालूम हो जाएगा, यथा,

३१२ = २ क + ६४
२४८ = २ क
∴ क = १२४ = $र_0$

इस प्रकार आन्तरगण्य ($र_0$) का मूल्य १२४ हुआ ।

उपरोक्त रीति केवल (य) पद माला के काल विचलनों पर आधारित हैं और (र) पद माला के अन्तरों की ओर से सर्वथा उदासीन है इस कारण ये रीति बहुत तर्कशुद्ध नहीं है। इस रीति का प्रयोग प्रायः तभी उपयोगी होता है जब ज्ञात समंकों की संख्या ४ से कम हो क्योंकि उनकी संख्या अधिक होने पर अधिक घात का एकेन्द्र-वक्र अन्वायोजन करना पड़ता है और परिगणन विधि कठिन हो जाती हैं।

२. न्यूटन की प्रगामी अंतर रीति

न्यूटन की प्रगामी अन्तर रीति न्यूटन के द्विपद-प्रमेय (Binomial-Theorem) पर आधारित है और पूर्वोक्त रीति की अपेक्षा (र) पदमाला के अन्तरों को महत्व देती है। इस रीति के अनुसार (र) पदमाला के परस्पर अन्तर निकालने के बाद अन्तरों के अन्तर निकाले जाते हैं और तदुपरान्त उनके फिर अन्तर निकालने का क्रम जारी रखा जाता है जब तक कि अन्त में समस्त माला का केवल एक ही अन्तर न आजाये। अन्तर निकालने में बीजगणित का प्रयोग किया जाता है। ये रीति केवल ऐसे ही प्रश्नों में लागू होती है जब कि (य) पदमाला के संभागों में बराबर अन्तर हो।

उदाहरण—(१)

निम्नलिखित सारणी में विभिन्न आयु पर जीवन की आशंशा दी हुई है और आप को १६ वर्ष की आयु पर जीवन की आशंशा निकालना है।

आयु (वर्षों में)	जीवन की आशंशा (वर्षों में)
१०	३५–४
१५	३२–३
२०	२९–२
२५	२६–०
३०	२३–२
३५	२०–४

आयु (वर्षों में) (य) x		जीवन की आशंशा (र) y		प्रगामी अंतर									
				प्रथम Δ_1		द्वितीय Δ_2		तृतीय Δ_3		चतुर्थ Δ_4		पंचम Δ_5	
१०	$य_0$	३५·४	$र_0$										
				—३·१	Δ^1_0								
१५	$य_1$	३२·३	$र_1$			०	Δ^2_0						
				—३·१	Δ^1_1			—·१	Δ^3_0				
२०	$य_2$	२९·२	$र_2$			—·१	Δ^2_1			+·६	Δ^4_0		
				—३·२	Δ^1_2			+·५	Δ^3_1			—१·५	Δ^5_0
२५	$य_3$	२६·०	$र_3$			+·४	Δ^2_2			—·९	Δ^4_1		
				—२·८	Δ^1_3			—·४	Δ^3_2				
३०	$य_4$	२३·२	$र_4$			०	Δ^2_3						
				—२·८	Δ^1_4								
३५	$य_5$	२०·४	$र_5$										

उपरोक्त रीति के अनुसार बीजगणितीय अंतर निम्नलिखित प्रकार से निकाले गए हैं। इन अंतरों को यूनानी चिन्ह (Δ) द्वारा दिखलाया गया है।

$$\Delta_0 = \text{र}_1 - \text{र}_0 = \text{३२·३} - \text{३५·४} = -\text{३·१}$$

$$\Delta_1^{1} = \text{र}_2 - \text{र}_1 = \text{२९·२} - \text{३२·३} = -\text{३·१}$$

$$\Delta_1^{2} = \Delta_1 - \Delta_0^{1} = -\text{३·१} - \text{३·१} = \text{०}$$

$$\Delta_1^{2} = \Delta_2^{1} - \Delta_1^{1} = -\text{३·२} - \text{३·१} = -\text{·१}$$

$$\Delta_0^{3} = \Delta_1^{2} - \Delta_0^{2} = -\text{·१} - \text{०} = -\text{·१}$$

$$\Delta_0^{4} = \Delta_1^{3} - \Delta_0^{3} = \text{·५} - \text{·१} = +\text{·६}$$

$$\Delta_0^{5} = \Delta_1^{4} - \Delta^{04} = -\text{·९} + \text{·६} = -\text{१·५}$$

न्यूटन का सूत्र उपरोक्त प्रगामी अंतरों पर आधारित है जोकि नीचे दिया जा रहा है।

$$yx = y_0 + x\,\Delta_0^{1} + \frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta_0^{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta_0^{3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta_0^{4} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\times2\times3\times4\times5}\Delta_0^{5}$$

$$\text{र}_{\text{य}} = \text{र}_0 + \text{य}\Delta_0^{1} + \frac{\text{य}(\text{य}-\text{१})}{\text{१}\times\text{२}}\Delta_0^{2} + \frac{\text{य}(\text{य}-\text{१})(\text{य}-\text{२})}{\text{१}\times\text{२}\times\text{३}}\Delta_0^{3} + \frac{\text{य}(\text{य}-\text{१})(\text{य}-\text{२})(\text{य}-\text{३})}{\text{१}\times\text{२}\times\text{३}\times\text{४}}\Delta_0^{4} + \frac{\text{य}(\text{य}-\text{१})(\text{य}-\text{२})(\text{य}-\text{३})(\text{य}-\text{४})}{\text{१}\times\text{२}\times\text{३}\times\text{४}\times\text{५}}\Delta_0^{5}$$

न्यूटन के सूत्र में (य) का अर्थ निम्नलिखित है—

$$x = \frac{\text{Year of Interpolation} - \text{Year of origin}}{\text{Time distance between adjoining year}}$$

$$य = \frac{\text{आन्तरगणन वर्ष—प्रारम्भ का वर्ष}}{\text{आसन्न वर्षों का कालान्तर}}$$

$$= \frac{१६—१०}{१५—१०} = \frac{६}{५} = १\cdot२$$

पूर्वोक्त सारणी में विभिन्न प्रगामी अंतरों के मूल्य निम्नांकित हैं—

$\Delta_0^1 = —३\cdot१$; $\Delta_0^2 = ०$; $\Delta_0^3 = —\cdot१$

$\Delta_0^4 = \cdot६$; $\Delta_0^5 = —१\cdot५$

उपरोक्त अंतरों और (य) के मूल्यों को न्यूटन के सूत्र में आदिष्ट करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$र_य = ३५\cdot४ + १\cdot२ \times —३\cdot१ + \frac{१\cdot२\,(१\cdot२—१)}{१ \times २} \times ०$$

$$+ \frac{१\cdot२\,(१\cdot२—१)\,(१\cdot२—२)}{१ \times २ \times ३} \times —\cdot१$$

$$+ \frac{१\cdot२\,(१\cdot२—१)\,(१\cdot२—२)\,(१\cdot२—३)}{१ \times २ \times ३ \times ४} \times \cdot६$$

$$\pm \frac{१\cdot२\,(१\cdot२—१)(१\cdot२—२)(१\cdot२—३)(१\cdot२—४)}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५} \times —१\cdot५$$

$$= ३५\cdot४ — ३\cdot७२ + ० + ०\cdot०३२ + \cdot००८६४ + \cdot०१२०९६$$

$$= ३१\cdot७३$$

$\therefore$ १६ वर्ष की आयु की आन्तरगणित जीवन आशंशा ३१·७३ वर्ष है ।

(३) द्विपद-प्रमेय परिमितान्तर रीति

ये रीति न्यूटन के द्विपद-प्रमेय विस्तार (Binomial Expansion) पर आधारित है और प्रगामी अन्तर न लेकर (र) पद-माला के परिमितान्तर लेती है। ये रीति कुछ साँख्यिक ठीक नहीं मानते क्योंकि यह (य) पद-माला के समंकों के अन्तरों को सर्वथा छोड़ देती है। इस रीति का प्रयोग केवल उस समय करना चाहिए जबकि (य) पद-माला में से ही कोई समंक अज्ञात हो अथवा प्रत्येक पद के बीच का अन्तर बराबर हो और उनमें से ही किसी का आन्तरगणन अभीष्ट हो।

न्यूटन का द्विपद-प्रमेय और उसका विस्तार निम्नलिखित है—

$$(q-p)^n = q^n + nq^{n-1} p^1 + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} q^{-n2} p^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} q^{n-3} p^3 = 0$$

उपरोक्त प्रमेय में (q) को (y) और (p) को (1) मान लेने से प्रमेय के विस्तार का स्वरूप निम्नलिखित हो जाता है :—

$$(y-1)^n = y^n - ny^{n-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)y^{n-2}}{1 \times 2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)y^{n-3}}{1 \times 2 \times 3} = 0$$

$$(र-१)^{स} = र^{स} - स र^{स-1} + \frac{स(स-१)}{१ \times २} र^{स-2}$$

$$+ \frac{स(स-१)(स-२)}{१ \times २ \times ३} र^{स-3}$$

$$+ \frac{स(स-१)(स-२)(स-३)}{१ \times २ \times ३ \times ४} र^{स-4} = 0$$

उपरोक्त सूत्र में (र) ज्ञेय अंक नहीं है परन्तु समीकार के संतुलन के लिए उसका प्रयोग किया गया है और (स) का अर्थ ज्ञात अंकों की संख्या है।

उदाहरण—निम्नलिखित सारणी में अज्ञात अंक मालूम कीजिए—

वर्ष		निर्यात के निर्देशांक	
१९१९	y_0	५७	$र_0$
१९२०	y_1	७२	$र_1$
१२२१	y_2	?	$र_2$
१९२२	y_3	८१	$र_3$
१९२३	y_4	१०३	$र_4$

क्योंकि ज्ञात अंक ४ हैं इसलिए प्रमेय विस्तार $(र—१)^4$ होगा जोकि निम्नलिखित समीकार के बराबर है—

$$(y-1)^4 = y^4 - 4y^3 + 6y^3 - 4y^1 + y_0 = 0$$

$$(र-१)^4 = र^4 - ४र^3 + ६र^2 - ४र^1 + र_0 = 0$$

उपरोक्त समीकार में $र_0$ के मूल्यों को आदिष्ट करने से निम्नलिखित समीकार प्राप्त होता है—

$$= १०३ - ४(८१) + ६र_2 - ४(७२) + ५७ = ०$$

$$\therefore -६र_2 = -१०३ + ४(८१) + ४(७२) - ५७ = ४५२$$

इसलिए $र_2$ गणित ७५·३ जो कि आन्तरगणित पद हैं।

(४) लैगरैंज की रीति

यह सर्वोत्तम रीति है जिसका प्रयोग किसी भी प्रश्न के हल में किया जा सकता है क्योंकि यह रीति न केवल (र) पदमाला के अन्तरों पर आधारित है वरन् (य) पदमाला के अन्तरों को भी उतना ही महत्व देती है। इसका सूत्र निम्नलिखित है—

$$yx = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$+ y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$र_य = र_0 \frac{(य-य_1)(य-य_2)(य-य_3)}{(य_0-य_1)(य_0-य_2)(य_0-य_3)}$$

$$+ र_1 \frac{(य-य_0)(य-य_2)(य-य_3)}{(य_1-य_0)(य_1-य_2)(य_1-य_3)}$$

$$+ र_2 \frac{(य-य_0)(य-य_1)(य-य_3)}{(य_2-य_0)(य_2-य_1)(य_2-य_3)}$$

$$+ र_3 \frac{(य-य_0)(य-य_2)(य-य_3)}{(य_3-य_0)(य_3-य_1)(य_3-य_2)}$$

उदाहरण :—

निम्नलिखित सारणी में उत्पादन के निर्देशांक दिए गए हैं और १९४१ का अज्ञात पद मालूम करना है ।

१९३९	$य_0$	१००	$र_0$
१९४०	$य_1$	१०७	$र_1$
१९४१	य	?	रय
१९४२	$य_2$	१५७	$र_2$
१९४३	$य_3$	२१२	$र_3$

उपरोक्त सारिणी में ४ ज्ञात पद हैं इसलिए लैगरैंज का सूत्र (य३) तक बढ़ेगा और उसका निम्नलिखित स्वरूप होगा ।

$$र_{य} = र_0 \frac{(य—य_1)(य—य_2)(य—य_3)}{(य_0—य_1)(य_0—य_2)(य_0—य_3)}$$

$$+ र_1 \frac{(य—य_0)(य—य_2)(य—य_3)}{(य_1—य_0)(य_1—य_2)(य_1—य_3)}$$

$$+ र_2 \frac{(य—य_0)(य—य_1)(य—य_3)}{(य_2—य_0)(य_2—य_1)(य_2—य_3)}$$

$$+ र_3 \frac{(य—य_0)\ (य—य_1)\ (य—य_2)}{(य_3—य_0)(य_3—य_1)(य_3—य_2)}$$

$$र_{य} = १०० \times \frac{+१ \times —१ \times —२}{—१ \times —३ \times —४}$$

$$+ १०७ \times \frac{+२ \times —१ \times —२}{+१ \times —२ \times —३}$$

$$+ १५७ \times \frac{+२ \times +१ \times —२}{+३ \times +२ — १}$$

$$+ २१२ \times \frac{+२ \times +१ \times —१}{+४ \times +३ \times —१}$$

$$= १०० \times —\frac{१}{६} + १०७ \times \frac{२}{३} + १५६$$

$$\times \frac{२}{३} — २१२ \times \frac{१}{६}$$

$$= —१६\frac{२}{३} + १०४\frac{२}{३} — ३५\frac{१}{३} = १२४$$

उदाहरण—निम्नलिखित सारणी से उन व्यक्तियों की संख्या का अनुमान लगाओ जिनकी आय ६०) और ७०) के बीच हो।

आय (रु०)	व्यक्ति संख्या (,०००)
४० से नीचे	२५०
४०–६०	१२०
६०–८०	१००
८०–१००	७०
१००–१२०	६०

उपरोक्त सारणी से एक संचयी आवृत्ति माला बना लेनी चाहिए—

आय	संचयी आवृत्ति
४०) से नीचे	२५०
६०) ,, ,,	३७०
८०) ,, ,,	४७०
१००) ,, ,,	५४०
१२०) ,, ,,	६००

(य) पदमाला देखने से ज्ञात होता है कि (य) चल बराबर मात्रा में बढ़ता है इसलिए न्यूटन के प्रगामी अन्तरों की रीति में प्रयोग से निम्न-लिखित सारणी के आधार पर आन्तरगणन न करना चाहिए। नीचे की सारणी में सर्व प्रथम ७०) से नीचे पाने वाले व्यक्तियों की संख्या का आन्तरगणन करना होगा।

रु०	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
२५० ३७० ४७० ५४० ६००	१२० १०० ७० ५०	२० ३० २०	— १० + १०	+ २०

$$य = \frac{७०—४०}{२०} = १·५$$

$$र_{य} = र_{०} + य\Delta_{1} + य\frac{(य—१)}{१ \times २}\Delta^{2}$$

$$+ \frac{य\ (य—१)\ (य—२}{१\times२\times३}\Delta^{3}$$

$$+ \frac{य\ (य—१)\ (य—२)\ (य—३}{१\times२\times३\times४}\Delta^{4}$$

$$= २५० + १·५ \times १२० + \frac{१·५\,(१·५—१)}{१\times२} \times २०$$

$$+ १·५\ \frac{(१·५—१)\ (१·५—२)}{१\times२\times३} \times —१०$$

$$+ \frac{१·५\,(१·५—१)\ (१·५—२)\ (१५·—३}{१\times२\times३\times४} \times २०$$

$$= २५० + १८०—७·५ \times ·६२५ + ·९३५$$

$$= ४२४·०६० \text{ हजार}$$

$$= ४,२४,०६०$$

क्योंकि ७०J से नीचे ४,२४,०६० व्यक्तियों की आय है और ६०J नीचे ३,७०,००० व्यक्तियों की आय है इसलिए ६०J और ७०J के ाच में ५४०५० व्यक्तिओं की आय होगी।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. Estimate the expectation of life (जीवन की आशंसा) a the age of 16 years using the following data :—

Age in years	Expectation of life
10	35.4 years
15	32.3 ,,
20	29.2 ,,
25	26.0 ,,
30	23.2 ,,
35	20·4 ,,

(*M. A. Agra.*, 1943)

[Ans. 31.7 yrs.]

2. Give a few examples of the use of interpolatio (आन्तरगणन) in business statistics. The following are th annual premia in a certain life insurance Co. for a polic of Rs. 500 payable at death with an agreed bonus. Find th premium at the age of 36.

Age next birthday	Annual Premium Rs.	as.
25	24	10
30	27	11
35	31	9
40	36	6
45	42	5

(*M. Com., Lucknow*, 1942

[Ans. Premium at the age of 36 is Rs. 32-7-0]

3. What is Interpolation (आन्तरगणन). Under wha assumptions (परिकल्पनाएं) are the position of Mod (भूयिष्ठक) and Median (मध्यका) interpolated in a frequenc distribution ?

Estimate the annual Sales of cloth for 1935 from th following records of a cloth dealer.

Year	Sale of cloth in Lakhs of yards
1920	250
1925	285
1930	328
1940	444

[Ans. 380 lakhs of yards approximately]

4. Describe the relative scope (क्षेत्र) and limitations (सीमाएं) of the graphic and the algebraic methods (बीजगणतीय रीतियों) of interpolation. Examine the validity of each of the method (*i*) for immediate or remote extrapolation (बाह्य गणन) and (*ii*) in cases where there is known to be cyclical variation (चक्रीय परिवर्तन). (*M.A.*, *Agra*, 1931).

5. Give an estimate of the population of Bengal in 1911 and in 1941 from the following figures.

Year	Population in lakhs	Year	Population in lakhs
1881	363	1911	?
1891	391	1921	467
1901	421	1931	501

Describe how far your estimates (अनुमान) are reliable and what purpose they serve. Suggest any other method to check your results. (*B. Com.*, *Agra*, 1940).

[Ans. 1911=145 lakhs
1941=569 lakh]

6. The following table gives the population of Indore at the time of the last six censuses (जन-गणनाए)

Year	Population
1881	75,401
1891	82,984
1901	86,686
1911	44,947
1921	43,091
1931	127,327

Estimate the Population for 1941.

[Ans. 1941=2,20,760] (*B. Com.*, *Agra*, 1944).

7. The following table gives the census population of an Indian state in 1901, 1911, 1921 and 1931.

Estimate the population of the state in 1924 making your method clear.

Year	Population in thousands
1901	2797
1911	2935
1921	3047
1931	3354

(*P.C.S.* 1939).

[Population of the given state in 1924 is estimated at 3108.5695 thousands.]

8. The following table shows the value of an immediate life annuity for every £ 100 paid.

Age in year	Annuity (pound)
40	6.2
50	7.2
60	9.1
70	12.0

(*M.A., Cal.,* 1936).

Interpolate (आन्तरगणन कीजिए) for the ages 42 and 69.

[Estimated value of the life annuity for the age 42 is £6.346]

9. From the following figures find the premiums at the ages 28 and of 40.

Age in years	Annual premiums Rs.	as.
20	28	5
25	31	12
30	35	10
35	40	8

(*B. Com., Agra,* 1942).

[Ans. Premium at the age of 28=Rs. 34-0-0 and at the age of 40=Rs. 46-15-0]

10. The following table gives the quantities of a certain brand of tea demanded at price noted against each. Estimate the probable demand (संभाव्य माँग) when the price is Rs. 1-14-0 a pound.

Price of tea per lb		Quantity demanded lbs.
Rs.	as.	in thousand
1	4	82.5
1	8	70.8
1	12	63.1
2	0	55.0
2	4	48.9

[Ans. Probable demand 59.0 thousand pounds using last 4 figures only.] (*M.A. Alld.*, 1942).

11. Determine by Lagrange's formula the percentage number of criminals under 35 years.

Age under years	% number of criminals
25	52.0
30	67.3
40	84.1
50	94.4

[The estimated percentage number of criminals under 35 years of age is 77.43]

12. The following table gives the number of income tax assesses (करदाता) in the U.P. :—

Income not exceeding		No of assessees
Rs.	2500	7166
,,	3000	10576
,,	5000	17200
,,	7500	20505
,,	10000	21975

Estimate the number of assessees with incomes not exceeding Rs. 4,000. (*M.A. Alld.*, 1944).

[No. of persons with incomes not exceeding Rs. 4000 is approximately 14,898.]

13. The age of mother and the average number of children born per mother are given in the following table. Find by any method of interpolation the average number of children born per mother aged 30—34.

Age of mother	No. of children
15—19	0.7
20—24	2.1
25—29	3.5
30—34	?
35—39	5.7
40—44	5.8

(P.C.S., 1943).

[Ans. Expected number of children born per mother aged 30 to 34 is 4·8 approximately.

14. Interpolate the (आन्तरगणन कीजिए) missing figures in the following table of rice cultivation.

Year	Acres in millions
1911	76.6
1912	78.7
1913	?
1914	77.7
1915	78.7
1916	?
1917	80.6
1918	77.6
1919	78.7

(*B. Com.*, *Agra*, 1937).

[The estimated acres of land under rice cultivation in 1913 and 1916 are 78.2 and 80.5 millions respectively.]

15. Find out by interpolation from the following data the number of workers earning Rs. 24 or more but less than Rs. 25.

Earning less than		Number of workers
Rs.	20	296
,,	25	599
,,	30	804
,,	35	918
,,	40	966

(P.*C.S.*, 1948).

[Ans. The number of workers earning Rs. 24 or more but less than Rs. 25 is 53.]

16. It is required to find the missing value (अज्ञात मूल्य) in the following table. Establish any suitable formula (समुचित सूत्र) for interpolation and find the missing value.

S. N.	Value	S.N.	Value
1	6.4577	6	1.7849
2	3.4531	7	1.6874
3	2.5604	8	1.6177
4	2.5604	9	1.5646
5	?	10	1.5232

(*I.C.S.*, 1940).

[Ans. Interpolated value of the item No. 5 is 1.9211]

अध्याय १४

भारत में साँख्यिकीय सामग्री
(Indian Statistics)

सामग्री संग्रहण व्यवस्था

कुछ वर्षों पूर्व तक भारतवर्ष में समंक संग्रहण करने के लिये कोई केन्द्रीभूत व्यवस्था नहीं थी। सर्व प्रथम १८ वीं शताब्दी के उत्तरार्ध में ईस्ट इंडिया कम्पनी ने कृषि सम्बन्धी समंकों का संकलन किया था और सन् १८६८ में सबसे पहले (Statistical Abstract of British India) इंगलैंड से और सन् १८८१ में (Imperial Gazetteer of India) का भारत से प्रकाशन हुआ जिनमें काफी महत्वपूर्ण सूचनाएँ छापी गईं थीं। भारतवर्ष की सर्व प्रथम जनगणना सन् १८७२ ई० में ली गई जो कि सम्पूर्ण भारत में एक सी न होने के कारण गलत ठहराई गई और पहली पूर्ण और समान जनगणना सन् १८८१ ई० में हुई जिसके बाद से भारतवर्ष में जनगणना की दस वर्षीय योजना अपना ली गई। यह जनगणनायें जन-संख्या के विभिन्न प्रकार के वितरण, गृह-सम्बन्धी परिस्थितियाँ, नौकरी, पेशा, जाति, साक्षरता, धर्म, विवाह इत्यादि से सम्बन्धित समंकों को संकलन करने के लिये की गई थी। उन्नीसवीं शताब्दी के अन्त तक भारत सरकार ने विभिन्न आर्थिक क्षेत्रों से सम्बन्धित पत्रिकायें छापना प्रारम्भ कर दिया था और सन् १८८३ ई० के सांख्यिकीय कॉफ्रेंस में जोकि कलकत्ता में हुई थी उसके सुझाव के अनुसार अखिल भारतवर्षीय 'फसलों के पूर्वानुमान' (Crop Forecasts) और 'पंचवर्षीय पशु-गणनाओं' (Live Stock Censuses) का प्रकाशन आरम्भ कर दिया था। सन् १९१६-१८ के औद्योगिक कमीशन (Industrial Commission) ने उस समय की सार्वजनिक भावनाओं के अनुकूल व्यवसायिक और औद्योगिक समंकों के संकलन, विश्लेषण और प्रसार के सम्बन्ध में सरकार के सामने एक योजना रखी जिसके फलस्वरूप सन् १९२२ में व्यवसायिक सूचना विभाग (Commercial Intelligence Department) के साथ में साँख्यिकीय विभाग (Department of

Statistics) सम्मिलित कर दिया गया। सन् १९२५ में भारतीय आर्थिक अनुसंधान समिति (Indian Economic Enquriy Committee) नियुक्त की गई जिसके सभापति श्री० विश्वेसरैंया थे। इस समिति की स्थापना इसलिये की गई थी कि वह प्राप्य सांख्यिकीय सूचनाओं की समुचितता पर खोज करे, और आर्थिक अनुसंधान की आवश्यकता पर सुझाव रखे। इस समिति ने यह सुझाव रखा कि प्रत्येक प्रान्त में एक सांख्यिकीय कार्यालय (Statistical Bureau) होना चाहिये और समन्वय का कार्य करने के लिये एक केन्द्रीय कार्यालय का निर्माण किया जाना चाहिये। कृषि और श्रम के लिये जो रायल कमीशन नियुक्त हुये थे उन्होंने भी समंकों के संकलन, विश्लेषण और निर्वचन पर बहुत जोर दिया, जिसके फलस्वरूप भारतीय कृषि अनुसंधान कौंसिल (Indian Council of Agricultural Research) में एक सांख्यिकीय विभाग खोल दिया गया। सन् १९३३ में विश्वेसरैंया समिति के केन्द्रीय कार्यालय सम्बन्धी मत को आंशिक रूप में मान लिया गया और केन्द्र में एक सांख्यिकीय अनुसंधान ब्यूरो का निर्माण समंकों के संकलन, विश्लेषण और निर्वचन के लिये किया गया। सन् १९३४ में बॉवले रावर्टसन समिति ने सुझाव पेश किया कि केन्द्र में उत्पादन और जन-संख्या की गणनाओं के लिये एक सांख्यिकीय डाइरेक्टर (D'rector of Statistics) रखा जाय जिसका मुख्य कार्य समंकों का समन्वय करना हो। यह सुझाव भारत सरकार ने आंशिक रूप में सन् १९३८ में माना और भारत के आर्थिक सलाहकार (Economic Adviser) का दफ्तर खोल दिया गया और इसमें सांख्यिकीय अनुसंधान ब्यूरो भी मिला दिया गया। सन् १९४२ के इन्डस्ट्रियल स्टेटिस्टिक्स एक्ट के अनुसार एक औद्योगिक सांख्यिकीय दफ्तर (Directorate of Industrial Statistics) का निर्माण किया गया जो कि सन् १९४६ से औद्योगिक उत्पादन गणना (Census of Manufactures) का कार्य कर रहा है। सन् १९४८ में खाद्य और कृषि-खाद्य मंत्रालय के अन्तर्गत एक आर्थिक और सांख्यिकीय डाइरेक्टरेट बनाया गया। सन् १९४९ में केन्द्रीय सचिवालय में सभी प्रकार के समंकों के समन्वय के लिये एक सांख्यिकीय यूनिट बनाया गया जोकि सन् १९५० में केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन के रूप में परिवर्तित हो गया और आज प्रोफ़ेसर महलानवीस की अध्यक्षता में सांख्यिकी सम्बन्धी सभी प्रकार का कार्य कर रहा है।

द्वितीय महायुद्ध के आरम्भ तक समंकों के संकलन व निर्वचन का कार्य "व्यापारिक वृत्त एवं अंक के संचालनालय (Directorate of Commercial Intelligence and Statistics) में ही केन्द्रीभूत रहा, परन्तु द्वितीय विश्व युद्ध में इस प्रणाली का विकेन्द्रीकरण हो गया और केन्द्र में अब प्रायः प्रत्येक मंत्रणालय के अन्तर्गत एक-एक सांख्यिकीय विभाग है और उनके द्वारा एकत्रित समंकों का समन्वय केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (Central Statistical Organisation) करता है। सन् १९४८ के पहिले कृषि सम्बन्धी समंकों का संकलन 'व्यापारिक वृत्त एवं अंक सचालक' करता था किन्तु अब यह कार्य खाद्य-कृषि मंत्रणालय के अन्तर्गत अर्थ और अंक संचालक द्वारा किया जाता है। इसके अतिरिक्त भारतीय कृषि अनुसंधान कौंसिल का सांख्यिकीय विभाग फसल काटने के प्रयोग और अन्य खोज सम्बन्धी कार्य करता है। वित्त मंत्रणालय के अन्तर्गत एक राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान (National Sample Survey) और राष्ट्रीय आय कार्यालय (National Income Unit) हैं जो कि राष्ट्र-जीवन के बहुत ही महत्वशाली पहलुओं पर खोज सम्बन्धी कार्य कर रहे हैं। इनके अतिरिक्त वित्त मंत्रणालय में एक अर्थ और अंक विभाग और एक प्रमंडल सन्नियम अंक विभाग (Company Law Statistics Section) हैं। वाणिज्य-व्यवसाय मंत्रणालय के अन्तर्गत आर्थिक सलाहकार, व्यापारिक वृत्त एवं अंक संचालक, औद्योगिक सांख्यिकीय संचालक के कार्यालय हैं। श्रम मंत्रणालय के अन्तर्गत एक श्रम व्यूरो है जो फैक्टरी ऐक्ट, ट्रेड-यूनियन ऐक्ट और अन्य श्रम सम्बन्धी संन्नियमों की प्रगति सम्बन्धी अंक प्रकाशित करता है। इसके अतिरिक्त पुनर्वास और नौकरी के संचालक का भी एक कार्यालय इस मंत्रणालय के अन्तर्गत है। गृह-मंत्रणालय के अन्तर्गत जनगणना आयुक्त का दफ्तर है जोकि जनगणना और जीवन सम्बन्धी समंकों का संकलन और समन्वय का कार्य करते हैं। इनके अतिरिक्त अन्य मंत्रणालयों के अन्तर्गत तत्सम्बन्धी सूचनाओं के संकलन, विश्लेषण एवं प्रकाशन के लिये छोटे छोटे कार्यालय हैं।

जैसा कि उपरोक्त विवरण से स्पष्ट है कि केन्द्र में अब समंकों के संकलन, समन्वय और विश्लेषण की संतोष जनक व्यवस्था हो गई है। इस व्यवस्था और स्वतंत्रता के वातावरण में ऐसी आशा की जाती है कि संग्रहीत सामग्री में वैषम्य, व्यतिक्रम, और अविश्वस्नीयता न रहेगी जैसी कि अब तक रही है। आज भी समंकों का प्रकाशन बड़े विलम्ब से होता है जिससे

कि उनकी उपयोगिता मारी जाती है । उदाहरणार्थ, सन् १९५० की उत्पादन गणना के परिणाम सन् १९५५ में प्रकाशित किये गये हैं । इन परिणामों का अब केवल एक ऐतिहासिक महत्व मात्र ही रह गया है क्योंकि उत्पादन गणना के निष्कर्षों के आधार पर आगे अर्थ-नियोजन नहीं किया जा सकता । वास्तव में सन् १९५१ से अब तक राष्ट्रीय-नियोजन के पाँच वर्ष पूरे हो चुके हैं और उत्पादन के स्वरूप में बहुत कुछ परिवर्तन हो चुका है । अब तो यदि नई पंच वर्षीय योजना के लिये उत्पादन सम्बन्धी समंकों की आवश्यकता होगी तो सन् १९५० की उत्पादन गणना के समंक बेकार सिद्ध होंगे ।

यद्यपि केन्द्र को दशा सन्तोषजनक है राज्यों में अब भी कोई एक सी पद्धति नहीं पाई जाती । आसाम, बम्बई, मद्रास, उत्तर प्रदेश, पश्चिमी बंगाल में तो केन्द्रीय साँख्यिकी कार्यालय हैं जो विभिन्न प्रकार के समंकों का संकलन करते हैं । इन राज्यों में यद्यपि संकलन और समन्वय का कार्य केन्द्रीय सांख्यिकीय व्यूरो करते हैं किन्तु उनके प्रयोग विभिन्न विभागों में कार्य करने वाले सांख्यिकों (Statisticians) पर छोड़ दिया गया है । अन्य प्रान्तों में सामग्री संग्रहण की कोई केन्द्रीय व्यवस्था नहीं है और समंक संकलन और सांख्यिकीय ढंगों के प्रयोग दो विभिन्न कार्य हैं जिन्हें भिन्न-भिन्न संगठन सम्पादित करते हैं । उदाहरणार्थ, कृषि-समंकों का संकलन यदि प्रशासकीय प्रणाली द्वारा किया जाता है तो फ़सल काटने के प्रयोग कुछ सांख्यिकी विशेषज्ञ किया करते हैं ।

भारतवर्ष के सरकारी समंक प्रायः प्रशासकीय यंत्र द्वारा एकत्र किए जाते थे । इस देश की विशेष परिस्थितियों के कारण उन समंकों की यथार्थता पर आरोप लगाये जा सकते हैं । माल और पुलिस विभाग के द्वारा एकत्रित किये हुये समंक प्रायः ठीक नहीं होते क्योंकि उन्हें एकत्रित करने का कार्य प्राय: ऐसे व्यक्ति करते हैं जो प्राय: अशिक्षित होते हैं । भारतवर्ष के सरकारी समंकों में प्रायः अपर्याप्तता, समन्वयहीनता, असंबद्धता, अस्पष्टता और विलम्बित प्रकाशन इत्यादि दोष रहे हैं । इनके संबन्ध में सन् १९२५ में विश्वैसरैया कमेटी ने बहुत ही कटु समालोचना की थी । आज स्थिति बहुत कुछ बदल चुकी है । सन् १९५२ में ७४ अखिल भारतवर्षीय फसल अनुमान करीब २३ कृषि सम्बन्धी वस्तुओं के लिए प्रकाशित हुये थे । कृषि और अर्थ सम्बन्धी समंकों के परिमाण और यथार्थता की वृद्धि के लिए उत्पादन के अनुमान इत्यादि के

सम्बन्ध में अनेक योजनायें बनाई गईं । सरकार ने कृषि समंकों के सुधार के लिये सन् १९५२ में एक पंच वर्षीय समन्वय योजना लागू की जिसका कि एक प्रमुख अंग और क्षेत्र उत्पादन सम्बन्धी समंकों के संकलन में निरीक्षणकारी नियंत्रण निर्माण करना था । भारतीय कृषि अनुसन्धान कौंसिल की योजनाओं को सफल बनाने के लिये (F.A.O.) अन्तर्राष्ट्रीय खाद्य व कृषि संगठन के विशेषज्ञ (Mr. D. G. Finney) की सेवायें भी प्राप्त कीं गईं और वर्ष भर में करीब ३० साँख्यिकीय रिपोर्टें प्रकाशित की गईं ।

सन् १९५१–५२–५३ में आर्थिक और साँख्यिकीय महत्व की बहुत सी रिपोर्टें प्रकाशित हुईं और कई सन्नियम बनाये गये । सन् १९५१ की जन-गणना प्रथम वैज्ञानिक और बहुत यथार्थ जनगणना है क्योंकि यह उस समय हुई जब कि भारत स्वतन्त्र हो चुका था और प्रत्येक प्रगणक के अन्दर यथार्थ समंकों के संग्रहण की महत्ता का पूर्ण अनुमान था । अप्रल सन् १९५१ को राष्ट्रीय आय कमेटी की पहली रिपोर्ट प्रकाशित हुई जोकि सरकार के द्वारा देश की राष्ट्रीय आय के अनुमान लगाने की दिशा में पहला वैज्ञानिक उद्योग था । यह रिपोर्ट सन् १९४८–४९ के अनुमान के अतरिक्त व्यक्तियों की विभिन्न उदगमों से आय, उनका पेशेवर वितरण, उत्पादन प्रति-व्यक्ति, सरकार का आन्तरिक उत्पादन में भाग, आय का उपभोक्ता के खर्चों से सम्बन्ध, और राष्ट्रीय आय के लेखे सम्बन्धी अनेक महत्पूर्ण समंक प्रदान करती है । इस कमेटी की द्वितीय रिपोर्ट फरवरी सन् १९५४ में प्रका-शित हुई जोकि भारतीय राष्ट्र की आय का अनुमान १९४८-४९, १९४९-५०, और १९५०-५१ के लिये प्रस्तुत करती है । इन अनुमानों के अतिरिक्त इस रिपोर्ट में अनुमान लगाने की पद्धति, वर्तमान समंकों की अपर्याप्तता और राष्ट्रीय आय के अनुमान सम्बन्धी समंकों में गुणात्मक सुधार सम्बन्धी सुझाव मिलते हैं । सितम्बर २५, सन् १९५३ को विभिन्न राज्यों के कृषि मंत्रियों का एक सम्मेलन दिल्ली में हुआ था जिसने कृषि सम्बन्धी समंकों के संकलन, विश्लेषण और निर्वचन के सम्बन्ध में अनेक महत्वपूर्ण सुझाव पेश किये थे । सन् १९४९ में भारत सरकार द्वारा स्वीकृत किया गया राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसन्धान (N. S. S.) प्रोफेसर महलानवीस की अध्यक्षता में सफलता पूर्वक कार्य कर रहा है जिसकी कि पहली रिपोर्ट सन् १९५३ में प्रकाशित हुई थी । सन् १९५३ में भारत सरकार ने एक समंक संकलन विधेयक (Collection of Statistics Act) पास किया

जिसके द्वारा सन् १९४२ के औद्योगिक समंक विधेयक (Industrial Statistics Act) की कमियों को दूर कर दिया गया। भारत सरकार बहुत तेजी से निर्देशाँकों के आधारवर्ष परिवर्तन करने की दिशा में विचार कर रही है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि पिछले कुछ वर्षों में समंकों की उपयोगिता और सामयिकता में सुधार करने के लिये अनेकों प्रयत्न हुये हैं जिससे यह आशा बँधती है कि निकट भविष्य में भारत के सरकारी समंकों का स्तर बहुत ऊँचा उठ जायगा।

जनगणना (Census)

जनसाधारण के लिये जनगणना का अर्थ किसी भी देश के निवासियों की संख्या की गिनती करना है परन्तु यह वास्तव में उन निवासियों के जीवन से सम्बन्धित सभी प्रकार के तथ्यों के सम्बन्ध में की जाने वाली एक ऐसी अनुसंधान क्रिया है जोकि किसी भी देश की सरकार ही करने को क्षमता रखती है। सरकार द्वारा समय समय पर की जाने वाली यह जाँच राष्ट्र-जीवन के लिये बहुत ही महत्वपूर्ण होती है क्योंकि बिना विभिन्न क्षेत्रों से सम्बन्धित आँकड़े प्राप्त किये हुये भविष्य के लिये योजनायें नहीं बनाई जा सकतीं। श्री० जी० एल० मेहता के कथनानुसार आज देश में जो परिवर्तन हो रहे हैं उनके कारण अनेक व्यवस्था और नियोजन सम्बन्धी समस्यायें उठ खड़ी हुई हैं जिनका निवारण तथ्यों के वैज्ञानिक अध्ययन के आधार पर ही किया जा सकता है। जनसंख्या के प्रसार व गतिशीलता, राष्ट्रीय आय के विवरण, जीवन निर्वाह के अन्तर, गरीबी और बेकारी की समस्यायों को सुलझाने में समंकों का सहारा लेना ही पड़ता है। देश में किसी भी प्रकार का समाजिक अध्ययन या अर्थ-नियोजन वहाँ के निवासियों के पेशे सम्बन्धी ज्ञान के अभाव में सर्वथा असम्भव है। विभिन्न क्षेत्रों में राष्ट्रीय-नियोजन के अतिरिक्त जनगणना के आधार पर सामाजिक सुधार किये जा सकते हैं और इसके द्वारा प्रदत्त आँकड़ों के सहारे कोई भी राजनीतिज्ञ राजकार्य में पूर्ण रूप से सफल हो सकता है। जनगणना की उपयोगिता के सम्बन्ध में यह कहना अत्युक्ति न होगी कि इसके द्वारा प्राप्त आँकड़े अर्थशास्त्रियों, समाज सेवकों, व्यापारियों और परिवहन की कम्पनियों के लिये समान रूप से लाभदायक सिद्ध होते हैं।

यदि कोई अर्थशास्त्री अपने देश की जनसंख्या विस्तार की प्रवृत्ति और उसका पेशे के अनुसार विभाजन जानना चाहता है तो वह जनगणना की रिपोर्ट पढ़ कर जन-विस्तार का पूर्ण ज्ञान प्राप्त कर सकता है। इसके अतिरिक्त इसकी रिपोर्टों के आधार पर वह जन-विस्तार और अन्न के उत्पादन में सह-सम्बन्ध स्थापित करने और नागरिक जनसंख्या के विकास एवं ग्राम-उद्योगों के ह्रास में भी सम्बन्ध स्थापित कर सकता है। जनगणना व्यवसाइयों को बहुत ही महत्वपूर्ण समंक प्रदान करती है जिनके आधार पर वे अपने क्षेत्र में रहने वाले निवासियों के सम्बन्ध में पूर्ण ज्ञान प्राप्त करके अपनी भावी समृद्धि की कल्पना कर सकते हैं। पेशों के अनुसार विभाजन सम्बन्धी आकंड़ों से व्यवसायी अपने लिये वर्तमान या भावी अनुकूलतम बाजारों का चुनाव कर सकता है और किसी विशेष नगर के निवासियों की संख्या वा उनके प्रति-व्यक्ति के उपभोग की मात्रा जान कर व्यापारी अपनी बिक्रय-प्रणाली में परिवर्तन कर सकता है।

व्यवसाइयों के समान परिवहन के साधनों के लिये भी जनगणना का एक विशिष्ट महत्व है क्योंकि कोई भी परिवहन की कम्पनी किसी भी क्षेत्र में कार्य आरम्भ करने से पहिले इस बात का अनुमान लगा लेना चाहती है कि उस कार्य में उसे यश की प्राप्ति होगी या नहीं। ये कम्पनियाँ घने बसे क्षेत्रों में सर्व प्रथम कार्य करना पसन्द करेंगी क्योंकि उन्हे अपने लगाये हुये धन पर अधिकतम प्राप्ति की आशा बँध जाती है। जनगणना के आंकड़ों के आधार पर ही बीमा कम्पनियाँ अपनी दरों की तालिकायें बनाती हैं और यह जान लेना आवश्यक है कि सन् १८९१ से प्रत्येक सरकार जनगणना की रिपोर्ट में जीवनांकिक (Actuary) की रिर्पोट भी छपती रही है। प्रत्येक सरकार जनगणना के आंकड़ों से यह जान सकती है कि सम्पूर्ण राष्ट्रीय आय के उत्पादन में कितने व्यक्ति लगे हुये हैं और वे उसे किस प्रकार बांटते हैं। प्रायः आयकर से प्राप्त धन का विभाजन केन्द्रीय और प्रान्तीय सरकारों के बीच में जनसंख्या के आधार पर ही किया जाता है।

भारतवर्ष में जनगणना अत्यन्त प्राचीन काल से होती आई है और इतिहास इस बात का साक्षी है कि कौटिल्य के काल में बहुत ही उन्नत स्वरूप में यह पद्धति विद्यमान थी और सैन्य-संकलन करने, जनसंख्या की शारीरिक एवं श्रमिक शक्ति जानने, नागरिकों के अधिकार एवं कर्तव्यों

का निर्णय करने, और प्रत्येक सभा के सदस्यों का निर्वाचन करने के लिये प्राय: जनगणना के द्वारा प्राप्त समंकों का ही प्रयोग किया जाता था। समय की गति के साथ ही साथ जनगणना के क्षेत्र एवं उपयोगिता में बहुत अधिक विकास हो चुका है।

पिछली जनगणना की रिपोर्टों में प्राय: निम्नलिखित दोष पाये जाते थे—

(१) एक जनगणना से दूसरी जनगणना तक प्राय: वर्गीकरण की प्रणाली बदल जाया करती थी और इस कारण उनके आधार पर संकलित पेशों के अनुसार समंकों में प्राय: तुलना नहीं हो सकती थी।

(२) विभिन्न जनगणनाओं में आयु सम्बन्धी समंक भी प्राय: गलत होते रहे क्योंकि भारतवर्ष एक कृषि प्रधान देश है जहाँ कि निरक्षर ग्रामीण सही आयु बताने का महत्व नहीं समझते और अपने धार्मिक, या जातीय कमजोरियों के कारण आवश्यक सूचनायें छिपा लेते हैं। प्राय: साठ वर्ष से ऊपर वाला पुरुष और चालीस वर्ष से ऊपर वाली स्त्री अपनी आयु अधिक और पचास वर्ष से नीचे वाला पुरुष और पैंतीस वर्ष से कम की स्त्री अपनी आयु कम बतलाते हैं। प्राय: ग्रामीण भाई अपनी आयु पूरे पूरे वर्षों में बतलाते हैं और महीनों का उन्हें ज्ञान ही नहीं रहता। बहुत सी गाँव की स्त्रियाँ यह नहीं जानतीं कि उनकी आयु क्या है।

(३) पिछली जनगणनाओं में प्राय: गृह (House) की परिभाषा संदिग्ध रही है क्योंकि कभी तो एक इमारत को एक गृह माना गया था और कभी उसके भीतर बसने वाले विभिन्न परिवारों को। इसके अतिरिक्त जनगणना के पहिले मकानों में नम्बर लगाने की कोई वैज्ञानिक पद्धति न होने के कारण और क्षेत्रीय नक्शों के अभाव से प्राय: जनगणना के आधार पर बनाई जाने वाली मत-दाताओं की सूची प्राय: ग़लत बनती रही है।

(४) भारतवर्ष में गाँव में प्राय: छोटी अवस्था में ही कुछ अभि-भावक अपने संरक्षितों के विवाह कर देते रहे हैं और शारदा ऐक्ट से बचने के निमित्त विवाह सम्बन्धी सूचनाओं को छिपाते रहे हैं। इस कारण विवाह सम्बन्धी आँकड़े भी पूर्णरूप से यथार्थ नहीं कहे जा सकते।

(५) भारतवर्ष की जनगणना अवैतनिक होने के कारण प्राय: अधूरी रहती है क्योंकि निरक्षर या साक्षर परन्तु सांख्यिकीय ढंगों से अनभिज्ञ

प्रगणक न तो प्रायः प्रश्नावलियों का अर्थ ही समझ पाते हैं और न प्रत्येक व्यक्ति की गणना करने का समुचित प्रयत्न ही करते हैं। जनगणना का कार्य अस्थायी होने के कारण उच्च अधिकारी प्रायः जनगणना के कार्य को अधिक महत्व नहीं देते रहे हैं।

(६) सर्व प्रथम आधुनिक जनगणना सन् १८७२ में की गई थी जिसे इस कारण ठीक न समझा गया था क्योंकि एक ही प्रकार की पद्धति सारे देश में नहीं अपनाई जा सकी थी। इसके बाद सन् १८८१ की पहली व्यवस्थित जनगणना हुई जिसके बाद से प्रत्येक दसवें वर्ष भारतीय जनगणना नियमित रूप से होती रही है। सन् १९३१ में जनगणना में खोज सम्बन्धी प्रश्नावली का क्षेत्र बढ़ा दिया गया और धर्म, साक्षरता, भाषा इत्यादि पर अधिक जोर दिया गया। सन् १९४१ की जनगणना में संकलित सामग्री और संकलन पद्धति के सम्बन्ध में निम्नलिखित परिवर्तन किये गये।

(१) इस जनगणना से पहिले प्रत्येक जनगणना में "एक रात्रि पद्धति" अपनाई जाती थी जिसके अनुसार एक चाँदनी रात को सभी काम काज रोक कर जनगणना की जाती थी। इस जनगणना में ६ दिन का समय लिया गया।

(२) सन् १९३१ की जन-गणना तक प्रत्येक व्यक्ति को उस स्थान पर गिना जाता था जहाँ कि उसे जनगणना वाले दिन पाया जाय। सन् १९४१ की जनगणना में प्रत्येक व्यक्ति को उसके निवास स्थान पर ही गिना गया।

(३) इस जनगणना से पूर्व संकलन कार्य अनुसूचियों (Schedules) के द्वारा किया जाता था जिनसे तालिकायें बनाने के लिये पर्चियों (Slips) पर आंकड़े दुबारा लिखना आवश्यक होता था। सन् १९४१ की जनगणना में अनुसूचियों का प्रयोग हटा दिया गया और संकलन कार्य सीधे सीधे पर्चियों पर ही किया गया।

(४) सन् १९४१ की जनगणना में इस बात का प्रयोग किया गया कि यह मालूम किया जा सकता है या नहीं कि जनगणना से प्राप्त आंकड़े सच्चे हैं या नहीं। इसके लिये प्रत्येक ५० पर्चियों में से एक पर्ची छांट कर रखली गई और इस प्रकार रख लिये गये न्यादर्श (Sample) के आधार पर प्राप्त किये हुये समंकों और जनगणना के समंकों के बीच समन्वय स्थापित करने का प्रयत्न किया गया।

(५) जनगणना के निष्कर्षों की जांच करने के लिये सर्वप्रथम मकानों की सूचियाँ बनाई गई और इसके अलावा यांत्रिक सारणीकरण (Mechanical Tabulation) का भी प्रयोग किया गया।

सन् १९५१ में जो जनगणना हुई वह भारतवर्ष के इतिहास में एक प्रमुख स्थान रखती है क्योंकि उस समय देश स्वतंत्र हो चुका था और भारत की सामाजिक, आर्थिक, और राजनीतिक दशा पर युद्ध और विभाजन का बहुत अधिक प्रभाव पड़ चुका था। राष्ट्र के स्वतंत्र होते ही युद्ध और विभाजन द्वारा विस्थापित राष्ट्रीय जीवन की पुर्नस्थापना करने के लिये आर्थिक नियोजन की आवश्यकता थी और किसी भी नियोजन के लिये यथार्थ समंकों की आवश्यकता अपरिहार्य है। इस जनगणना की निम्नलिखित विशेषताएं हैः—

(१) सन् १९४१ तक जाति और उप-जाति समंकों के संकलन के प्रमुख आधार थे परन्तु वह इस जनगणना में उन्हें हटाकर आर्थिक गुणों को प्रधानता दी गई।

(२) सम्पूर्ण जनसंख्या को जीवन निर्वाह के प्रमुख एवं गौण साधनों के अनुसार बांटा गया और ग्रामीण तथा अग्रामीण वर्गों के उन साधनों के अनुसार निम्नलिखित आठ विभाग किये गये।

(अ) *ग्रामीण*

(१) ऐसे किसान जो कि खेती की जमीन के पूर्ण रूप से या प्रमुख रूप से स्वयं मालिक हैं और उनके आश्रित।

(२) ऐसे किसान जोकि खेती की जमीन के प्रमुख रूप से मालिक नहीं हैं और उनके आश्रित।

(३) खेतिहर मजदूर और उनके आश्रित।

(४) खेती न करने वाले भूमि के मालिक, कृषि लगान पाने वाले और उनके आश्रित।

(ब) *ग्रामीण*

ऐसे व्यक्ति और उनके आश्रित जिनके जीवन निर्वाह के प्रमुख उद्गम निम्नलिखित हों—

(५) खेती के अतिरिक्त अन्य उत्पादन।
(६) वाणिज्य
(७) परिवहन
(८) अन्य सेवायें और आश्रित उद्गम

(३) अभी तक केवल "प्रतिशत अपकिरण दर" (Percentage Variation) मालूम किया जाता था। परन्तु इस जनगणना में प्रतिशत अपकिरण दर के अतिरिक्त दर संख्या और "दस वर्षीय प्रसार मध्यक दर" (Mean Decenniel Growth Rate) भी मालूम की गई।

(४) जनगणना से प्राप्त आँकड़ों की सत्यता की निदर्शन प्रणाली के द्वारा जाँच की गई।

सन् १९४१ की जनगणना से पहिले भारतीय जनगणना में निदर्शन प्रणाली का कोई प्रमुख स्थान नहीं रहा है और सन् १९४१ की जनगणना में भी यद्यपि प्रति पचास पर्चियों में से एक छांटकर न्यादर्श बनाया गया था, उनका पूर्ण रूप से उपयोग नहीं किया जा सका। सन् १९५१ की जनगणना में अनेकों निदर्शन के प्रयोग किये गये और सम्पूर्ण जनगणना के समंकों की यथार्थता को जाँचने का प्रत्यन प्रति सहस्त्र एक गृहस्थी लेकर किया गया। विभिन्न राज्यों में एक दूसरा न्यादर्श जन्म और मृत्यु के आँकड़ों की परीक्षा करने के लिये किया गया और परीक्षण में प्रत्येक जिले की गृहस्थियों में से एक प्रतिशत गृहस्थियों का न्यादर्श चुना गया। इन अनुसंधानों के अतिरिक्त भारतवर्ष के सभी सारणीयन कार्यालयों में एक वृहत न्यादर्श के लिये प्रयोग किये गये जिसका अभिप्राय समस्त पर्चियों का दस प्रतिशत न्यादर्श लेना था। इस प्रकार के न्यादर्श चुनने की पद्धति के अनुसार पर्चियों से पैंड को तोड़ कर उन्हें ताश के पत्तों की तरह काट और फेंट कर एक दस खानों वाली अलमारी में बांट दिया जाता था और विस्थापितों की पर्चियों को एक ग्याहरवें खाने में रख दिया जाता था। सभी पर्चियों को इस प्रकार बांट देने के पश्चात् उन्हें तीन भागों में एकत्रित कर लिया जाता था—

(अ) विस्थापितों की पर्चियाँ
(ब) पाँचवें खाने की पर्चियाँ और
(स) अन्य नौ खानों की सभी पर्चियाँ।

उपरोक्त तीन विभागों में से (ब) विभाग की पर्चियाँ ही न्यादर्श के रूप में रोक ली गईं जोकि समस्त पर्चियों का दस प्रतिशत था। न्यादर्श प्रणाली के द्वारा लघु अनुमान का विभ्रम (Error of Under Estimation), भी मालूम किया गया जो कि १·१ प्रतिशत था अर्थात् भारतवर्ष की इस जनगणना में प्रति हज़ार ११ व्यक्ति गणना करने से छूट गये। इस प्रकार निदर्शन प्रणाली का पूर्ण रूप से सन् १९५१ की जनगणना में प्रथमबार प्रयोग किया गया।

(५) इस जनगणना में पहली बार गृह (House) और गृहस्थी (Household) में भेद किया गया और किसी भी गृह के अर्थ में उस स्थान को लिया गया जिसमें एक से अधिक गृहस्थियाँ निवास करती हों।

(६) गाँवों और वार्डों की संख्या भी अलग अलग छापी गई है जोकि जिला गणना पुस्तिकाओं (District Census Handbooks) में पाई जाती है।

(७) उत्तर प्रदेश की जनगणना की एक प्रमुख बात यह है कि सर्वप्रथम बेकारी के आँकड़े इकट्ठे किए गए।

(८) जनगणना में पहिले पहल जनसंख्या के प्रसार को रोकने के लिए वास्तविक सुझाव पेश किये गए। इस जनगणना में 'अनियमित मातृत्व (Improvident Maternity) की परिभाषा की गई और यह बतलाया गया कि किसी भी एक माँ के तीन बच्चों से अधिक हों तो उसे अनियमित मातृत्व कहेंगे। और ऐसे मातृत्व की दर भारतवर्ष में समस्त संसार के मुकाबले सर्वाधिक है। भारतवर्ष में इसकी दर ४२·८ है जबकि अमरीका में १९·२, इंगलेंड में १४·३, फ्रान्स में १९·७, और जापान में ३३·९ है। यदि जनसंख्या के प्रसार को न रोका गया तो रिपोर्ट के अनुसार जो जनसंख्या १९५१ में ३६ करोड़ है वही १९६१ में ४१ करोड़, १९७१ में ४६ करोड़, और १९८१ में ५२ करोड़ हो जायगी। जन्म-निरोध के अनेकों साधनों की ओर संकेत करने के अतिरिक्त रिपोर्ट से यह भी मालूम होता है कि भारतवर्ष में सम्मिलित परिवार पद्धति का बड़ी तेजी से विनाश हो रहा है। यदि केवल गाँव को लिया जाय तो प्रत्येक तीसरी गृहस्थी एक छोटी गृहस्थी है जिसमें तीन या तीन से कम व्यक्ति हों। इस जनगणना में ५,९२,९३७ प्रगणकों ने ९ फरवरी से १ मार्च तक २१ दिनों की अवधि में छः करोड़

चालीस लाख गृहों में रहने वाले ३५,६८,२९,४२५ व्यक्तियों की गणना की। इस महत्वपूर्ण कार्य में ४१ रु० १२ आना प्रति सहस्र खर्च हुआ।

जनगणना के कार्य में एक विशाल संगठन की आवश्यकता होती है। गणना प्रारम्भ होने के एक वर्ष पहिले जनगणना आयुक्त की नियुक्ति कर दी जाती है जो प्रत्येक प्रान्त में एक सुपरिन्टेन्डेन्ट नियुक्त करता है और प्रान्तों को जिला, विभाग, हल्का, और मुहल्लों में बाँट दिया जाता है। जन-गणना से सम्बन्धित प्रगणकों को प्रान्तीय सुपरिन्टेन्डेन्ट द्वारा छापे गए मेनुएल दिए जाते हैं जिनमें जनगणना सम्बन्धी आदेश रहते हैं। सन १९५१ की जनगणना निम्नांकित पर्चियों पर की गई थी।

जनगणना की पर्ची १९५१
(स्थानीय संकेताक्षर)

(१) नाम और गृहस्थी के कर्ता से सम्बन्ध......................................

(२) (अ) राष्ट्रीयता... ....(ब) धर्म..................................
(स) विशेष वर्ग ....

(३) विवाहित/अविवाहित..............(४) आयु...................................

(५) जन्मस्थान...

(६) पाकिस्तान से आने की तिथि/जिला.......... ....

(७) मातृभाषा.......................(८) दूसरी भाषा..................................

(९) निर्भरता ....नौकरी..... ....

(१०) जीवन निर्वाह का प्रमुख उद्गम..

(११) जीवन निर्वाह का द्वितीयक उद्गम...... ....

(१२) साक्षरता और शिक्षा...

(१३) बेकारी...................... (१४) स्त्री/पुरुष...................................

उपरोक्त पर्चियों के पैड लेकर प्रत्येक प्रगणक अपने क्षेत्र में रहने वाले व्यक्तियों के पास जाता है और पर्ची में दिये गये आँकड़े एकत्रित करता है। प्रत्येक प्रगणक को अपने पास एक अधिकार पत्र और परिचय-पत्र रखना पड़ता है। जनगणना से पूर्व मकानों में नम्बर डाले जाते हैं और प्रत्येक प्रगणक को गणना करते समय अपने पास एक मकानों की सूची

भी रखनी पड़ती है । गणना के अन्तिम तीन दिनों में संग्रहीत समंकों की अन्तिम जांच की जाती है और जांच समाप्त हो जाने पर इस्तेमाल की हुई पर्चियों को एक प्रगणक-विवरण-पत्र के साथ अपने सुपरवाइजर को दे देना पड़ता है। इसके बाद सारणीयन कार्यालयों में प्रत्येक जिले की सामग्री का सारणीकरण होता है और तत्पश्चात् प्रान्तीय कार्यालय में समंकों का सम्पादन, विश्लेषण और निर्वचन के आधार पर एक रिपोर्ट छाप दी जाती है ।

जन्म-मृत्यु सम्बन्धी अंक (Vital Statistics)

जन्म-मृत्यु के आँकड़ों का देश के निवासियों के जीवन की परिस्थितियों के अध्ययन में एक प्रमुख स्थान है । इसमे स्वास्थ्य सम्बन्धी समस्याओं का ज्ञान हो जाता है और जनसंख्या की वृद्धि की ओर प्रवृत्ति का स्पष्टीकरण होता है । जन्म या मृत्यु दर में वृद्धि या कमी के कारणों से और देश के विभिन्न भागों की जन्म और मृत्युदर के तुलनात्मक अध्ययन से जनसंख्या की विभिन्न समस्याओं के समाधान में बहुत बड़ी सहायता मिलती है । किसी भी देश की श्रम-व्यवस्था करने में इन समंकों का एक विशेष स्थान है क्योंकि इनसे सामाजिक सुरक्षा और सामाजिक बीमा की योजनाओं को सफल रूप से चलाने में बड़ी सहायता मिलती है । इसके अतिरिक्त श्रमिक जनसंख्या के आयु सम्बन्धी विवरण से उसकी कार्यक्षमता भी जानी जा सकती है क्योंकि कार्यक्षमता पर आयु का बहुत ही बड़ा प्रभाव है । इस प्रकार श्रम की सुविधा के लिये किये जाने वाले प्रत्येक सुधार की योजना बनाने में इन जीवन सम्बन्धी समंकों का महत्वपूर्ण स्थान है ।

जन्म-मृत्यु के आँकड़े केवल स्वास्थ्य सम्बन्धी नियोजन के लिये ही महत्वपूर्ण नहीं है वरन बीमा कम्पनियों की मरण-तालिकाओं के बनाने में भी बहुत सहायक होते हैं। ह्विपिल महोदय के मतानुसार ये समंक स्वास्थ्य रक्षकों के लिये जनसाधारण के स्वास्थ्य के प्रदर्शक होते हैं और स्वास्थ्य सम्बन्धी दशा पर प्रकाश डालते हैं । अर्थशास्त्रियों के लिये यह समंक धन-उत्पादकों और उपभोक्ताओं की संख्या तथा विवरण के प्रदर्शक हैं इतिहासकारों के लिये राष्ट्र की उन्नति और लौकिक जीवन की समृद्धि व पराभव के प्रमाण रूप में इनका एक महत्वपूर्ण स्थान है ।

भारतवर्ष में जन्म और मृत्यु रजिस्ट्री विधेयक (१८८६) के अनुसार इन आंकड़ों को गाँवों में मुखिया और शहरों में म्युनिसिपैलटियाँ एकत्रित करती हैं। इन समंकों को एकत्र करने की प्रणाली प्रत्येक प्रान्त में कुछ विभिन्न है और सभी प्रांतों की समन्वय की गई सामग्री भारतवर्ष के सांख्यिकीय संक्षेप (Statistical Abstract) में छापी जाती हैं। सन् १९५१ की जनगणना रिपोर्ट के भाग १ के अनुसार आजकल सरकार ने ऐसा प्रबन्ध किया है जिससे जन्म या मृत्यु सम्बन्धी समंक और तत्संबन्धी सूचनाएँ जहाँ पर भी घटना हो वहीं लिख ली जाएँ। प्रत्येक राज्य अपने अपने आंकड़ों के प्रकाशन के अतिरिक्त सामग्री का एक संक्षिप्त वृत्त केन्द्रीय सरकार को भेजता है जो केन्द्रीय सरकार द्वारा प्रकाशित किया जाता है। अभी तक जन्म-मृत्यु सम्बन्धी समंक डायरेक्टर जनरल ऑफ हेल्थ सर्विसेज की वार्षिक रिपोर्टों में छापे जाते थे परन्तु अब यह कार्य गृह मंत्रणालय के अन्तर्गत जनगणना आयुक्त के आधीन कर दिया गया है।

भारतवर्ष के जन्म-मृत्यु आंकड़े समुचित सूचनाएँ प्रदान नहीं करते हैं और प्रत्येक जन्म व मृत्यु के सम्बन्ध में निम्नलिखित सूचनाएँ प्राप्त की जानी चाहिए।

जन्म	मृत्यु
१. नाम	१. नाम
२. लड़का/लड़की	२. आयु
३. दिनांक	३. विवाहित/अविवाहित
४. जन्म-स्थान	४. जाति और पेशा
५. पिता का नाम, पेशा, जाति	५. पिता या पति का नाम
६. माँ की आयु और बच्चे का क्रमांक	५. मृत्यु का कारण

यदि उपरोक्त सूचनाएँ प्राप्त हों तो कुल और शुष्क पुनरुत्पादन दरें (Gross & Net Reproduction Rates) बड़ी आसानी से मालूम करके उनके आधार पर जनसंख्या के घटने या बढ़ने की प्रवृत्ति का अनुमान लगाया जा सकता है।

भारत के जन्म-मृत्यु समंकों में निम्नलिखित दोष हैं—

१. गाँव के मुखिया की ढिलाई, सूचना देने वालों की निरक्षरता और जनसाधारण की इन समंकों की ओर वृत्ति के कारण सूचनाएं बहुत देर में प्राप्त होती हैं।

२. बहुत से व्यक्ति अपनी आयु पूरे पूरे वर्षों में बतलाते हैं और इस कारण उनके मरने पर भी ठीक आयु नहीं ज्ञात हो पाती।

३. ये समंक भारत के सभी भागों के लिए न होकर केवल ३/४ भाग के लिए ही एकत्रित किये जाते हैं।

४. भारतवर्ष के विभिन्न राज्यों में समंक एकत्रित करने की रीतियों में विभिन्नताएँ पाई जाती हैं।

राष्ट्रीय आय (National Income)

किसी देश की राष्ट्रीय आय का अर्थ उन सम्पूर्ण माल और सेवाओं के मूल्य से है जिनका एक वर्ष में उत्पादन या उपभोग किया जाता है। सन् १९३४ की बाउले राबर्टसन कमेटी के अनुसार, "राष्ट्रीय आय किसी भी एक देश के निवासियों को एक वर्ष में प्राप्त होने वाली सेवाओं और माल का एक आर्थिक माप है जिसमें उनकी आय शामिल है और हानियाँ नहीं"।

बावले राबर्टसन कमेटी ने राष्ट्रीय आय को नापने के निम्नलिखित दो ढंग बतलाए—(अ) उत्पादन-गणना रीति (Census of Products Method) और (ब) आय-गणना रीति (Census of Incomes Method)।

उत्पादन-गणना रीति के अनुसार राष्ट्रीय आय जानने के लिए निम्न-लिखित परिगणन क्रम प्रयोग किए जाते हैं—

(१) उत्पादन के विभिन्न विभागों से होने वाली कुल उत्पादित वस्तुओं और सेवाओं का मूल्य मालूम कीजिए और ऐसा करने में ये ध्यान रहे कि कोई भी एक ही मूल्य दो बार न गिन लिया जाए।

(२) उपरोक्त मूल्य में परिवहन के साधनों और अभिकर्त्ताओं के द्वारा आन्तरिक उत्पादन में बढ़ाई गई उपयोगिता जोड़ दीजिए।

(३) आन्तरिक उत्पादन के ऊपर लिए जाने वाली ड्यूटियाँ, व्यक्तिगत सेवाओं का मूल्य, और मकानों के किराये के बराबर मूल्य उपरोक्त योग में जोड़ दीजिए।

(४) उपरोक्त योग में भारतीयों के जो विनियोग (Investments) बाहरी देशों में हैं उनके लाभ को जोड़ दीजिए और हानियों का घटा दीजिए।

(५) विदेशियों के भारतीय विनियोग के लाभ को घटा दीजिए और हानि को जोड़ दीजिए।

(६) उपरोक्त योग में आयात (C. I. F.) के मूल्य को जोड़ दीजिए और निर्यात (F. O. B.) के मूल्य को घटा दीजिए। ऐसा करते समय ये ध्यान रहे कि आयात और निर्यात में सोना चाँदी का भी आयात निर्यात सम्मिलित हैं।

आय-गणना रीति के अनुसार किसी भी देश के निवासियों के एक वर्ष की सम्पूर्ण आय का महायोग निकाला जाता है। एक सफल आय-गणना करने के लिए निम्नलिखित सावधानियों का ध्यान रखना चाहिए।

(१) किसी भी व्यक्ति की आय में प्रत्येक प्रकार की आय, चाहे वह वस्तुओं में हो, जोड़नी चाहिए और यदि किसी उत्पादक ने स्वयं अपने द्वारा उत्पादित वस्तु अपने प्रयोग में ली हो तो उसे भी उत्पादन-स्थान के विक्रय मूल्य के अनुसार इसकी आय माननी चाहिए। इसी प्रकार प्रत्येक मकान मालिक के द्वारा इस्तेमाल किए गए मकान का भी वार्षिक किराया उसकी आय में जोड़ देना चाहिए।

(२) उपरोक्त योग में से सभी प्रकार के ब्याज इत्यादि घटा देना चाहिए।

(३) प्रत्येक व्यक्ति की आय-करों को देने के पूर्व ही लिखना चाहिए। इससे कंपनियों के अविभाजित लाभ और सरकारी व्यवसायों के लाभ भी जोड़ देने चाहिए। इसमें से सरकारी बांडों का ब्याज और सरकारी नौकरों की पेंशनों को घटा देना चाहिए।

(४) उपरोक्त रीति से प्राप्त योग में कस्टम इत्यादि, स्थानीय-कर और स्टाम्प ड्यूटी इत्यादि जोड़ देना चाहिए।

इंगलैण्ड में उपरोक्त रीतियों से राष्ट्रीय आय का अनुमान लगाया जाता है। भारतवर्ष में उत्पादन-गणना रीति को आय-गणना रीति की अपेक्षा अधिक महत्व दिया गया है क्योंकि आय-सम्बन्धी आँकड़ों का सदा ही अभाव रहा है।

भारत की राष्ट्रीय आय के अनुमान लगाने के अनेकों प्रयत्न किए जा चुके हैं। सर्व प्रथम १८७६ इस्वी में दादाभाई नौरोजी ने बृटिश भारत की सन् १८६८ की राष्ट्रीय आय का अनुमान २०) प्रति व्यक्ति प्रति वर्ष लगाया था। उस समय से अब तक विभिन्न सरकारी और गैर सरकारी अनुमान लगाए गए। प्रायः दोनों ही प्रकार के अनुमान पक्षपात पूर्ण थे क्योंकि यदि सरकारी अनुमान भारत की राष्ट्रीय आय को बढ़ाकर बताते रहे हैं तो गैर सरकारी अनुमानों ने भारत को एक अत्यन्त गरीब देश बतलाने का प्रयत्न किया है। निम्नलिखित तालिका ऐसे कुछ अनुमानों के संबंध में सूचना देती है।

लेखक	अनुमान का वर्ष	प्रति व्यक्ति अनुमानित राष्ट्रीय आय
दादा भाई नौरोजी	१८६८	२०
लार्ड करजन	१८९७—९८	३०
विलियम डिग्बी	१८९९	१७·५
वाडिया और जोशी	१९१३—१४	४४·५
वकील मुरंजन	१९१०—१४	५८·५
फिंडले शिराज	१९२२	११६
वी.के.आर.वी·राव	१९२५—२९	७६
,, ,, ...	१९३१—३२	६५
,, ,, ...	१९४२—४३	११४
राष्ट्रीय आय कमेटी	१९४८—४९	२४६·९
,, ,, ...	१९४९—५०	२५३·९
,, ,, ...	१९५०—५१	२६५·२

उपरोक्त अनुमानों में निम्नलिखित प्रमुख दोष थे—(१) प्रमाप उत्पादन (Standard Yield) और फस्ल की स्थिति (Crop Condition) के अंक यथार्थ न थे क्योंकि उन्हें किसी फस्ल काटने के वैज्ञानिक प्रयोग पर आधारित नहीं किया गया था।

(२) अभी तक फस्ल के उत्पादन व्यय, जंगल, डेरी, मछली, गृह उद्योग, इत्यादि के समंक प्राप्त नहीं थे।

(३) प्रत्येक जोड़ में दोहरी प्रविष्टि रोकी न जा सकी और राष्ट्रीय आय का राष्ट्रीय कर्ज और कर इत्यादि मे सम्बन्ध ठीक प्रकार नहीं समझा गया था।

भारत सरकार ने अगस्त सन् १९४९ में श्री पी० सी० महिलानोबिस की अध्यक्षता में प्रो० डी० आर० गाडगिल और डा० वी० के० आर० वी राव की एक कमेटी नियुक्त की जिसके कि कार्य ये थे—(अ) राष्ट्रीय आय और सम्बद्ध अनुमानों पर एक रिपोर्ट तैयार करना (ब) आवश्यक समंक एकत्रित करने के निमित्त और प्राप्त आँकड़ों के सुधार के लिए सुझाव रखना (स) राष्ट्रीय आय से सम्बन्धित अनुसंधान को प्रोत्साहन देने के निमित्त सुझाव रखना। इस राष्ट्रीय आय कमेटी की पहली रिपोर्ट १५, अप्रैल, १९५१ और दूसरी रिपोर्ट १४, फरवरी १९५४ को प्रकाशित हुई।

उपरोक्त रिपोर्ट के रूप मे राष्ट्रीय आय की विशद रूप से अनुमान लगाने की दिशा में सरकार ने सर्वप्रथम कदम उठाया और उसमें काफी अंशों में सफल भी हुई। राष्ट्रीय आय कमेटी की पहली रिपोर्ट में सन् १९४८–४९ के लिए राष्ट्रीय आय के अनुमान के अतिरिक्त विभिन्न उद्‌गमों से आय, आय का पेशेवर विभाजन, उत्पादन प्रतिव्यक्ति जोकि कार्य में लगा हो, सरकार का आन्तरिक उत्पादन में भाग, और आय का उपभोक्ता के व्यय से सम्बन्ध दिया गया है। इसके अतिरिक्त इस रिपोर्ट ने सर्व प्रथम ये सम्मुख रखा कि किस प्रकार से राष्ट्रीय आय के लेखे रखे जा सकते हैं। राष्ट्रीय आय के लेखे को इस रिपोर्ट में अनेक चिन्हों की सहायता से समझाया गया है। राष्ट्र के आर्थिक जीवन को ५ विभागों में बांटा गया है—(१) आन्तरिक उत्पादन लेखा (२) व्यक्तिगत नियोजन लेखा (Private Appropriation Account) (३) सरकारी नियोजन लेखा (४) संघनित–लेखा (Consolidated Resting Account) और (५) अवशिष्ट विश्व लेखा (Rest of The World Account)।

राष्ट्रीय आय का अनुमान लगाना विशेष रूप से भारतवर्ष में अत्यन्त कठिन है और राष्ट्रीय आय कमेटी ने अपनी कठिनाइयों का अपनी पहली रिपोर्ट में विशद विवरण दिया है । इस रिपोर्ट के अनुसार भारतवर्ष में उपयुक्त समंकों की कमी के अतिरिक्त एक सर्वसाधारण और समान आधार का भी अभाव है जिसके द्वारा विभिन्न वस्तुएँ और सेवाओं के मूल्य रुपयों में आँके जा सकें । भारतवर्ष में उत्पादन का एक काफी बड़ा भाग बाजार में आता ही नहीं है जिसे या तो उत्पादक "वस्तु के लिए वस्तु" सिद्धान्त से बदल लेते हैं या स्वयं उपभोग कर लेते हैं । जैसा कि पहले बतलाया जा चुका है कि ऐसे वस्तुओं को जिन्हें स्वयं उपभोग कर लिया जाय व्यक्ति की आय समझ कर राष्ट्रीय आय में जोड़ा जाना चाहिए । भारत में यथार्थ समंकों का अभाव है और इस स्थिति के प्रमुख कारण हैं, योग्य प्रगणकों की कमी, जन-साधारण की निरक्षरता, उनकी अर्ध-स्तरीय आर्थिक क्रिया और उत्पादकों और उपभोक्ताओं के लेखे रखने की ढिलाई ।

उपरोक्त कारणों के द्वारा उत्पन्न परिस्थिति-विशेष में राष्ट्रीय आय कमेटी ने 'उत्पादन-गणना रीति' या 'आय-गणना रीति' में से किसी भी एक का ही प्रयोग नहीं किया और उन दोनों रीतियों के समन्वय से एक नई रीति अपनाई जिसे तात्विक-व्यय रीति (Factor Cost Method) कहते हैं । इस रीति के अनुसार आर्थिक क्रिया में लगे हुए कुल व्यक्तिओं का पेशेवर अनुमान लगाया गया । आर्थिक जीवन के अधिक से अधिक पहलुओं में उत्पादन-गणना नियम के प्रयोग से कुल वस्तुओं का मूल्य मालूम किया गया और अवशिष्ट पहलुओं में आय-गणना रीति के द्वारा विभिन्न कार्यों में लगे हुए व्यक्तियों की कुल आय ज्ञात की गई । उत्पादन-गणना और आय-गणना द्वारा प्राप्त समंकों के योग में बाहरी देशों से प्राप्त या प्राप्य आय का समायोजन (Adjustment) करने के बाद प्राप्त संख्या ही राष्ट्रीय आय हुई । इस प्रकार राष्ट्रीय आय कमेटी द्वारा प्राप्त किए गए अनुमान वास्तव में उत्पादन में विभिन्न साधनों की आय का कुल योग है जिसमें कि अन्य देशीय आय का समायोजन किया जा चुका हो ।

राष्ट्रीय आय कमेटी की दूसरी और अंतिम रिपोर्ट में १९४८-४९, १९४९-५० और १९५०-५१ के लिए अनुमान दिये गए हैं जोकि अगले पृष्ठ पर दिये हैं:—

अवधि	अनुमान (करोड़)	प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय आय (रु०)
१९४८–४९	८६५०	२४६·९
१९४९–५०	९०१०	२५३·९
१९५०–५१	९५३०	२६५·२

उपरोक्त तीन अवधियों के लिए राष्ट्रीय आय के अनुमान देने के अतिरिक्त दूसरी रिपोर्ट में राष्ट्रीय आय कमेटी ने प्राप्य सांख्यिकीय सामग्री की कमियाँ बतलाते हुए उन्हें सुधारने के लिए सुझाव पेश किए हैं। इसके अतिरिक्त राष्ट्रीय आय के अनुमानों की यथार्थता बढ़ाने और तत्संबन्धी अनुसंधान कार्य करने की दिशा में भी महत्वपूर्ण सुझाव इस रिपोर्ट में दिए गए हैं। इस रिपोर्ट में दो महत्वपूर्ण परिशिष्ट यथार्थ उत्पादन के अपकिरण और अनुमान के विभ्रम के सम्बन्ध में हैं जो राष्ट्रीय आय के वास्तविक अर्थ को समझाने में बहुत सहायक हैं।

राष्ट्रीय आय कमेटी के महत्वपूर्ण सुझावों में से कुछ निम्नलिखित हैं—

(१) कृषि क्षेत्र में सूचना-रहित क्षेत्रों में संसूचकों की नियुक्ति की जाना चाहिये और इस दिशा में प्रति वर्ष १/५ गाँवों में यह कार्य हो जाना चाहिए।

(२) भृत्ति और नौकरी के समंकों के लिए श्रम ब्यूरो को ही उत्तरदायी ठहराना चाहिए और ऐसे समंकों के संकलन के क्षेत्र का विस्तार करना चाहिए।

(३) विक्रय-कर सम्बन्धी आँकड़ों की सूचना के लिए केन्द्रीय सरकार को प्रयत्नशील होना चाहिए।

(४) राष्ट्रीय-आय-यूनिट को चाहिए कि इस कमेटी के सुझावों के अनुसार सरकार के कार्यों पर प्रकाश डालते हुए प्रतिवर्ष एक रिपोर्ट प्रकाशित करे।

(५) अनुसन्धानशालाओं और विद्यालयों को चाहिए कि वे कृषि, पशुपालन, व्यापार, यातायात और छोटे व्यवसायों के सम्बन्ध में भी खोज कार्य करें।

राष्ट्रीय आय कमेटी की रिपोर्टों के विरुद्ध निम्नलिखित आरोप हैं— (१) ये रिपोर्ट बहुत छोटी है और राष्ट्र-जीवन की वृत्तियों, आर्थिक कारणों के परिचालन, आर्थिक वैभव और शक्ति के क्षेत्रों के परिवर्तनों के सम्बन्ध में यथोचित प्रकाश नहीं डालती हैं। (२) इनके द्वारा जनसंख्या के तात्कालिक तुलनात्मक ऐश्वर्य, भूतपूर्व आर्थिक विकास के कारण और भावी आर्थिक शक्ति के स्त्रोत, देहाती और शहरी क्षेत्रों में आय के स्थानान्तरण और पूंजी निर्माण की प्रवृतियों का कोई अनुमान नहीं मिलता है। कुछ भी हो सरकार का प्रयत्न अपने प्रकार का अनोखा रहा है और आशा की जाती है कि राष्ट्रीय आय सम्बन्धी आंकड़ों में सुधार होता जायगा क्योंकि उन पर राष्ट्र का आर्थिक-नियोजन आधारित है।

कृषि-समंक (Agricultural Statistics)

भारतवर्ष के कृषि-समंक प्रायः अपूर्ण, भ्रामक और झूठे रहे हैं क्योंकि भारत की भूमि व्यवस्था विभिन्न प्रान्तो में विभिन्न थी और कृषि-समंकों का संकलन पटवारियों पर निर्भर था जिनके कार्य पर अंकुश नहीं होता था। सन् १९४९ की कांग्रेस कृषि सुधार कमेटी ने ये स्पष्ट रूप से कहा कि यद्यपि माल व्यवस्था के लिए समंक उपयोगी हैं उनका प्रयोग कृषि नियोजन में नहीं किया जा सकता है जोकि देश के लिए परमावश्यक है।

सन् १९४९ में भारत सरकार ने एक कृषि समंक समन्वय कमेटी श्री डब्लू आर नाथू की अध्यक्षता में नियुक्त की जिसने उस समय की कृषि सम्बन्धी सूचनाओं की कटु समीक्षा की और प्राप्त कृषि समंकों के निम्नलिखित दोषों पर विचार किया—(१) भारत के ७ करोड़ ८० लाख एकड़ भूमि के सम्बन्ध में समंक अप्राप्य हैं। (२) उत्पादन के अनुमान लगाने और कृषि समंक एकत्रित करने के लिए बनाए गए भूमि संभागों में विभिन्नतायें पाई जाती हैं। (३) कई राज्यों में यद्यपि उपयोगी समंकों का संकलन किया जाता है उनका संघनन (Consolidation) तहसील के आगे नहीं हो पाता है और बिना समुचित सारिणीकरण और संघनन के उनका महत्व नष्ट हो जाता हैं। (४) स्थायी बन्दोबस्त वाले क्षेत्रों के कृषि-समंक प्रायः भ्रमपूर्ण हैं क्योंकि पटवारियों के ऊपर कोई अंकुश नहीं पाया जाता है प्राथमिक संसूचकों की कार्य अवहेलना का प्रमुख कारण उनके ऊपर अत्यधिक कार्य-भार है जिसे कम किया जाना चाहिए। (५) कानूनगो और

तहसीलदारों को अनेक शासन संबन्धी कार्य रहते हैं और वे पटवारियों की सूचनाओं की यथार्थता की कभी जाँच नहीं कर पाते हैं । (६) प्रायः सभी राज्यों में कृषि और सप्लाई विभाग अलग अलग कृषि-समंक एकत्र करते हैं और उनमें कोई समन्वय नहीं होता है । (७) कृषि-समंकों का प्रकाशन अन्य सांख्यिकीय सूचनाओं की भाँति विलंबित होता है ।

कांग्रेस की कृषि-सुधार-कमेटी ने राष्ट्रीय-नियोजन में कृषि-समंकों का महत्व समझाते हुए निम्नलिखित भेद बतलाए जिनके बारे में कोई भी सूचनाएँ प्राप्य नहीं हैं और जिनके बिना कृषि-नीति निर्धारित नहीं की जा सकती है— (१) उत्पादन-व्यय और कृषि सम्बन्धी आय के स्तर (२) विभिन्न राज्यों में कृषक जनसंख्या की बेकारी (३) कृषक जनता के कर्ज और मूल्य के बढ़ने का कृषि जीवन के विभिन्न पहलुओं पर प्रभाव (४) विभिन्न कृषक वर्गों की धन संबन्धी आवश्यकताएं और उद्गम (५) कृषि जनता की बचत और विनियोग की सीमा (६) कृषक भृत्ति (७) कृषक करों का दबाव (८) किराये पर की जाने वाली कृषि का क्षेत्र ।

आज कल कृषि-समंकों के संकलन, प्रमाप और प्रकाशन सम्बन्धी कार्य अर्थ और अंक कार्यालय, खाद्य और कृषि मंत्रणालय, करता है जिसका निर्माण १९४८ में इसी मंत्रणालय के अर्थ और अंक विभाग के स्थान पर किया गया था । सामग्री संग्रहण रीतियों के सम्बन्ध में खोज कार्य (I. C. A. R.) का सांख्यिकीय विभाग करता है और इन दोनों ही विभागों में पूर्ण सहकारिता विद्यमान है । भारतवर्ष के कृषि-समंकों की कुछ वर्षों में जो उन्नति हो सकी है यही उसका कारण है कि ये दो विभाग अपने अपने क्षेत्र में माहिर हैं ।

भारतवर्ष के कृषि-समंकों को दो विभागों में बाँटा जा सकता है— (अ) आधार–भूत समंक जैसे खेतों की आकृति, संख्या और प्रमुख लक्षण, माल व्यवस्था, खेतों का दूर दूर होना, भूमि का उपयोग, कृषक जनसंख्या, खेती के औजार या मशीनें और (ब) चालू कृषि समंक, जल, प्रति एकड़ पैदावार, पशु समंक और दूध, घी आदि पैदावार का मूल्य और भृत्ति आधार-भूत कृषि-समंक साधारणतः आवधिक संगणनाओं (Periodic Censuses) द्वारा संकलित किये जाते हैं और चालू कृषि समंक जिनकी आवश्यकता कृषि सम्बन्धी नीति निर्धारित करने में पड़ती है उन्हें वार्षिक या और जल्दी किए जाने वाले न्यादर्श अनुसंधानों (Sample Surveys) की सहायता से एकत्रित किया जाता है ।

कृषि-समंकों की प्राप्यता के अनुसार भारतवर्ष का कुल क्षेत्र ३ भागों में बाँटा जा सकता है—(अ) जहाँ सूचना देने के निमित्त संसूचक-श्रंखला है। इस प्रकार का क्षेत्र आज से एक दशक पहले ३ करोड़ ७७ लाख एकड़ था जिसे अब नापा जा चुका है। प्रत्येक खेत को नापकर उसकी नाप, नक्शा और नम्बर गाँव के रजिस्टर में लिख लिया गया है। इस कार्य के लिए प्रत्येक गाँव या गाँव के समूहों में भूमि व्यवस्था (Land Records Organisation) का एक अफसर जिसे पटवारी (अब लेखपाल) कहते हैं रहता है और उसका कार्य है कि वह प्रति वर्ष भूमि विषयक समंक रक्खें। इस प्रकार उपरोक्त क्षेत्र में प्रयुक्त की जाने वाली रीति को वार्षिक संगणना रीति कहा जा सकता है (ब) जहाँ सूचना देने के निमित्त संसूचक श्रंखला नहीं है यद्यपि भूमि नापी जा चुकी है। ऐसे क्षेत्र का क्षेत्रफल ७ करोड़ ८ लाख एकड़ था। इस क्षेत्र की पैदावार के समंक (S. D. O's) की रिपोर्टों पर आधारित होने के कारण केवल अनुमानित हैं और उनके अनुमानित होने के कारण विभ्रम की आशंका पाई जाती है, (स) जहाँ संसूचक शृंखला का सर्वथा अभाव है और भूमि की नाप भी नहीं की जा सकी है। ऐसे क्षेत्र का क्षेत्र फल ३ करोड़ ५६ लाख था। वास्तव में (अ) और (ब) के अन्तर्गत आने वाला क्षेत्र ही कृषि योग्य है।

उपरोक्त वर्णित (अ) वर्ग में आने वाले क्षेत्र की केवल एक कठिनाई ये थी कि पटवारियों के कार्य के ऊपर कोई अंकुश न था जिससे उनके द्वारा संग्रहीत सामग्री की सत्यता की जाँच हो सके। अब ये कमी दूर कर दी गई है और इससे एक सबसे बड़ा लाभ यह हुआ है कि अब बड़े क्षेत्रों के लिए उपयुक्त न्यादर्श भी मिलने लगे हैं। अब संग्रहीत सामग्री की जाँच यदा कदा न्यादर्श लेकर की जाती है और (अ) के अन्तर्गत क्षेत्र ४ करोड़ ९० लाख एकड़ हो गया है।

(ब) वर्ग की आवश्यकता थी कि इस क्षेत्र में संसूचक शृंखला निर्माण की जाए। इस प्रस्ताव को कई राज्यों ने मँहगा जानकर ठुकरा दिया और कई राज्यों (उदाहरणार्थ उड़ीसा और पश्चिमी बंगाल) ने अपने कृषि-समंक वार्षिक संगणना के आधार पर संकलित न करके निदर्शन प्रणाली द्वारा एकत्र करने शुरू किये।

(स) क्षेत्र की कठिनाई सबसे महत्व की है क्योंकि उसमें न तो भूमि के नक्शे ही हैं और न संसूचक श्रंखला ही। अंक और अर्थ कार्यालय प्रयत्न-

शील है कि विभिन्न राज्य अपने अपने क्षेत्रों में भूमि की नाप करवायें परन्तु इस कार्य में समय और धन की मात्रा बहुत अधिक चाहिए। इस प्रकार के क्षेत्र में से भी करीब २ करोड़ ५२ लाख भूमि संसूचकों के आधार पर कृषि-समंक एकत्र करने लगी है।

कृषि-समंकों के सुधार के लिए श्री डब्लू आर नाथू की अध्यक्षता में कृषि-समंक समन्वय कमेटी १९४९ ने निम्नलिखित सुझाव रक्खे थे—

(१) प्रत्येक क्षेत्र की भूमि की पूर्ण संगणना आवश्यक है जिससे यथार्थ कृषि समंक एकत्र किये जा सकें। निदर्शन प्रणाली संगणना की पूरक हो सकती है पर उसे हटा नहीं सकती।

(२) जिन क्षेत्रों में भूमि का नाप नहीं किया गया है उनमें शीघ्राति-शीघ्र नाप किया जाना चाहिए और तब तक के लिए संसूचक नियुक्ति कर देने चाहिए।

(३) पैदावार के समंकों को जो वार्षिक एकत्र किये जाते हैं, संकलित करने के लिए खेतों को दैव प्रवरण के अनुसार छांटना चाहिए और फस्ल काटने के प्रयोगों के आधार पर पैदावार के समंक संग्रहीत किए जाने चाहिए।

(४) इनके अतिरिक्त समंकों का संकलन खेतिहरों के खेतों पर किया जाना चाहिए।

(५) उपरोक्त सुझावों के अतिरिक्त नाथू कमेटी ने प्रयोग में लिए जाने वाले फार्मों और विभिन्न स्तरों पर आवश्यक व्यवस्था के सम्बन्ध में अपने सुझाव रखे जोकि बहुत अच्छे हैं।

सितम्बर २५, १९५३ को केन्द्रीय मंत्री श्री पंजाबराव देशमुख की अध्यक्षता में राज्यों के कृषि मंत्रियों की एक कांफ्रेस में निम्नलिखित सुझाव रखे गये जो भारतवर्ष के कृषि-समंक संकलन व्यवस्था के सुधार की दिशा में महत्वपूर्ण हैं:—

(१) पटवारियों के कार्य क्षेत्र को कम कर दिया जाए और प्रत्येक जिलाधीश की सहायता के लिए एक सांख्यिक नियुक्ति किया जाए जो समंकों के संकलन, सारणीयन और जाँच में उसकी मदद करें।

(२) प्रत्येक राज्य के द्वारा नियुक्त संसूचक शिक्षित होने चाहिए और उनके शिक्षण का प्रबन्ध केन्द्रीय सरकार द्वारा किया जाना चाहिए। संसूचकों के ऊपर अंकुश का पूर्ण प्रबन्ध होना चाहिए ।

(३) जिन राज्यों ने अपने सरकारी पूर्वानुमान (Official Forecasts) दैव प्रवरण पर आधारित अनुसंधानों पर न किए हो उन्हें ऐसा १९५५-५६ तक अवश्य ही कर लेना चाहिए ।

(४) राज्यों की सरकारों को चाहिए कि वे एक बिशेष कमेटी द्वारा कृषि समंकों के संकलन के यंत्र की क्रिया का अध्ययन करें और भविष्य के लिए एक निश्चित नीति निर्धारण करें ।

फस्लों के अनुमान लगाने की प्राचीन रीति "आनावारी रीति" कहलाती थी जिसके अनुसार किसी एक प्रमाप-पैदावार (Normal Yield) की तुलना में फस्ल को आनों के हिसाब से लिखा जाता था। प्रमाप-पैदावार कृषि के डायरेक्टर पंचवर्षीय फसल काटने के प्रयोगों के आधार पर किया करते थे। परन्तु यह कार्य प्रायः पटवारी की रिपोर्ट पर किया जाता था। ये पद्धति दोषपूर्ण थी क्योंकि प्रमाप-पैदावार की कोई निश्चित परिभाषा नहीं थी, फसल काटने के प्रयोगों के लिए छांटे गये गाँव दैव-प्रवरण के आधार नहीं छांटे जाते थे इस कारण उनका चुनाव पक्षपातपूर्ण होता था, और आनावारी अनुमान खेत में खड़ी फसल को देखकर लगाया जाता था जोकि अलग अलग व्यक्तिओं के लिए अलग अलग महत्व रखता था ।

उपरोक्त दोषपूर्ण प्रणाली में सुधार करने की दृष्टि से भारत सरकार ने सन् १९४३-४४ में (I. C. A. R.) को आदेश दिया कि वह कोई निदर्शन प्रणाली पर आधारित रीति का सुझाव रखे। डा० सुखात्मे (जो उस समय I. C. A. R. के सांख्यिकीय सलाहकार थे और आज F. A. O. के सांख्यिकीय विभाग के प्रमुख हैं) ने न्यादर्श अनुसंधान की पद्धति को कृषि अनुसंधान के उपयुक्त सिद्ध किया और इस रीति का सफल प्रयोग पंजाब, उत्तर प्रदेश और मध्य प्रदेश में किया। इस रीति के अनुसार प्रत्येक जिले में दैव-प्रवरण के द्वारा कुछ गाँव चुन लिए जाते हैं और फिर उन गाँवों में से कुछ खेत दैव-प्रवरण द्वारा चुने जाते हैं। छाँटे हुए खेतों में से किसी एक में दैव-प्रवरण के अनुसार १/८ एकड़ के बराबर भूमि के टुकड़े पर निशान

लगा लिया जाता है। इसी १/८ एकड़ भूमि पर फसल काटने का प्रयोग किया जाता है और इसकी उत्पत्ति के आधार पर ही सारे जिले की औसत उत्पत्ति मालूम हो जाती है। ये रीति इसलिए उपयोगी है क्योंकि ये सम्भाविक प्रवरण पर आधारित है और कहीं भी पक्षपात का धब्बा नहीं पाया जाता और इस रीति के द्वारा औसत उत्पादन के अतिरिक्त विभ्रम भी मालूम किया जा सकता है।

भारतवर्ष की केन्द्रीय और राज्यों की सरकारों ने दैव-प्रवरण प्रणाली का महत्व समझा और पिछले कुछ वर्षों से यह प्रयत्न किया जा रहा है कि यही प्रणाली सब दूर अपनाई जाए।

भारत सरकार ने फसल काटने के प्रयोगों की एक पंच-वर्षीय योजना बनाई है जिसे सभी राज्यों में लागू किया जा रहा है। दैव-प्रवरण प्रणाली को खाद्यान्नों के अतिरिक्त अन्य उपजों के लिए भी लागू करने पर विचार किया जा रहा है।

सन् १९४९, नवम्बर में संयुक्त राष्ट्र संघ और खाद्य और कृषि संगठन (F. A. O.) ने भारतवर्ष में एक अन्तर्राष्ट्रीय शिक्षण शिविर खोला जिसका प्रमुख उद्देश्य भारतवर्ष को और दक्षिण पूर्वी एशिया को उनके भूमि संगणनाओं (Land Censuses) में सहायता देना था। इस शिविर को श्री महलानोबिस और श्री सुखात्मे जैसे विद्वान् सांख्यिकों की सेवायें प्राप्त थी। यद्यपि प्रयत्न किये गए पर भारत में भूमि-संगणना अभी तक न की जा सकी। अर्थ और अंक कार्यालय के प्रयत्नों और राज्यों के सहयोग से समान परिभाषाओं वाले शब्दों की एक सूची बनाई जा चुकी है। नाथू कमेटी की रिपोर्ट के अतिरिक्त (I.C.A.R.) ने कृषि–संगणना करने की एक योजना बनाई और उसका सफल प्रयोग दिल्ली राज्य में किया गया जोकि भारतीय कृषि-संगणना के लिए एक आधार शिला बन गई है। अनेकों प्रयत्नों के पश्चात् धन का अभाव होते हुए भी भारत सकार ने पहली कृषि-संगणना (यद्यपि यह निदर्शन प्रणाली पर आधारित है) करने का पूर्ण निश्चय कर लिया है और यदि इस संगणना को जनगणना के समान आवधिक कर दिया गया तो कृषि-समंकों के लिए भारत का मुकाबिला अन्य बड़े देशों से किया जा सकेगा। भारत सरकार ने एक सरक्यूलर प्रत्येक राज्य के पास

भेजा है जिसमें उनसे कृषि–संगणना के सुझावों के प्रति उनकी समीक्षा माँगी गई है जोकि केन्द्रीय सरकार के पास मार्च १९५४ के अन्त तक पहुँच गई होगी। आशा की जाती है कि प्रथम कृषि–संगणना शीघ्र ही सामने आएगी।

पशु-पालन समंक

भारतवर्ष में पशु–सम्बन्धी समंक एक पंच-वर्षीय संगणना द्वारा संग्रहीत किए जाते हैं। ये पशुगणना भारतवर्ष के भौगोलिक क्षेत्र का प्राय: ९०% क्षेत्र घेर लेती है। किसी किसी राज्य (उदाहरणार्थ, मध्य प्रान्त,) में वार्षिक समंक भी प्राप्य हैं। इस गणना का कार्य प्राय: पटवारी घर घर घूम कर करता है। पशुगणना के समंक प्राय: निम्न वर्गों के अनुसार होते हैं:—

(१) ब्याहे हुए पशु	(५) उम्र के अनुसार
(२) काम के पशु	(६) मुर्गियाँ
(३) दूध देने वाले पशु	(७) गधे, खच्चर, घोड़े,
(४) नर या मादा	(८) बकरी, भेंड़

भारतवर्ष के पशु-पालन सम्बन्धी समंक जो कुछ भी पाये जाते हैं उन्हें यथार्थ नहीं कहा जा सकता है क्योंकि प्राथमिक संगणना करते समय पटवारी इस ओर विशेष ध्यान नहीं देते रहे हैं। पिछले कुछ वर्षों में इस ओर ध्यान दिया गया है और कुछ राज्यों में दैव-प्रवरण प्रणाली के अनुसार कुछ न्यादर्श खोजें की गई हैं। यह प्रयत्न किया जा रहा है कि क्या यह सम्भव है कि न्यादर्श प्रणाली के अनुसार पशु-पालन सम्बन्धी समंक वार्षिक प्राप्त किए जा सकें। इस सम्बन्ध में एक पंच-वर्षीय समन्वय योजना चालू है।

अमृत बाजार पत्रिका के एक हाल के लेख में श्री सुखात्मे (प्रमुख सांख्यिकी विभाग F.A.O.) ने अन्य देशों की पशु-पालन समंक एकत्र करने की रीतियों पर प्रकाश डाला है जिसका संक्षिप्त विवरण एक तालिका के रूप में नीचे दिया जा रहा है:—

देश	रीति	विशेष
१. इंगलैंड	संगणना	डाक से भेजी गई प्रश्नावलियों की सहायता से। इसके अतिरिक्त वर्ष में तीन न्यादर्श गणनाएँ ली जाती हैं ।
२. जर्मनी	संगणना	भेड़, गाय--भैंस और सुअर छमाही। हाल में सुअरों की गणना तिमाही की गई हैं।
३. मिश्र	संगणना	कर-व्यवस्था के फलस्वरूप खेतों पर प्राप्त होते हैं। समंकों की यथार्थता संदिग्ध है ।
४. अमेरिका व कनाडा	न्यादर्श-गणना	ऐच्छिक। डाक-प्रश्नावली द्वारा। न्यादर्श दैव-प्रवरण पर आधारित नहीं है और अभिनति के लिए आवधिक संगणना व बाजार की सूचनाएँ ली जाती हैं ।
५. लैटिन अमरीका	म्युनिसिपल सांख्यिकीय प्रतिनिधि द्वारा	अपने विचारानुसार होने के कारण अभिनति पूर्ण हैं।
६. अरजेन्टाइना	विभाग-निरीक्षकों द्वारा	५९ विभागों के निरीक्षक अपने अपने विभागों से सम्बन्धित क्षेत्रों के संसूचकों से समंक एकत्रित करते हैं ये अभिनति पूर्ण हैं।
७. जापान	संगणना	पंच-वर्षीय संगणना और गणनाओं के मध्यवर्ती वर्षों में न्यादर्श गणना द्वारा ।

भारतवर्ष में पंच–वर्षीय संगणना को अधिक यथार्थ बनाने के लिए जापान के ढंग के अनुसार मध्यवर्ती वर्षों में न्यादर्श प्रणाली अपनायी जा सकती है। भारतवर्ष के पशु–सम्बन्धी समंकों में एक सबसे बड़ी कमी ये है कि पशुओं द्वारा प्रदत्त उत्पादनों का कोई भी विवरण नहीं प्राप्त है। ये कमी शीघ्र ही दूर की जाना चाहिए।

जंगलों, खानों और आबपाशी के समङ्क

जंगलों के समंक इन्सपेक्टर जनरल ऑफ फारेस्ट के द्वारा (Indian Forest Statistics) नामक पत्रिका में छापे जाते हैं। इस पत्रिका में जंगलों का क्षेत्र, लकड़ी का परिमाण, लकड़ी का उत्पादन, अन्य जंगल के उत्पादन, जंगली व्यवसायों में नौकरों की संख्या, जंगल विभाग की आय और व्यय इत्यादि सूचनाएँ दी होती हैं। भारतवर्ष के सांख्यिक संक्षेप (Statistical Abstract) में भी जंगलों के क्षेत्र, भूमि और जंगली उत्पादन के गुण और मात्रा इत्यादि समंक दिए रहते हैं। इनके अतिरिक्त एक पंच-वर्षीय प्रकाशन निकलता है जिसका नाम (Review of Forest Administration) है। इस प्रकाशन में, क्षेत्र, आय और व्यय और जंगल सम्बन्धी अनुसंधान की प्रगति के सम्बन्ध में वृत्तान्त पाया जाता है। ये समंक प्रायः यथार्थ होते हैं।

खानों के सम्बन्ध में सूचनाएँ और समंक चीफ इन्सपेक्टर ऑफ माइन्स द्वारा प्रकाशित रिपोर्ट में पाई जाती है। इस प्रकाशन का नाम (Review of Mineral Production of India) है और इसमें उत्पादन के परिमाण और गुण-सम्बन्धी समंकों के अतिरिक्त कार्य में लगे हुए व्यक्तियों की औसत संख्या, आयात और निर्यात, भारत में महत्वपूर्ण खनिज पदार्थों का उपभोग और एक परिशिष्ट में सारणी दी होती है जिसमें विभिन्न प्रकार की खानों में औसत प्रतिदिन की संख्या दी होती है। ये समंक भी काफी यथार्थ हैं।

आबपाशी के समंक (अ) भारत के कृषि समंक (Agricultural statistics of India) Vol. I & II (ब) भारत का सांख्यिक संक्षेप (Statistical Abstract of India) (स) भारत की सिंचाई का अवलोकन

(Review of Irrigation in India) और (द) त्रिवर्षीय सिंचाई अवलोकन (Triennial Review of Irrigation) में छापे जाते हैं। इन प्रकाशनों में ऐसे सभी क्षेत्रों के सम्बन्ध में सूचनाए रहती हैं जिनकी सिंचाई सरकारी नहरों, तालाबों और कुओं से होती है और पैदावार वाले क्षेत्रों का विवरण भी दिया रहता है। इनके अतिरिक्त इन प्रकाशनों में सिंचाई का प्रभाव, सिंचाई के नीचे उत्पादक और अनुत्पादक क्षेत्र, कुल पूंजी, कुल आय, संचालन व्यय, प्रगति का अवलोकन, इत्यादि, के सम्बन्ध में भी ज्ञान प्राप्त हो सकता है।

भारत के कृषि समंक नामक ग्रन्थ के दोनों भागों में जो समंक पाये जाते हैं वे प्रायः भूमि व्यवस्था के लिए पटवारियों के द्वारा एकत्र सूचनाओं के आधार पर संकलित किए जाते हैं। सन् १९५०–५१ से भारत सरकार ने भूमि के उपयोग से सम्बन्धित समंक एकत्र करने के लिए निम्नलिखित वर्गीकरण स्वीकार किया है—(१) जंगल, (२) अकृषक कार्यों में लगी हुई भूमि, (३) ऊसर और बेकार जमीन, (४) चारागाह, (५) बाग और अन्य पेड़ों की भूमि (६) कृष्य पड़ित (Culturable Waste), (७) अन्य बंजर, (८) चालू बंजर, (९) कुल बोई हुई जमीन।

भारत सरकार प्रमुख फस्लों के लिए समंक 'भारत के प्रमुख फस्लों के क्षेत्र और उत्पादन के पूर्वानुमान' (Estimates of Area and Production of Principal Crops in India) नामक ग्रन्थ में छापती है जोकि अर्थ तथा अंक संचालक के कार्यालय से प्रकाशित होता है। इस प्रकाशन में बगीचे वाली फस्लों और कुछ अन्य फस्लों के समंकों के अतिरिक्त २३ फस्लों के पूर्वानुमान प्रकाशित किए जाते हैं जिन्हें निम्नलिखित ५ वर्गों में बाँटा गया है— (१) अनाज, (२) दाल, (३) तिलहन, (४) रेशे वाली फस्लें, और (५) मिश्रित।

ये पूर्वानुमान बुलेटिनों के रूप में और अखबारों व पत्रिकाओं में छापे जाते हैं। प्रायः एक फस्ल के तीन पूर्वानुमान छापे जाते हैं। पहले में कुछ बोये हुए क्षेत्र और उसकी प्रत्याशा, दूसरे में विलम्बित बुवाई, फसल की स्थिति और अपेक्षित परिमाण, और तीसरे में कुल बोया हुआ क्षेत्र और काटी हुई फसल के परिमाण सम्बन्धी समंक छापे जाते हैं।

औद्योगिक समंक (Industrial Statistics)

सन् १९३९ के पहले औद्योगिक समंकों को संगृहीत करना व्यक्तिगत व्यवसायों की इच्छा पर निर्भर रहता था और इस कारण भारत के औद्योगिक समंक नाममात्र को और भ्रमपूर्ण थे । औद्योगिक समंकों के संकलन का प्रश्न सन् १९३९ की औद्योगिक कान्फ्रेंस और सन् १९४१ की श्रम मंत्रियों की कान्फ्रेंस में उठाया गया और इसके फलस्वरूप सन् १९४२ में औद्योगिक समंक विधेयक (Industrial Statistics Act) पास किया गया । इस विधेयक के अन्तर्गत निम्नलिखित बातों से सम्बन्धित समंक एकत्रित किए जा सकते हैं—(१) वस्तुओं के मूल्य, (२) श्रमिकों की संख्या, (३) गृह, पानी, सफाई इत्यादि जीवन निर्वाह की दशाएँ, (४) कर्ज, (५) किराया, (६) भृत्ति और आय, (७) श्रम संबंधी प्राविडेन्ट व अन्य फन्ड, (८) श्रम की सुविधाएं, (९) कार्य के घन्टे, (१०) नौकरी और बेकारी, (११) औद्योगिक और श्रमिक झगड़े । इस विधेयक के अनुसार प्रान्तीय सरकारों को ये अधिकार हैं कि वे एक सांख्यिकीय अधिकारी नियुक्त करे जो उपरोक्त समंकों को एकत्रित करे और यदि कोई भी व्यक्ति उपरोक्त विषयों पर सूचनाएँ देने से इन्कार करे तो उसे सजा दी जा सकती है । इसके साथ ही साथ इस विधेयक में एकत्रित किए गए समंकों के लिए इस बात का भी विश्वास दिलाया गया है कि संकलन से सम्बन्धित कोई व्यक्ति उनको इधर उधर बतला देगा तो उसे सजा दी जा सकती है ।

सन् १९५३ में भारत सरकार ने उपरोक्त विधेयक का क्षेत्र बढ़ाने के लिए समंक संकलन विधेयक (Collection of Statistics Act) पास किया जिसके अर्न्तगत उद्योगों के अतिरिक्त व्यापार सम्बन्धी तथ्यों का संकलन भी किया जा सकेगा । इस विधेयक के अन्तर्गत निम्नलिखित विषयों पर सूचनाएँ संकलित की जा सकेंगी — (अ) किसी भी वर्ग की उद्योग के संबंध में कोई भी सूचना, (ब) किसी व्यवसायिक या व्यापारिक फर्म के सम्बन्ध में कोई सूचना प्रमुखतः फैक्टरी संबंधित, (स) श्रमिक स्थिति और श्रम सुधार के सम्बन्ध में कोई सूचना, जैसे—(१) वस्तुओं के मूल्य, (२) श्रम संख्या, (३) जीवन निर्वाह की स्थितियाँ, (४) कर्ज, (५) मकानों का किराया, (६) भृत्ति और अन्य आय, (७) प्राविडेन्ट और अन्य फन्ड, (८) श्रम सुविधाएं, (९) कार्य काल, (१०) नौकरी और बेकारी, (११) औद्योगिक और श्रमिक झगड़े, (१२) श्रमबदली, (१३) ट्रेड यूनियन ।

उपरोक्त विधेयकों के आधार पर औद्योगिक सांख्यिकी कार्यालय (Directorate of Industrial Statistics) जिसका निर्माण सन् १९४५ में किया गया था, आवश्यक समंक एकत्र करता है जिसे 'निर्माणियों की संगणना' (Census of Manufactures) कहते हैं और जो इसी नाम के प्रकाशन में छापी जाती है इस प्रकार की संगणना करने के प्रमुख उद्देश्य निम्नलिखित हैं —

(१) निर्माण-कारी उद्योगों का राष्ट्रीय आय की वृद्धि में भाग ज्ञात करना।

(२) राष्ट्रीय औद्योगिक ढाँचे का वैज्ञानिक अध्ययन करना।

(३) उद्योगों पर प्रभाव डालने वाले अनेक कारणों का विश्लेषण करना।

(४) ऐसे समंक एकत्र करना जो राष्ट्रीय औद्योगिक नीति निर्धारित करने में सहायक हों।

(५) राष्ट्रीय उद्योगों की वार्षिक प्रगति का अनुमान।

इस 'निर्माणियों की संगणना' का कार्य औद्योगिक समंक कार्यालय से प्रारम्भ होता है और संचालक की ओर से प्रतिवर्ष राज्यों के सांख्यिकीय अधिकारियों के पास फार्म और अनुसूचियाँ भेजी जाती हैं जिन्हें वे प्रत्येक उद्योग के एककों के पास भेज देते हैं। भेजते समय तीन तीन फार्म व अनुसूचियाँ भेजी जाती हैं जिन्हें भर कर लौटा देने का आदेश भी साथ में नत्थी कर दिया जाता है। ये प्रपत्र नए संगणना वर्ष की समाप्ति से दो माह पहले भर कर वापस मिल जाने चाहिए। जब ये प्रपत्र राज्य की सांख्यिकीय अधिकारी के पास वापस आ जाते हैं तो उनकी जाँच करने के पश्चात् उन्हें औद्योगिक समंक संचालक के कार्यालय में भेज दिया जाता है जहाँ पर संगणना की रिपोर्ट तैयार की जाती है।

'निर्माणियों की संगणना' सर्व प्रथम सन् १९४६ में की गई जिसमें २९ चुने हुए उद्योगों ने भाग लिया था। ये संगणना फैक्टरी एक्ट के २ (J) और ५ (L) अधिनियमों पर आधारित हैं। इन संगणनाओं के लिये उद्योगों को ६३ वर्गों में बाँटा गया था जिसमें से केवल २९ वर्गों के सम्बन्ध में समंक एकत्रित किए गए। इन संगणनाओं का क्षेत्र प्रतिवर्ष बढ़ता ही जा रहा है। सभी संगणनाओं में एक ही कार्य-व्यवस्था

और प्रश्नावलियों का प्रयोग किया गया है। इन संगणनाओं में कुछ दोष भी हैं:—(अ) जबतक ३४ महत्वपूर्ण उद्योगों को और नहीं सम्मिलित किया जाएगा ये संगणनाए राष्ट्रीय औद्योगिक स्तर के पूर्णरूप से दिगदर्शक नहीं होगीं। (ब) पिछली संगणनाओं में मैसूर, हैदराबाद, त्रावणकोर, भोपाल, राजस्थान, सौराष्ट्र, त्रिपुरा, मनीपुर, विलासपुर, कूचविहार, जम्मू और काश्मीर इत्यादि महत्वपूर्ण राज्यों के समंक नहीं एकत्र किये जा सकें। यदि ऐसा रहा तो ये संगणनाए राष्ट्र जीवन की झाँकी न बन सकेगी। (ख) पिछली संगणनाओं के प्रतिफल बहुत देर में छप पाते रहे हैं। उदाहरणार्थ, अन्तिम संगणना जिसके प्रतिफल इस वर्ष छपकर मिले हैं सन् १९५० की संगणना है। यदि सन् १९५० की संगणना के प्रतिफल सन् १९५५ के प्रारम्भ में मिलेगें तो उनका केवल एक ऐतिहासिक महत्व मात्र रह जाएगा और औद्योगिक-नीति या राष्ट्र–नियोजन में सहायक होने का उद्देश्य एक हस्यास्पद वस्तु बन जाएगी।

उपरोक्त प्रकाशन के अतिरिक्त औद्योगिक समंक निम्नलिखित पत्रिकाओं और गृन्थों में भी पाए जाते हैं:—

(१) फैक्टरियों के समंक (Statistics of Factories)

(२) संयुक्त पूँजी वाली कम्पनियों की कार्यवाही की रिपोर्ट (Report on the Working of Joint Stock Companies)

(३) भारत में बड़े औद्योगिक प्रतिष्ठान (Large Industrial Establishments in India)

(४) चुने उद्योगों में उत्पादन के मासिक आँकड़े (Monthly Statistics of Production of Selected Industries of India)

(५) भारत का सांख्यिकीय संक्षेप (Statistical abstract of India)

(६) भारत के व्यापार की स्थिति को स्थिति का मासिक अवलोकन (Monthly Survey of Business Conditions in India)

'बड़े औद्योगिक प्रतिष्ठान' भारत सरकार के श्रम ब्यूरो द्वारा प्रकाशित होता है और सबसे बाद का प्रकाशन सन् १९४६ का है जोकि सन् १९५० में छपा था। ये प्रकाशन प्रति दो वर्ष पर निकलता है और इसमें उन सभी

फैक्टरियों के समंक सम्मिलित हैं जो फैक्टरी एक्ट के अन्तर्गत आती है। इस प्रकाशन में फैक्टरियाँ १० वर्गों में बँटी हैं और उसके सम्बन्ध में मौसमी और बारहमासी सभी प्रकार के वर्गों के समंक छापे जाते हैं। इस प्रकाशन में भी विलम्बित मुद्रण एक बड़ा दोष है।

'चुने उद्योगों में उत्पादन के मासिक आँकड़े, का प्रकाशन २० अप्रैल सन् १९४९ से व्यापारिक वृत्त और अंक संचालक से हट कर औद्योगिक समंक संचालक के पास आ गया है। इसमें करीब ९० उद्योगों के उत्पादन के मासिक आँकड़े, वार्षिक सामर्थ्य और उत्पादन, इत्यादि, के सम्बन्ध में समंक छापे जाते हैं। इसमें औद्योगिक समंक संचालक द्वारा तैयार किए गए औद्योगिक उत्पादन के निर्देशांक भी एक सारणी के रूप में छापे जाते हैं। सितम्बर सन् १९५१ से इस प्रकाशन में कुछ परिवर्त्तन कर दिए गए हैं और आकृति के अनुसार उद्योगों को छोटे, मध्यम और बड़े वर्गों में बांटा गया है। इसमें निर्माणियों की संगणना के आधार पर प्राप्त २९ उद्योगों के आँकड़े भी सारणी रूप में दिए जाते हैं।

श्रम समंक (Labour Statistics)

श्रम-समंकों का महत्व श्रम-आयोग (Royal Commision) ने सन् १९३१ में बतलाते हुइ अपनी रिपोर्ट में ये लिखा था कि 'श्रम नीति तथ्यों पर आधारित होनी चाहिए और जब तक इनके सम्बन्ध में अनिश्चितता रहेगी कभी भी एक विचार न बन सकेगा'। प्रत्येक देश की श्रम-नीति का प्रमुख उद्देश्य जन-साधारण का जीवन निर्वाह का स्तर ऊँचा करना होता है और समंकों के अभाव में श्रम की परिस्थितियों में सुधार, सामाजिक उत्थान, सामाजिक बीमा की योजनाएँ, वास्तविक भृत्ति की उन्नति, इत्यादि, कुछ भी नहीं किया जा सकता है। सन् १९४३ के एक प्रकाशन में अतर्राष्ट्रीय श्रम संस्था (I. L. O.) ने श्रम-समंकों के संकलन के लिए निम्नलिखित प्रमाप निर्धारित किए थे:—

(१) उद्योग और पेशेवर श्रम का वर्गीकरण
(२) नौकरी और बेकारी
(३) भृत्ति, आय और कार्यकाल
(४) जीवन निर्वाह का स्तर
(५) कौटुम्बिक जीवन

(६) औद्योगिक दुर्घटनाएँ
(७) औद्योगिक झगड़े

उपरोक्त प्रमापों में राष्ट्रीय आवश्यकताओं के अनुसार परिवर्त्तन करने की छूट दी गई थी। समंकों के संकलन की जो पद्धति अमरीका आदि औद्योगिक देशों में अपनाई जाती है वह भारत या अन्य एशियाई देशों में प्रयुक्त नहीं किए जा सकते। उदाहरणार्थ, यदि अमरीका में डाक द्वारा प्रश्नावलियाँ भेज कर समंक एकत्रित हो सकते हैं तो भारतवर्ष की निरक्षर जन-संख्या से ये आशा करना गलत सिद्ध होगा। यहाँ तो प्रगणकों की सहायता से होशियारी से अपेक्षित सूचनाऐं प्राप्त करने की रीति को अपनाना पड़ेगा।

पिछले दो दर्शकों में औद्योगिक झगड़ों की अधिकता के कारण और भृत्ति विषयक फैसले करने की दृष्टि से भारतवर्ष के कई राज्यों ने परि-वारिक-आय-व्ययक अनुसंधान किए परन्तु उनके संकलनों के ढंगों में काफी विभिन्नताएँ थी जिनसे उनकी परस्पर तुलना ठीक प्रकार से नहीं हो सकती थी। इस कमी को दूर करने के लिए सन् १९४२ में भारत सरकार ने जीवन-निर्वाह-निर्देशांक-योजना-संचालक की नियुक्ति की जिन्होंने सन् १९४३ और १९४६ तक २८ केन्द्रों में आय-व्ययक खोजें की थी और अब कई केन्द्रों के यथार्थ जीवन निर्वाह निर्देशांक छापे जाते हैं यद्यपि अब भी तुलनात्मक आँकड़े प्रत्येक राज्य के लिए अप्राप्य हैं।

श्रमिक शक्ति का पेशेवर विभाजन जन-गणना के आँकड़े प्रदान कर सकते हैं परन्तु सन् १९४१ तक ऐसा न हो सका था। सन् १९४१ के पेशेवर आँकड़ों का सारणीयन नहीं हो सका था क्योंकि युद्ध छिड़ चुका था। सन् १९४१ की जनगणना में लिया गया २ यादर्श इस दिशा में उपयोगी सिद्ध हो सकता था। सन् १९५१ की जनगणना में कमी पूरी हो गई है और जनसंख्या का पेशेवर विभाजन प्राप्य है। परन्तु अब भी श्रमिक जनसंख्या का पेशेवर विभाजन नहीं हो सका है और उत्तर प्रदेश को छोड़कर बेकारी के आँकड़े भी किसी अन्य राज्य में एकत्र नहीं किए जा सके हैं।

युद्धोत्तर काल में नौकरी और बेकारी के आँकड़ों का महत्व और भी अधिक बढ़ गया क्योंकि भारत के स्वतन्त्र होने और राष्ट्र-नियोजन के प्रश्नों

ने महत्वपूर्ण स्थान गृहण कर लिए थे । इनके अतिरिक्त सामाजिक सुरक्षा और बीमा की योजना लागू करने में भी उनका महत्व था । भारतवर्ष में नौकरी के आँकड़े प्रायः प्रशासकीय क्रिया के फलस्वरूप ही एकत्र होते रहे हैं और निम्नलिखित क्षेत्रों के नौकरी के समंक क्रमबद्ध प्राप्य हैं— (१) फ़ैक्टरियाँ, (२) खानें, (३) बगीचे वाले उत्पादन, (४) रेलें। उपरोक्त क्षेत्रों के अतिरिक्त अन्य महत्वपूर्ण क्षेत्रों के नौकरी के समंक अप्राप्य हैं जैसे, कृषि गृह उद्योग, परिवहन, व्यापार, होटल, बैंक इत्यादि । यद्यपि इन क्षेत्रों के कुछ समंक सन् १९३१ की जनगणना और १९४४ की रीगे (Rege) कमेटी की रिपोर्टों में प्राप्य हैं वे क्रमबद्ध समंकों का महत्व कम नहीं करते । सन् १९४२ के औद्योगिक समंक विधेयक के फलस्वरूप सन् १९४६ से होने वाली 'निर्माणियों की संगणना' में नौकरी के आँकड़े मिलने प्रारम्भ हो गये हैं पर उनका क्षेत्र केवल २९ उद्योगों तक ही सीमित है । अन्य देशों में बेकारी के समंकों का प्रमुख उद्‌गम सामाजिक बीमा योजनाएँ हैं जोकि भारत में अभी प्रारम्भिक दशा में हैं । भारत में सन् १९४५ में पुर्नवास और नौकरी संगठन का निर्माण हुआ था और आज सारे भारत में ७० से अधिक रोज-गारी के दफ्तर हैं जिनसे कुछ आवश्यक सूचनाँए प्राप्य हैं ।

भृत्ति, आय और कार्य-काल के सम्बन्ध में आँकड़ों की भारत में अत्यन्त कमी है यद्यपि सन् १९३१ के श्रम-आयोग से अब तक कितनी ही बार इस ओर संकेत किया जा चुका है । इस क्षेत्र के समंकों को एकत्र करने के लिए अभी तक कोई भी व्यवस्था नहीं रही है यद्यपि कुछ श्रम कमेटियों ने व्यक्ति-गत प्रयत्न किए हैं । उनके प्रयत्नों के प्रतिफलों में कोई तुलनात्मक महत्व नहीं है । कुछ आँकड़े इस सम्बन्ध में सरकारी रिपोर्टों में यदाकदा छपते रहे हैं । परन्तु उन सभी आँकड़ों में समन्वय स्थापित नहीं किया जा सकता है । सन् १९४४ में श्रम अनुसन्धान कमेटी के प्रयत्नों के फलस्वरूप यदाकदा अनुसन्धानों के द्वारा ३८ उद्योगों से सम्बन्धित कुछ आँकड़े एकत्र हुए थे जो किसी प्रमाप वर्गीकरण के अनुसार न होने के कारण तुलनीय नहीं थे ।

औद्योगिक झगड़ों के आँकड़े भारत में सन् १९२१ से ऐच्छिक आधार पर उद्योगों द्वारा एकत्र किए जा रहे हैं । सरकार इन उद्योगों के पास छपे

हुए फार्म और अनुसूचियाँ भेजती रहती हैं और उनके द्वारा भेजे गए समंकों का वर्गीकरण और सारणीयन कर लिया जाता है। औद्योगिक झगड़ों के आँकड़े 'निर्माणियों की संगणना' के द्वारा और भी उत्तम हो जाएगें ऐसी आशा की जा सकती है। औद्योगिक दुर्घटनाओं के समंक भी उत्तम प्रकार के हैं जोकि विभिन्न विधेयकों की वार्षिक रिपोर्टों के द्वारा प्राप्त होती हैं।

श्रम समंकों में दो प्रमुख प्रकाशन हैं, भारतीय श्रम गजेट और भारतीय श्रम-वार्षिकी जोकि भारत-सरकार के श्रम-ब्यूरो द्वारा प्रकाशित होते हैं।

श्रम समंकों के संकलन के लिए सन् १९४४ की श्रम-अनुसंधान-कमेटी ने निम्नलिखित सुझाव रखे थे—

(१) जहाँ तक सम्भव हो आय-व्ययक खोजों में लगे हुए प्रगणकों को बम्बई श्रम-विभाग या अन्य किसी श्रम-कार्यालय में शिक्षण लेना चाहिए।

(२) देहली, मद्रास, कानपुर, जमशेदपुर और झरिया में परिवारिक आय-व्ययक खोजें की जानी चाहिए। पंजाब सरकार द्वारा आर्थिक अनुसंधान बोर्ड को सहायता दी जानी चाहिए और मध्य प्रान्त में ऐसे बोर्ड की स्थापना की जाना चाहिए।

कृषक भृत्ति समंक

भारत में कृषक भृत्ति समंक सर्वप्रथम सन् १८५९ में एकत्रित किए गए। ये कार्य न्यादर्श अनुसंधान के द्वारा सम्पन्न हुआ था। परन्तु सन् १८७३ से पहले इन समंकों को एकत्र करने के वैज्ञानिक और नियमित प्रयत्न नहीं प्रारम्भ हुए जबकि भारत सरकार ने प्रान्तों से कृषक मजदूरों के सम्बन्ध में कुछ आँकड़े मागें थे। उत्तर प्रदेश में सर्वप्रथम कृषक-भृत्ति अनुसंधान सन् १९०६ में किया गया। सन् १९१९ में इस अनुसंधान में कुछ परिवर्त्तन किए गए और भारत सरकार के सुझावों के अनुसार सन् १९२८, १९३४ और सन् १९३९ में उत्तर प्रदेश ने इस प्रकार के अनुसंधान किए। अन्य प्रान्तों ने भी इसी प्रकार की पद्धति अपनाई। ये समंक प्रान्तों द्वारा केन्द्र को भेजे जाते हैं और 'भारत के मूल्य और भृत्तियाँ (Prices & Wages in India) नामक प्रकाशन में छापे जाते हैं।

सन् १९४९ में भारत सरकार ने प्रान्तों की सहायता से अखिल भारत-वर्षीय-कृषि-श्रमिक, अनुसंधान प्रारम्भ किया। 'भारतीय कृषि भृत्ति भाग १' (Agricultural Wages in India Vol. I) १९५२ में विभिन्न राज्यों के कृषक मजदूरों के सम्बन्ध में भृत्ति, जीवन निर्वाह इत्यादि के सम्बन्ध में आँकड़ों का उल्लेख है। खाद्य और कृषि मंत्रणालय के अंक और अर्थ संचालक के द्वारा प्रकाशित 'भारतीय कृषि-भृत्ति-समंक (Indian Agricultural Wage Statistics) में बहुत ही महत्वपूर्ण सूचनायें मिलती हैं।

भारत के स्वतंत्र होने के बाद कृषक मजदूरों के उत्कर्ष के लिये बड़े प्रयत्न किये गये। सन् १९४८ में न्यूनतम-भृति-विधेयक (Minimum Wages Act) पास किया गया परन्तु उसका उपयोग कृषक मजदूरों के हित में नहीं किया जा सका क्योंकि समंकों का अभाव था। आवश्यक समंक एकत्रित करने के लिये श्रम मंत्रणालय ने प्रान्तीय सरकारों की सहायता से अखिल भारत-वर्षीय कृषि मजदूर अनुसंधान चालू किया जिसके विभिन्न स्थितियों में रिपोर्टें जो १० से अधिक होगी, छपती रही। ये एशियाई देशों में सर्वप्रथम अनुसंधान है जोकि अंतर्राष्ट्रीय श्रम संस्था (I.L.O.) के द्वारा बतलाई हुई योजना के अनुसार किया गया है। यद्यपि यह रिपोर्ट सन् १९५४ की मई में प्रकाशित हुई है इसमें दिये गये समंक सन् १९५०–५१ के हैं। इस रिर्पोट में निम्नलिखित सूचनाएँ मिलती हैं।

(अ) सम्बद्ध आंकडे:—(१) क्षेत्र, भूमि के उपयोग संम्बन्धी समंक, (२) गाँवों के कुटुम्बों का पेशेवर विभाजन, (३) खेतों की संख्या और आकृति कुटुम्बों के अनुसार।

(ब) कृषक मजदूरों के समंक:—(१) भृत्ति, (२) नौकरी का स्वरूप, (३) भृत्ति के भुगतान का ढंग, (४) भृत्ति रेट, (५) आय, व्यय और जीवन-निर्वाह का स्तर, (६) कर्ज।

उपरोक्त समंक समस्त देश के ६ जनगणना क्षेत्रों के सम्बन्ध में हैं। यह एक दैव-प्रवरण अनुसंधान था। इसलिये कुछ राज्यों में विशेष रूप से (स) राज्यों के न्यादर्श समुचित न थे।

मूल्य समंक (Price Statistics)

भूतकाल में मूल्य-समंकों का अभाव चर्चा का विषय रहा है और इस बात की १९२५ के भारतीय अर्थ अनुसंधान कमेटी १९३१ के श्रम आयोग, १९३४ की बावले राबर्टसन कमेटी, १९४४ की श्रम-अनुसंधान कमेटी और १९४८ की निम्बकर कमेटी ने कड़ी अलोचना की है। सन् १९४२ के औद्योगिक समंक विधेयक और सन् १९५३ के समंक संकलन विधेयक में मूल्यों के समंक एकत्रित करने के लिए प्रबन्ध है।

भारत के मूल्य समंक अनेकों सरकारी और गैर सरकारी प्रकाशनों में छपते हैं जिनकी लिस्ट नीचे दी जा रही है :—

(१) केन्द्रीय और प्रान्तीय गजेट।

(२) भारतीय व्यापार पत्रिका (Indian Trade Journal) और थोक मूल्यों का मासिक विवरण (Monthly Statement of Wholesale Prices)।

(३) उद्योग और व्यापार पत्रिका (Journal of Industry and Trade)।

(४) भारतीय थोक मूल्यों का निर्देशाँक (Index No. of Wholesale Prices)।

(५) भारतीय कृषि स्थिति (The Agricultural Situation in India)

(६) कृषि मूल्यों का बुलेटिन (The Bulletin of Agricultural Prices)

(७) भारतीय कृषि मूल्य समंक (The Indian Agricultural Price Statistics)

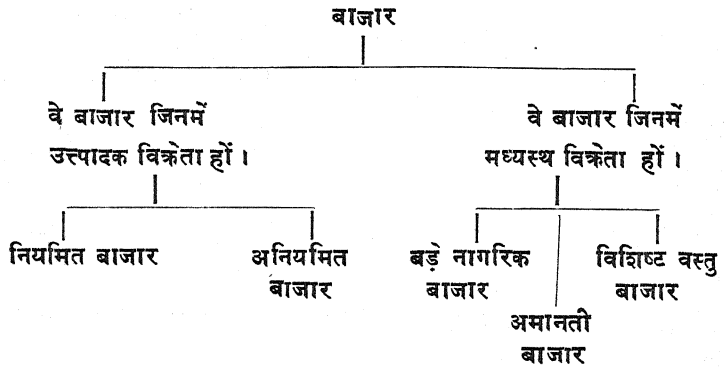
(८) भारतीय कृषि समंक (Indian Agricultural Statistics)

(९) मौसम और फस्लों की रिपोर्ट (The Season & Crop Reports)

(१०) भारत के खाद्य समंक (Indian Food Statistics)

(११) रिजर्व बैंक बुलेटिन।

(१२) समंकों का मासिक संक्षेप (Monthly Abstract of Statistics) और समंकों का साप्ताहिक विवरण (Weekly Bulletin of Statistics)

भारत के कृषि मूल्यों के समंकों की दशा काफी खराब है। यद्यपि उन्हें संकलित करने के अनेक प्रयत्न चल रहे हैं पर एक ही स्थान के विषय में दो सूत्रों से एकत्र किए गए समंकों में भी विभिन्नतायें पाई जाती हैं जिससे उनकी यथार्थता पर संशय होता है। मौसम और फस्लों की रिपोर्टों में छपे हुए कटती-फसल-के-मूल्य सरकारी गजेटों में छपने वाले मूल्यों से नहीं मिलते। राष्ट्रीय–आय कमेटी की द्वितीय रिपोर्ट में कृषि मूल्यों के समंकों की यथार्थता में सुधार की दृष्टि से ये सुझाव रखा है कि मूल्यों का व्यापारियों, कटती फसल और उत्पादकों के अनुसार विभाजन न करके बाजारों का वर्गीकरण किया जाना चाहिए। इस दिशा में उस रिपोर्ट का सुझाव निम्नांकित हैः—

मूल्य-समंकों में उपभोक्ता मूल्यों के समंक अधिक यथार्थ हैं विशेषरूप से वे जिनका प्रयोग नागरिक जीवन निर्वाह के निर्देशांक बनाने में किया जाता है। भारत सरकार के श्रम ब्यूरों ने इस बात का प्रयत्न किया है कि ग्रामीण उपभोक्ता समंक एकत्र किए जायें पर इस योजना में एक कमी है कि इस बात पर जोर दिया गया है कि समंक संकलन का केन्द्र एक रेलवे स्टेशन हो।

राष्ट्रीय आय कमेटी के कथनानुसार मूल्य-समंकों का राष्ट्रीय आय की गणना के अतिरिक्त अन्य क्षेत्रों से सम्बन्धित नीति के प्रतिपादन में महत्वपूर्ण स्थान है। मूल्य समंकों की आकृति का इस बात से अन्दाज लगाया जा सकता है कि यदि किसी एक तहसील के १०० वस्तुओं के मूल्य-समंक एकत्र किए जाएँ तो २,००,००० निर्ख तक प्राप्त होवेंगे।

व्यापारिक समंक (Trade Statistics)

भारत के व्यापारिक समंक भी अपूर्ण हैं। राष्ट्रीय आय कमेटी के अनुसार राज्यों में व्यापारिक समंक संकलन के लिए एक नवीन उद्गम उत्पन्न हो गया है और वह है बिक्रीकर कार्यालय जिसके द्वारा एकत्र किए गए समंकों के फिर से सारणीयन द्वारा व्यापारिक समंक प्राप्त किये जा सकते हैं। राष्ट्रीय आय कमेटी के सुझाव के अनुसार प्रत्येक प्रकार के विक्रय और दूकानों का राज्यों में समान वर्गीकरण किया जाना चाहिए। लाइसेन्स युक्त वस्तुओं के समंक तो प्रशासकीय यंत्र द्वारा प्राप्त हो ही सकते हैं और व्यापारिक लाभ एवं वितरण व्यय के समंकों के लिए छोटे छोटे अनुसंधान करने चाहिए।

भारत के व्यापारिक समंक निम्नलिखित प्रकाशनों में प्राप्य हैं:—

(१) भारतीय व्यापार पत्रिका (Indian Trade Journal)

(२) भारत के विदेशी जल व्यापार का वार्षिक चिट्ठा (Annual Statement of the Foreign Seaborne Trade of India)

(३) भारत के विदेशी व्यापार के लेखे (Accounts relating to the Foreign, Sea, Air and Land Trade and Navigation of India)

(४) भारत के आन्तरिक व्यापार के लेखे (Accounts relating to the Inland Trade of India)

(५) कच्ची कपास व्यापार समंक (Raw Cotton Statistics)

(६) भारत के व्यापार का अवलोकन (Review of Trade of India)

(७) भारतीय कस्टम (Indian Customs Tariff)

(८) समुद्रतटीय व्यापार के लेखे (Accounts relating to the Coasting Trade & Navigation of India)

(९) भारत-पाकिस्तान व्यापारिक समंक (Indo-Pakistan Trade Statistics)

भारतीय निर्देशांक (Indian Index Nos.)

भारतवर्ष में निर्देशांकों का बनाया जाना और प्रकाशन १९ वीं शताब्दी में प्रारम्भ हुआ। आरम्भ में 'भारत के मूल्यों के निर्देशांक' नामक प्रकाशन में थोक मूल्यों, खाद्यान, फुटकर मूल्यों और आयात और निर्यात की वस्तुओं के मूल्यों के निर्देशांक प्रत्येक पाँच वर्ष के अन्त में छपते थे। इस पंचवर्षीय प्रकाशन के वार्षिक परिशिष्ट भी छपा करते थे और इन निर्देशांकों का आधार वर्ष १८७३ रहता था। प्रथम महायुद्ध में बम्बई और कलकत्ता के थोक मूल्यों के निर्देशांकों का प्रादुर्भाव हुआ जिनका आधार वर्ष जुलाई १९१४ रखा गया था। सन् १९१४–१८ तक भारत में जीवन निर्वाह निर्देशांक प्रकट नहीं हुए थे परन्तु इस काल में सर्व प्रथम बम्बई जीवन निर्देशांक भी छापा गया। द्वितीय महायुद्ध के काल में कई नए निर्देशांक प्रकट हुए, उदाहरणार्थ, लाभ निर्देशांक, उत्पादन निर्देशांक और विदेशी व्यापार निर्देशांक। सन् १९४७ से भारत के आर्थिक सलाहकार ने एक सर्वसाधारण निर्देशांक (General Purpose Index) प्रकाशित करना शुरू किया। अभी हाल में निर्देशांकों की दो नई श्रंखलाएँ प्रकाशित होनी प्रारम्भ हुई हैं जिनमें अखिल भारतीय श्रम-जीवन-निर्वाह निर्देशांक, और फैक्टरी के श्रमिकों की आय-निर्देशांक सम्मिलित हैं। रिजर्व बैंक द्वारा एक नई श्रंखला सिक्यूरिटी मूल्यों की चलाई गई है।

निर्देशांकों की उत्पत्ति भारत में धीरे धीरे औद्योगिक उत्कर्ष के तदनुरूप हुई है। द्वितीय युद्ध के बाद यह उन्नति बहुत आकर्षक रही है और अब अनेक सरकारी और गैर सरकारी श्रंखलाएँ चालू हैं जिनका विवरण नीचे दिया गया है:—

(अ) वस्तुओं के मूल्य निर्देशांक

(१) कलकत्ता थोक मूल्यों का निर्देशांक—ये निर्देशांक व्यापारिक वृत्त और अंक विभाग कलकत्ता द्वारा भारतीय व्यापारिक पत्रिका (Indian Trade Journal) में नियमित रूप से प्रकाशित किया जाता है। इसमें ७२ वस्तुएँ शामिल हैं जिन्हें १६ वर्गों में बांटा गया है और इसका आधार जुलाई १९१४ को समाप्त होने वाला वर्ष लिया गया है। प्रत्येक वर्ग के लिए एक अलग निर्देशांक बनाया जाता है और परिगणन के निमित्त

भारित मध्यक का प्रयोग किया गया है। ये निर्देशांक अखिल भारत-वर्षीय महत्व का नहीं है क्योंकि केवल कलकत्ता के ही मूल्यों पर आधारित है।

(२) भारत के आर्थिक सलहाकार का निर्देशांक—ये निर्देशांक सर्वप्रथम १९४२ में प्रारम्भ किया गया और थोक मूल्यों पर आधारित है। इसमें ७८ वस्तुऐं ली गई हैं जिन्हें निम्नलिखित ५ वर्गों में बांटा गया है:—(१) खाद्य वस्तुऐं, (२) औद्योगिक कच्चा माल, (३) अर्ध-निर्मित, (४) निर्मित और (५) मिश्रित। इस निर्देशांक का आधार अगस्त १९३९ को समाप्त होने वाला वर्ष है और इनके परिगणन के लिए भारित गुणोत्तर माध्य लिया जाता है। प्रत्यक वर्ग का अलग अलग निर्देशांक निकाला जाता है और उनके भार निम्नलिखित हैं—खाद्य वस्तुएँ ३१, और औद्योगिक कच्चा माल १८, अर्ध निर्मित १७, निर्मित ३० और मिश्रित ४। सभी वर्गों के निर्देशाँकों को मिलाकर एक पूर्ण निर्देशाँक भी बनाया गया है। ये निर्देशाँक प्रति सप्ताह छापे जाते हैं।

भारत सरकार कुछ वर्षों से इस निर्देशांक के आधार वर्ष १९३९ को बदलने के लिए विचार कर रही है। इस निर्देशांक के सम्बन्ध में अन्तर्राष्ट्रीय मुद्राकोष द्वारा भेजे गए दल का सुझाव था कि इसके साथ ही साथ सभी आर्थिक प्रवृत्तियों के निर्देशांकों के आधार वर्ष में परिवर्तन करके एक कोई ऐसा वर्ष रखा जाए जो आधुनिक प्रवृत्तियों का पूर्णरूप से प्रतिनिधित्व करता हो क्योंकि महायुद्ध से पूर्व वाले मूल्य स्तर पर पुनः पहुँचने की आशा करना व्यर्थ सा है और अब तो केवल उसका ऐतिहासिक महत्व मात्र ही रह गया है।

सरकार का यह विचार था कि सन् १९३९ को हटा कर सन् १९४९ को आधार वर्ष बना दिया जाए। और इस सम्बन्ध में कृषि-मूल्य-अन्वेषण-कमेटी का भी यही सुझाव था और उसकी रिपोर्ट में ९९ बाजारों का भी उल्लेख था जिनके मूल्यों के आधार पर आधार वर्ष के औसत मूल्य मालूम किए जाएँ। परन्तु यह योजना सफल न हो सकी क्योंकि इन ९९ बाजारों में से कई के मूल्य सम्बन्धी समंक अप्राप्य थे। तदुपरान्त यह निश्चय किया गया कि आर्थिक वर्ष १९५२-५३ को नई निर्देशांक माला का आधार मान लिया जाए क्योंकि यह वर्ष सब प्रकार से स्थिरता का वर्ष रहा है। आज कल

आर्थिक सलाहकार इस नई निर्देशांक माला को बनाने में लगे हुए हैं जिसके निम्नलिखित प्रमुख लक्षण हैं :—

(१) इस निर्देशांक में पुरानी माला की अपेक्षा २१० आँकड़ों के स्थान पर ५५८ आँकड़ों का प्रयोग किया जाएगा।

(२) आधार वर्ष १९३९ से हटा कर १९५२–५३ कर दिया गया है।

(३) परिगणन में गुणोत्तर माध्य रखा गया है।

(४) मध्यक को भारित करने की विधि को युद्धोत्तर एवं विभाजन के बाद की प्रवृत्तियों के अनुसार कर दिया गया है।

(५) विभिन्न वस्तुओं के वर्गीकरण में भी कुछ परिवर्तन किये जाएँगे।

अन्तर्राष्ट्रीय मुद्रा-कोष दल ने यह सिफारिश की है कि थोक मूल्यों का एक नया निर्देशांक बनाया जाए जिसमें केवल देश के आन्तरिक उत्पादन एवं उपभोगों की वस्तुओं का ही प्रयोग किया जाए। यह निर्देशांक आन्तरिक जीवन के सम्बन्ध में पूर्ण माप प्रदान करेगा और इसके विभिन्न वर्षों की आन्तरिक स्थिरता की तुलना की जा सकेगी।

इस प्रकार के परिवर्तनों से निम्नलिखित लाभ होंगे—(१) निर्देशांकों का क्षेत्र का विस्तार हो जावेगा, (२) निर्देशांक का परिमाण कम हो जाने से देश की वास्तविक स्थिति का ज्ञान हो सकेगा, (३) श्रम समस्याओं पर अच्छा प्रभाव पड़ेगा, और (४) मुद्रा स्थिति का यथार्थ दिग्दर्शन होगा।

(३) <u>प्रमुख फस्लों के कटनी-मूल्यों का निर्देशांक</u>—यह निर्देशांक अर्थ और अंक संचालक द्वारा बनाया जाता है और इसमें १६ वस्तुएँ हैं। इसके लिए मूल्य समंक गैर–सरकारी क्षेत्रों से फस्लों की कटनी के समय साप्ताहिक आँकड़ों के रूप में प्राप्त होते हैं जिनका औसत निकाल लिया जाता है। इस निर्देशांक का आधार वर्ष १९३८–३९ है और निर्माण रीति श्रृंखला आधार मूल्यानुपात है।

(४) <u>फुटकर मूल्यों के निदशांक (शहरी क्षेत्र)</u>—यह निर्देशांक श्रम मन्त्रणालय के श्रम ब्यूरो द्वारा प्रकाशित किया जाता है। यह लेबर गजेट में १८ केन्द्रों के लिए प्रकाशित होता है और एक भारहीन निर्देशांक है। इसके प्रमुख वर्ग निम्नलिखित ह—खाद्य, लकड़ी, रोशनी, और मिश्रित और इसका आधार वर्ष १९४४ है।

(५) फुटकर मूल्यों के निर्देशांक (ग्रामीण क्षेत्र)—यह प्रतिमाह लेबर गजेट में १२ ग्रामीण केन्द्रों (सभी रेलवे स्टेशन हैं) के लिए श्रम ब्यूरो द्वारा प्रकाशित किया जाता ह । इसका आधार वर्ष जनवरी-दिसम्बर १९४६ है । इस निर्देशांक का क्षेत्र बढ़ाया जाना चाहिए और राष्ट्रीय आय कमेटी के सुझाव के अनुसार रेलवे स्टेशन वाली सीमा दूर कर देनी चाहिए ।

(स) औद्योगिक उत्पादन के निर्देशांक

(१) 'ईस्टर्न इकनामिस्ट' उत्पादन निर्देशांक—यह औद्योगिक उत्पादन का एक निर्देशांक हैं जो कि 'ईस्टर्न इकनामिस्ट' नामक पत्रिका छापती है । इसमें निर्माणियों की अनेक वस्तुओं को चार प्रमुख वर्गों में बाँटा गया है जिनके भार निम्नलिखित हैं—टेक्सटाइल्स (५७), लकड़ी और शक्ति (१०), अन्य, और सर्व साधारण निर्देशांक (१००) । इस निर्देशांक का आधार वर्ष अगस्त १९३९ को समाप्त होने वाला वर्ष है ।

(२) औद्योगिक उत्पादन का अन्तिरिम निर्देशांक—यह औद्योगिक समंक संचालक द्वारा प्रतिमास प्रकाशित किया जाता है । इसका आधार वर्ष १९४६ है । इसमें शामिल किए गए उद्योगों को निम्नलिखित वर्गों में बाँटा गया है और उनके भार भी दिए गए हैं—कोयला (११·९५), शक्कर (३·५४) पेन्ट और वारनिश (·६१), सीमेन्ट (·६६), काँच (·५५), प्लाई वुड (·१५), कागज (१·४६), दियासलाई (१·२१), कपड़ा(४३·४९), गर्म कपड़ा (१·३८), जूट (१६·५३), रसायन (३·१०), इत्यादि । इन सभी उद्योगों को भार उनके द्वारा राष्ट्रीय आय में वृद्धि के अनुसार दिया गया है ।

(३) 'कैपिटल' औद्योगिक क्रिया का निर्देशांक—यह कलकत्ता से प्रकाशित 'कैपिटल' नामक पत्रिका में मार्च सन् १९३८ से प्रकाशित हो रहा है और इसका आधार वर्ष १९३५ हं । इसमें प्रयुक्त समंक व्यापारिक वृत्त और अंक संचालक द्वारा प्रकाशित आँकडों से लिए गए हैं । इसमें निम्नलिखित वर्ग और भार पाए जाते हैं—औद्योगिक उत्पादन (३६), खनिज उत्पादन (७), रेल और नदी व्यापार (२४), आर्थिक समंक (२), विदेशी और तटीय व्यापार (७), जलयान द्वारा विदेशी और तटीय व्यापार (६) । इस निर्देशांक के परिगणन में भारित गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है ।

(४) 'इस्टर्न इकनामिस्ट' व्यवसायिक क्रिया का निर्देशाँक—यह 'ईस्टर्न इकनामिस्ट' द्वारा प्रकाशित किया जाता है और इसका आधार वर्ष अगस्त १९३९ को समाप्त होने वाला वर्ष है। इसमें निम्नलिखित वर्ग और भार हैं—औद्योगिक उत्पादन (४६), आयात (३), निर्यात (३), व्यापारिक जलयान (२), चेक क्लीयरेन्स (१८), नोट परिचलन (५), आन्तरिक यातायात (२३), सर्वसाधारण निर्देशाँक (१००)।

(ब) श्रम-जीवन-निर्वाह-निर्देशांक

(१) लेबर ब्यूरो निर्देशांक—यह १६ केन्द्रों के लिए लेबर ब्यूरो द्वारा छापा जाता है और इसका आधार वर्ष सन् १९४४ है। इसके सम्मिलित अंकों के भार सन् १९४३–४५ में की गई आय-व्ययक खोज पर आधारित हैं। इस निर्देशाँक के पदों को ५ वर्गों में बाँटा गया हैः—खाद्य, लकड़ी और रोशनी, मकान भाड़ा, कपड़ा, बिस्तरा, जूते और मिश्रित।

(२) बम्बई श्रम-जीवन-निर्वाह-निदर्शाँक—यह निर्देशांक सर्वप्रथम १९२१ में बम्बई के श्रम विभाग ने छापा था और फिर इसमें १९३३ में संशोधन किया गया। संशोधित निर्देशाँक में खाद्य में २८ पद, लकड़ी और रोशनी में ४ पद, कपड़े में ६ पद, और मिश्रित में ७ पद हैं। मकान भाड़ा प्रति मकान का औसत है। यह निर्देशाँक लेबर गजेट में छापा जाता है। लेबर गजेट आफिस बम्बई के अतिरिक्त शोलापुर और अहमदाबाद के लिए भी जीवन निर्वाह निर्देशाँक छापता है। बम्बई के लिए १९३४, अहमदाबाद के लिए १९२७ और शोलापुर के लिए १९२२ आधार वर्ष चुने गए हैं।

(३) कानपुर श्रम–जीवन-निर्वाह-निर्देशाँक—यह दो भागों में कानपुर के लेबर आफिस द्वारा प्रकाशित किया जाता है—(१) अन्तरिम साधारण निर्देशांक और (२) पूरक निर्देशाँक। दूसरा निर्देशांक उन मूल्यों पर आधारित है जिन पर मिले अपने कर्मचारियों को खाद्यान्न देती हैं और पहले में बाजार मूल्य लिए जाते हैं। यह निर्देशांक अगस्त १९३९ को समाप्त होने वाले वर्ष को आधार मानता है। इसमें २१ पद हैं जोकि पाँच वर्गों में बाँटे गए हैंः—खाद्य (४), लकड़ी और रोशनी (२), कपड़े (६), मकान (८), मिश्रित (७)।

(४) श्रम-ब्यूरो-अखिल-भारतीय-श्रम-जीवन-निर्वाह-निर्देशाँक :— यह सन् १९४४ से प्रकाशित होता है। इसमें २४ केन्द्रों के सम्बन्ध में

समंक लिये जाते हैं जिनमें से १५ वे हैं जिनके लिए श्रम-ब्यूरो निर्देशाँक बनाता है और ९ वे हैं जिनके लिये अन्य राज्यों की सरकारें निर्देशाँक बनाती हैं। सभी श्रृंखलाओं के अन्तिम मूल्यानुपातों को लेकर यह अखिल भारतीय निर्देशाँक बनाया जाता है ।

(द) कृषि-उत्पादन के निर्देशाँक

(१) रिर्जव बैंक निर्देशाँक:—यह रिर्जव बैंक के बुलेटिन में छपता है और इसके आधार वर्ष के लिये १९३६–३७, १९३७–३८ और १९३८–३९ का औसत लिया जाता है। इसमें ११७ वस्तुओं को पाँच वर्गों में बांटा गया है। यह निर्देशाँक प्रायः रिर्जव बैंक के दिसंबर के बुलेटिन में छापा जाता है।

(२) 'ईस्टर्न इकनामिस्ट' कृषि-उत्पादन निर्देशाँक—यह निर्देशाँक १९३६–३७ से १९३८–३९ की औसत मूल्यों पर आधारित है जिसमें चार वर्ग किए गए हैं:—(अ) खाद्यान्न, (ब) रेशेवाली फस्लें, (स) तिलहन, और (द) मिश्रित। यह निर्देशाँक चित्रलेख द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। यह एक भारित निर्देशाँक है और भार आधार वर्ष के मूल्यों के अनुसार दिये गये हैं।

(३) खाद्य और कृषि संस्था निर्देशाँक:—अंतर्राष्ट्रीय खाद्य और कृषि भारतके कृषि उत्पादन का एक निर्देशाँक संस्था प्रकाशित करता है। इसके १९३४–३८ का औसत आधार माना लिये गया है। इसकी वस्तुओं को ११ वर्गों में बाँटा गया है और भार गेहूँ के तुलनात्मक मूल्यों के आधार पर दिया गया है।

विभिन्न निर्देशाँकों के उपरोक्त विवरण से यह स्पष्ट हो जाता है कि उनकी परस्पर तुलना नहीं की जा सकती है क्योंकि सभी के आधार वर्ष विभिन्न हैं। अंतर्राष्ट्रीय मुद्राकोष दल ने सभी आर्थिक निर्देशांकों के आधार वर्षों के परिवर्तन के सम्बन्ध में सुझाव रखे थे। विभिन्न सरकारी विभागों के संख्याशास्त्रियों की एक समिति सन् १९५२ में बना दी गई थी जिसका यह कार्य था कि वह सरकारी निर्देशाँकों के लिये आधार वर्ष निर्धारित करे। इस समिति ने सन् १९५२–५३ को सभी निर्देशाँकों के लिये अनुकूल आधार वर्ष ठहराया गया है और आर्थिक सलाहकार

के निर्देशाँकों के अतिरिक्त औद्योगिक उत्पादन का निर्देशाँक भी उ अनुसार बनाया जा रहा है। अक्टूबर सन् १९५३ को होने वाली केन्द्र एवं प्रान्तीय सांख्यिकों की कान्फ्रेन्स के सामने जब यह प्रश्न आया जीवन-निर्वाह के निर्देशाँकों में भी परिवर्तन किये जाएं तो उसने इस की शिफारिश की कि सभी प्रान्तो को चाहिये कि अपने अपने क्षेत्रों में १९५५–५६ में पारिवारिक आय व्ययक सम्बन्धी खोज करें जिससे सभी निर्देशांकों के लिए समान भार (Weights) निश्चित किए जा सकें।

राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान

न्यादर्श अनुसंधान प्रणाली के रूप में प्रोफेसर पी० सी० महलानोबि ने साँख्यिक ढंगों में एक महत्वपूर्ण कड़ी जोड़ दी है। भारत में स्वतन्त्र प्राप्त होने के बाद आवश्यक समंक शीघ्र एकत्र करने के लिए एक आन्दोल सा चल पड़ा क्योंकि राष्ट्रीय नियोजन इनके बिना असम्भव सा था। प्रध मंत्री श्री नेहरू के उत्साह लेने पर १९४९ में केन्द्रीय साँख्यिकीय प्रतिष्ठ और राष्ट्रीय आय कमेटी की नियुक्ति हुई। विभागीय संख्याशास्त्रियों सभा ने एक न्यादर्श अनुसंधान की इच्छा प्रकट की और सन् १९५० प्रोफेसर महलानोबिस की अध्यक्षता में भारत सरकार ने राष्ट्रीय न्याद अनुसंधान की योजना स्वीकृत करली। राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान रा जीवन के, उत्पादन, उपभोग, वितरण और विनिमय आदि सभी पहलुओं संबन्धित एक बहुत बड़ी खोज है जोकि विश्व में सर्व प्रथम भारत ने हा में ली है।

भारतीय साँख्यिकी संस्था, कलकत्ता सन् १९३५ से अनेक न्यादर्श अनु संधानों में लगी रही है और इसलिए भारत सरकार ने उसके अनुभव उपयोग करने की दृष्टि से राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान की पूर्ण योजना बना का कार्य उस संस्था को सौंप दिया था। गोखले विद्यालय पूना का भी का इस क्षेत्र में रहा है इसलिए उसकी भी योजना बनाने और न्यादर्श निश्चि करने में सहायता ली गई थी। इसके लिए सन् १९५० में भारत सरकार २५,००,००० रुपयों की स्वीकृति प्रदान की और इस राष्ट्रीय न्यादर्श अनु संधान का प्रथम चक्र १९५० अक्टूबर में प्रारम्भ हुआ और मार्च सन् १९५ तक रहा। सन् १९५३ के मध्य तक इस अनुसंधान के ५ चक्र पूरे होचुके और छठा शुरू किया गया, यद्यपि अभी सब की रिपोर्टें छप नहीं सकीं हैं

राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान एक क्रमबद्ध अनुसंधान श्रंखला है और इसके द्वारा समंकों के संकलन में 'वार्त्तालाप रीति' (Interview Method) का प्रयोग किया जाता है। प्रगणकों को घर घर और खेतों में जाकर आवश्यक समंक एकत्र करने होते हैं। इस समय ऐसे कार्यकर्त्ताओं की संख्या ६०० के लगभग है। इन अनुसंधानों का कार्यक्रम विशद है पर प्रत्येक चक्र में आवश्यकतानुसार परिवर्तन किया जा सकता है।

इस अनुसंधान के लिए समस्त देश को २५० भौगोलिक स्तरों में बाँटा गया है। पहले तीन चक्रों में गाँवों को सीधे ही स्तरों में चुन लिया गया था परन्तु बाद के चक्रों में प्रत्येक जिले में से दो तहसील और फिर प्रत्येक तहसील में से दो गाँव छाटे गए। तीसरे चक्र के बाद से इस अनुसंधान का झुकाव गाँवों से शहरों की ओर अधिक हो गया है। शहरों में आकृति के अनुसार स्तरंतरण के पश्चात् जनगणना के ब्लाकों में से न्यादर्श-प्रवरण किया गया है।

राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान के प्रथम चक्र में १८३३ गाँवों का न्यादर्श लिया गया था जिसको दो भागों में विभाजित किया गया। एक विभाग ११८९ गाँवों का भारतीय सांख्यिकीय संस्था, कलकत्ता और दूसरा ६४४ गाँवों का विभाग गोखले राजनीतिक और आर्थिक विद्यालय पूना को सौंप दिये गए। पहले विभाग में निम्नांकित चार अनुसूचियों का प्रयोग किया गया।

(१) ग्रामीण अनुसूचियाँ जिनमें गृहस्थी, भूमि उपयोग, मूल्य समंक और कुशल एवं अकुशल श्रमिकों की भृत्ति के सम्बन्ध में सूचना माँगी गई (२) गृहस्थी अनुसूचियाँ (नं० १) जिनमें आर्थिक स्थिति, विभिन्न-वर्गी भूमि, आयु, जीवन निर्वाह, नौकरी, स्त्री, पुरुष इत्यादि की सूचनाएँ माँगी गई (३) गृहस्थी अनुसूचियाँ (नं० २) जिनमें कृषि और पशुपालन, उद्योग धन्धे, व्यापार, सेवाएँ और पेशे इत्यादि की सूचनाएँ माँगी गई और (४) गृहस्थी अनुसूचियाँ (नं० ३) जिनमें खाद्य, पेय पदार्थों, लकड़ी एवं रोशनी, मकान भाड़ा, कपड़े इत्यादि के सम्बन्ध में सूचनाएँ माँगी गई। ६४४ गाँवों के दूसरे विभाग में (जिसका काम गोखले संस्था ने किया) बिल्कुल दूसरे प्रकार की अनुसूचियों का प्रयोग किया गया जिन्हें 'पूना अनुसूचियाँ (Poona Schedules)' कहते हैं। यद्यपि ये अनसूचियाँ अर्थ–सामाजिक आँकड़ों को एकत्र करने के लिए स्वतन्त्र रूप से चुनी गई थी, कलकत्ते की अनुसूचियों

की अपेक्षा कम विशद थी। दोनों ही विभागों के कार्य आरम्भ होने में अन्तर था और इस समय के अन्तर के कारण आशा की जाती थी कि पूना के प्रतिफल कलकत्ते के प्रतिफलों की जाँच होगी । परन्तु यह केवल भ्रम ही रहा ।

राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसन्धान पर कुछ आरोप लगाए जाते हैं जो निम्न-लिखित हैं:—

(१) ये वार्त्तालाप रीति पर आधारित होने के कारण केवल एक विचारों की खोज मात्र (Opinion Survey) हैं। यह विचार भ्रामक है क्योंकि यद्यपि वार्त्तालाप प्रणाली में प्रगणक प्रत्येक व्यक्ति के पास जाकर समंक प्राप्त करते हैं उनका तात्पर्य तथ्यों का संकलन होता है न कि विचारों का। इसके अतिरिक्त भारतवर्ष ऐसे निरक्षर देश में यही एक पद्धति है जिसके द्वारा महत्वपूर्ण समंक एकत्र किए जा सकते हैं।

(२) राष्ट्रीय आय कमेटी का आरोप है कि राष्ट्रीय आय के अनुमान के लिए उत्पादन और आय दोनों ही से संबंधित समंकों की आवश्यकता होती है और राष्ट्रीय अनुसंधान के प्रथम चक्र द्वारा इन विषयों पर प्रदत्त समंक न तो पर्याप्त ही हैं और न यथार्थ ही। अगले चक्रों के समंक अभी तक प्रकाशन के पूर्व की क्रिया में ही लगे हैं।

(३) राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान संगणना प्रणाली को हटा नहीं सकता क्योंकि राष्ट्रीय-आय-गणना और अन्य नीति-निर्धारण से पूर्ण समंकों की आगे आवश्यकता पड़ेगी जोकि ये अनुसंधान न दे सकेगा।

(४) राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान के पहले और दूसरे चक्रों की रिपोर्टों में बहुत अन्तर हैं और इस कारण उनका नीति-निर्धारण में महत्व विनष्ट हो जाता है।

(५) पहले ही चक्र के दो विभागों की रिपोर्टों में साँख्यिकीय ढंग और कार्य प्रणाली के विषय में जो मतभेद रहा है उससे भी इस अनुसंधान का महत्व कम हो गया है।

(६) राष्ट्रीय आय कमेटी के मतानुसार राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान ने जो उपभोक्ता के परिव्यय सम्बन्धी समंक एकत्र किए है और उनके सम्बन्ध में संतोष प्रकट किया है वह गलत है क्योंकि यह कार्य इतना आसान

नहीं है जितना कि राष्ट्रीय अनुसंधान ने समझ लिया है। किसी भी अन्य देश में इस तरह का प्रयत्न नहीं किया जा सका है और इतने कम समय में भारत ऐसे देश में आर्थिक अभाव रहते हुए भी संतोषप्रद समंक एकत्र करना संशयात्मक है।

(७) राष्ट्रीय अनुसंधान के विभिन्न चक्रों की रिपोर्टों को देखने से मालूम पड़ता है कि यह 'प्रयत्न और विभ्रम' (Trial and Error) की नीति को अपना रहा है। यह अवश्य ही कहा जा सकता है कि यदि यह अनुसंधान चलता रहा तो इसके सभी चक्रों के अन्त में राष्ट्रीय अनुसंधान की एक विश्वस्त प्रणाली का जन्म होगा। इसके द्वारा प्रदत्त समंकों का जाँच सम्बन्धी महत्व हो सकता है।

राष्ट्रीय अनुसंधान की सफलता के लिए राष्ट्रीय आय कमेटी ने अपनी दूसरी रिपोर्ट में निम्नलिखित सुझाव पेश किया है जो ध्यान देने योग्य है—"राष्ट्रीय आय का अनुमान लगाने का कार्य वास्तव में व्यवहारिक अर्थ-शास्त्र के क्षेत्र में आता है। समंकों के संकलन, अनुसंधान की योजना बनाने और समंकों के विश्लेषण इत्यादि में सांख्यिकों और अर्थशास्त्रियों का समान स्थान है। राष्ट्रीय अनुसंधान का कार्य अभी केवल भारतीय सांख्यिकी संस्था कर रही है जोकि एक सांख्यिकीय संस्था है। यदि राष्ट्रीय अनुसंधान को पूर्ण रूप से उपयोगी खोज बनाना है तो उसे अर्थशास्त्रियों की भी सलाह लेनी पड़ेगी। वास्तव में योजना-आयोग ने एक अनु-संधान समिति बनाई है जिसमें अनेक, सांख्यिक, अर्थशास्त्री और समाज शास्त्री हैं। हमारा यह सुझाव ह कि राष्ट्रीय अनुसंधान और इस अनु-संधान समिति के बीच में एक घनिष्ट सम्पर्क स्थापित होना चाहिए और राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान के निमित्त एक मिली जुली सभा बनानी चाहिए।"

अखिल भारतीय ग्रामीण-साख अनुसंधान

रिजर्व बैंक ने फरवरी सन् १९५१ में एक अर्थशास्त्रियों और सहकारी समितियों के संचालकों की एक कान्फ्रेंस बुलाई जिसने यह सुझाव दिया कि एक ग्रामीण साख अनुसंधान किया जाना चाहिए। अगस्त सन् १९५१ में एक कमेटी बनाई गई जिसका कार्य था कि अखिल भारतवर्षीय अनुसंधान की योजना तैयार करें और उसके तदनुसार अनुसंधान करके, उसके प्रतिफलों के आधार पर

सुझाव रखे। इस कमेटी ने प्रश्नावलियाँ बनाई, क्षेत्रों का चुनाव किया, निरीक्षकों को शिक्षा दी और प्रगणकों को आदेश दिये। अनुसंधान का कार्य प्रमुख रूप से बैंक के अनुसंधान अफसरों के द्वारा सम्पन्न हुआ। इस अनु-संधान की रिपोर्ट तीन विभागों में छपी है:—

(अ) अनुसंधान रिपोर्ट, (ब) साधारण रिपोर्ट और (स) प्रविधि सम्बन्धी रिपोर्ट (Technical Report)। अनुसंधान रिपोर्ट में खोज की योजना, व्यवस्था और विभिन्न स्तरों पर योजना में महत्वपूर्ण परिवर्तनों के सम्बन्ध में सूचनाएँ हैं। साधारण रिपोर्ट में साहूकारों, बैंकों, ग्रामीण अर्थ-मध्यस्थ, ग्रामीण साख, कर्जा इत्यादि के सम्बन्ध में समंक हैं। प्रविधि रिपोर्ट अभी छप नहीं सकी है।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. Discuss the importance of the Study of Statistics in the present circumstances in India.

भारतवर्ष में आज की परिस्थिति में सांख्यिकीय अध्ययन का महत्व समझाइये।

2. (a) State what you can about Indian Vital Statistics. Do they throw any light on the causes of India's poverty?

भारत के जन्म-मृत्यु सम्बन्धी आँकड़ों पर प्रकाश डालिये और बतलाइये कि वे भारतवर्ष की गरीबी कहाँ तक दर्शाते हैं।

(b) Discuss the available sources of information in respect of India's trade both foreign and inland ?

भारतवर्ष के आन्तरिक एवं वाह्य व्यापार से सम्बन्धित सूचनाओं के प्राप्य उद्गमों पर प्रकाश डालिये।

3. Write a critical note on the Census of India.

भारतवर्ष की जनगणना पर एक समालोचनापूर्ण लेख लिखिये।

4. Write a short note on (a) Official Statistics in India or (b) War and Statistics.

'भारतवर्ष की राजकीय समंक-सामग्री' या 'युद्ध और समंक' पर एक लेख लिखिये।

5. Discuss the Meaning and Scope of Statistics. Show the importance of Statistics in any scheme of Economic Planning in India.

सांख्यिकी के अर्थ एवं क्षेत्र का वर्णन कीजिए। भारतवर्ष के अर्थ-नियोजन में सांख्यिकी का महत्व समझाइये।

6. Discuss the main sources of errors in statistics relating to Area and Yield of Principals Crops in India. How can these errors be avoided?

भारतवर्ष के प्रमुख फस्लों के क्षेत्रफल और उत्पादन सम्बन्धी समंकों में प्रविष्ट होने वाले विभ्रमों के उद्गमों का वर्णन कीजिए। ये विभ्रम किस प्रकार दूर किये जा सकते हैं।

7. Give a few examples of the misuse of statistics in India. How can the wrong use of statistics be avoided.

भारत में समंकों के दुरुपयोग के कुछ उदाहरण दीजिये। समंकों का दुरुपयोग किस प्रकार दूर किया जा सकता है।

8. How far are the Indian Crop Forecasts reliable? How can their reliability be increased?

भारतवर्ष के फस्लों के पूर्वानुमान कहाँ तक विश्वसनीय हैं और उनकी विश्वसनीयता कैसे बढ़ाई जा सकती है।

9. (a) What precautions should be taken in the use of published statistics?

मुद्रित सामग्री के प्रयोग में किन किन बातों के प्रति सावधान रहना चाहिए।

(b) Give a brief account of the Population Census and the Price Index Numbers in India?

भारतवर्ष की जनगणना और मूल्य निर्देशांकों के समंकों का एक संक्षिप्त विवरण दीजिए।

10. What methods are mainly used for estimating the National Income of a country? How far are the recent estimates of National Income of India reliable ?

किसी भी देश की राष्ट्रीय आय को नापने के कौन कौन से ढंग हैं। अभी हाल के अनुमानों की विश्वसनीयता के सम्बन्ध में अपने विचार प्रस्तुत कीजिए।

11. Give a brief account of the present position regarding Agricultural Statistics in India and comment upon their adequacy.

भारत के कृषि-समंकों की वर्त्तमान स्थिति का एक संक्षिप्त विवरण दीजिए और उनकी पर्याप्तता की समालोचना कीजिए।

12. Explain the main defects of the Statistics of Prices and Wages in India. How can these defects be removed ?

भारतवर्ष के मूल्य और भृत्ति संबन्धी समंकों की प्रमुख त्रुटियों का वर्णन कीजिए। ये त्रुटियाँ किस प्रकार दूर की जा सकती हैं।

13. Give a few instances of Biassed Errors in the Publications of the Government of India. How can these errors be avoided ?

भारतवर्ष के राजकीय-प्रकाशनों में प्रविष्ट अभिनत-विभ्रमों के कुछ उदाहरण दीजिए और बतलाइये कि उन्हें कैसे दूर किया जा सकता है।

14. Bring out clearly the difference between a Census and a Sample enquiry and discuss briefly their comparative advantages. State the difficulties which led the Govt. of India recently to take up a village sample survey.

संगणना और न्यादर्श प्रणालियों में अन्तर स्पष्ट कीजिए और उनके गुणों का वर्णन कीजिए। उन कठिनाइयों का वर्णन कीजिए जिनके कारण अभी हाल में ही भारत सरकार को 'ग्रामीण न्यादर्श अनुसंधान' के लिए उद्यत होना पड़ा है।

अध्याय १५.

समंकों का आकर्षक प्रदर्शन

साँख्यिकी के महान उद्देश्यों में से तथ्यों का यथार्थ प्रदर्शन, तुलनात्मक अध्ययन और सुगम स्वरूप बहुत महत्वपूर्ण है। साँख्यिकीय तथ्यों का प्रदर्शन तीन प्रकार से किया जाता है—(अ) सारणी द्वारा (ब) चित्र द्वारा और (स) बिन्दुरेखीय वक्रों द्वारा। सारणीकरण का हम विशद अध्ययन पिछले अध्याय में कर चुके हैं। समंकों के आकर्षक प्रदर्शन के अन्य दोनों ढंग भी सारिणीयन पर ही आधारित हैं। जिस प्रकार वर्गीकरण से सारणीकरण द्वारा तथ्यों का अधिक स्पष्ट विवेचन हो सकता है उसी प्रकार सारणी को चित्रों और बिन्दुरेखीय वक्रों द्वारा अधिक आकर्षक, तुलनीय और स्मरणीय बनाया जा सकता है। चित्रों और वक्रों में शिक्षण, विज्ञापन, आदि गुणों के अतिरिक्त जनसाधारण के लिए कौतूहल निर्माण करने की क्षमता होती है जिसके कारण वे उन्हें लम्बे विपुल अंकों वाले सारणीयों की अपेक्षा अधिक समय तक स्मरण रख सकते हैं। परन्तु चित्र और वक्र दृष्टि-वर्धक यंत्र हैं दृष्टि दान नहीं कर सकते। उनका प्रयोग आवश्यक है परन्तु उनका आधार सारणीयन है।

चित्र और वक्र दोनों ही के उद्देश्य समान हैं परन्तु साधारणतः चित्र विच्छिन्न-माला में और वक्र अविच्छिन्न-माला में उपयोगी सिद्ध होते हैं। कालिक-मालाओं को प्रायः रेखा-चित्रों द्वारा दिखलाना उचित होता है। चित्र ज्यामिति के चित्रों के अनुरूप बनाये जाते हैं और वक्र दो समान और स्थिर रेखाओं के संबन्ध में खींचे जाते हैं जिन्हें कोटि-अक्ष (Ordinate) और भुजाक्ष (Abscissa) कहते हैं। एक अच्छे चित्र या वक्र में निम्नलिखित गुण पाये जाने चाहिए—

(१) वह दृष्टि मात्र में ही तथ्यों का वास्तविक अर्थ समझा सकें।
(२) महत्वपूर्ण तथ्यों को महत्व देते हों।
(३) आकर्षक हों।
(४) तुलनात्मक-क्षमता-युक्त हों।

उपरोक्त उद्देश्यों की पूर्ति के लिए इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि चित्र या वक्र न बहुत बड़ा और न बहुत छोटा हो, उसके प्रमुख भाग को मध्य स्थान में दिखाया जाए, जहाँ आवश्यक हो। उनके तात्पर्य को समझाने के लिए टिप्पणी दे दी जाए और संकेताक्षरों का अर्थ पूर्णरूप से स्पष्ट हो।

चित्रों द्वारा समंकों का प्रदर्शन

चित्र प्रायः कोटि–अक्ष और भुजाक्ष खींच कर उनके आधार पर खींचे जाते हैं और इन्हीं अक्षों पर चित्र की लम्बाई और चौड़ाई के अनुमाप दिखाए जाते हैं। चित्रों के अनुमाप सारणी में दिए गए अंकों के आकार पर निर्भर रहते हैं। अनुमाप लेते समय ध्यान रखना चाहिए कि ऐसा अनुमाप लिया जाए कि आकर्षक चित्र बनने के अतिरिक्त सारणी के महत्वपूर्ण और महत्वहीन अंकों को तदनुरूप महत्व दिया जा सके। चित्रों की सुन्दरता का ध्यान प्रमुख रूप से रखना चाहिए क्योंकि सुन्दर वस्तु की प्रतिमा अधिक देर तक मस्तिष्क में रह सकती है।

चित्रों के भेद

चित्रों में बिमा (Dimensions) के अनुसार भेद किए जाते हैं और चित्र प्रायः तीन प्रकार के होते हैं—

(अ) एक बिमा चित्र—दण्ड या रेखायें।

(ब) द्विबिमा चित्र—आयत, वर्ग, और वर्तुल चित्र।

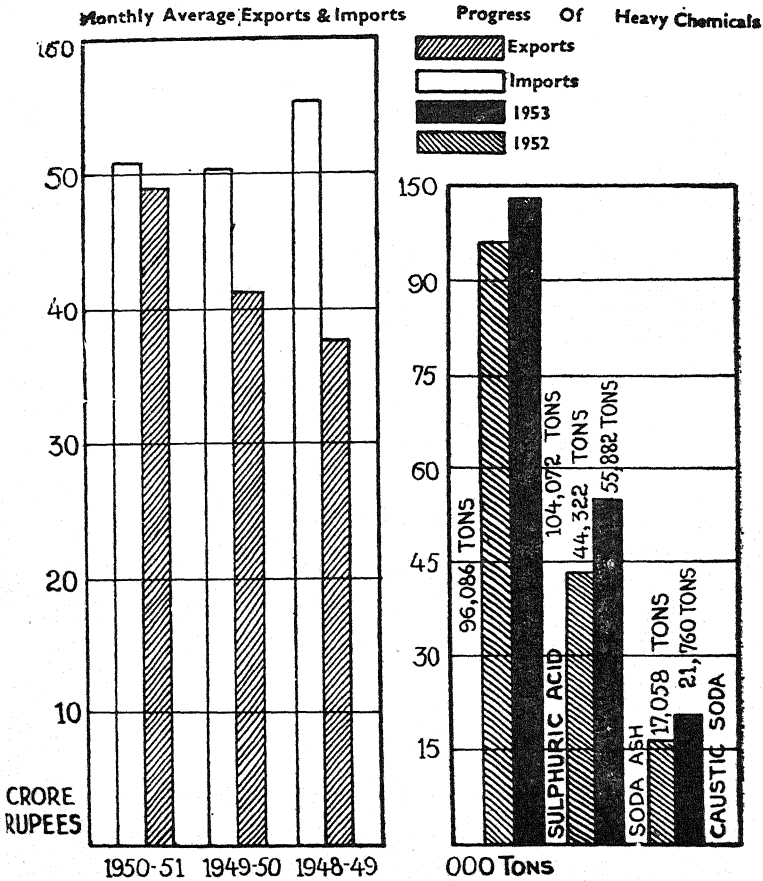
(स) त्रिबिमा चित्र—घन (Cubes), स्तम्भ (Cylinders), इष्टका चित्र (Blocks)

उपरोक्त चित्रों के अतिरिक्त सामग्री के प्रदर्शन में चित्र-लेखों (Pictograms) सांख्यिकीय नक्शों (Cartograms) इत्यादि का भी प्रयोग किया जाता है। अब हम उपरोक्त प्रकार के चित्रों का वर्णन करेंगे।

दण्ड चित्र (Bar Diagrams)

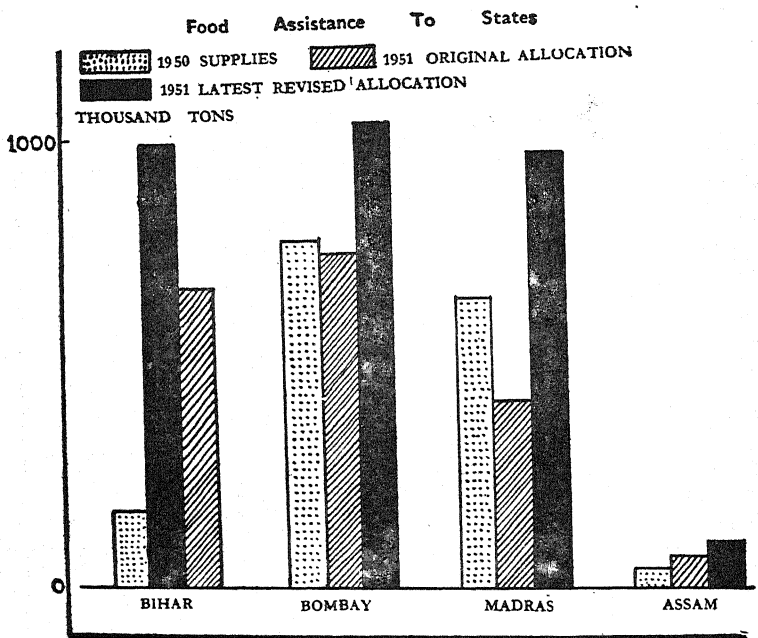
दण्ड चित्रों का प्रयोग उस समय किया जाता है जबकि सामग्री में एक बिमा को ही महत्व देना हो अर्थात् यदि लम्बाई को महत्व दिया जाए तो चौड़ाई महत्वहीन हो और इसी प्रकार चौड़ाई को महत्व देने पर लम्बाई महत्वहीन हो। इन चित्रों का प्रयोग प्रायः कालिक और स्थानिक परिवर्तनों

के तुलना करने में किया जाता है विशेष रूप से जब सामग्री विच्छिन्न हो और अविच्छिन्न सामग्री के प्रदर्शन में वक्रों का प्रयोग ही उत्तम माना गया है । दण्ड चित्रों के साथ में संकेताक्षरों का विवरण और विवरणात्मक संदर्भ दिए जाने चाहिए ।

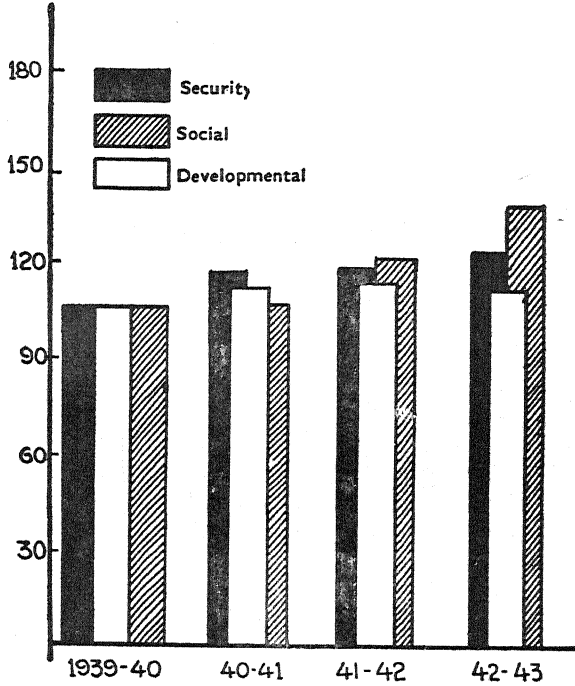
चित्र संख्या १ (अ) में आयात और निर्यात के मासिक औसत की तीन वर्षों तक तुलना की गई है और विभिन्न रंग के दण्ड विभिन्न वस्तुयें दर्शाते हैं और चित्र १ (ब) में कई वस्तुओं के उत्पादन की दो वर्षों तक

चित्र १ (अ)

चित्र १ (ब)

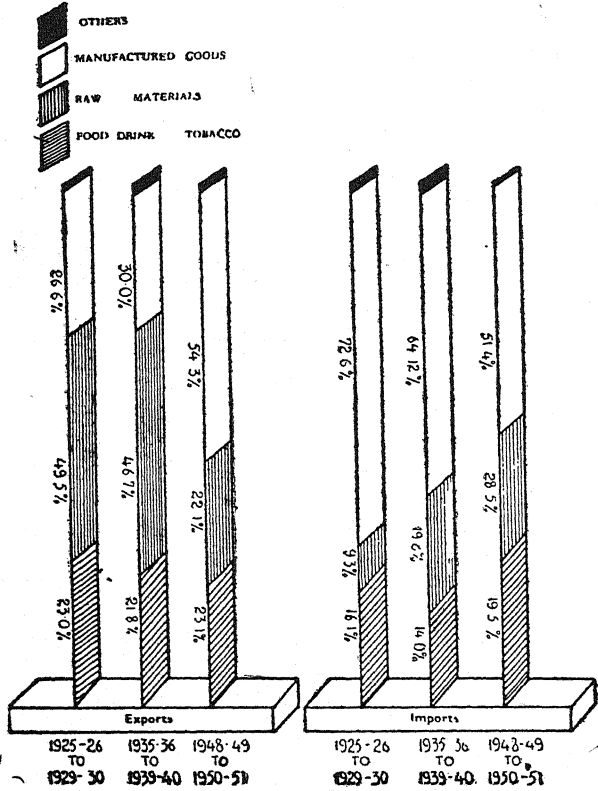
तुलना की गई है और विभिन्न रंग के दण्ड विभिन्न वर्ष दर्शाते हैं। इन चित्रों में केवल एक बिमा (लम्बाई) का स्वतन्त्र महत्व है यद्यपि दूसरे (बिमा) का तुलना करने के लिए महत्व हो गया है।

दण्ड चित्र संख्या २ में विभिन्न रंग के दण्डों से केन्द्र द्वारा राज्यों की सन् १९५१ में खाद्य सम्बन्धी सहायता के तीन पहलुओं को विभिन्न रंगों से दिखलाया गया है। ये स्थानिक तुलना का एक उदाहरण है।

दण्ड चित्र २

दण्ड चित्र संख्या ३ में उत्तर प्रदेश की सरकार द्वारा सामाजिक, उत्थान और सुरक्षा सम्बन्धी कार्यों पर ४ वर्षों में खर्च किए गए प्रति व्यक्ति धन को तुलनात्मक रूप से दिखलाया गया है और एक दण्ड के अन्दर दूसरा रख कर आकर्षण की मात्रा बढ़ा दी गई है।

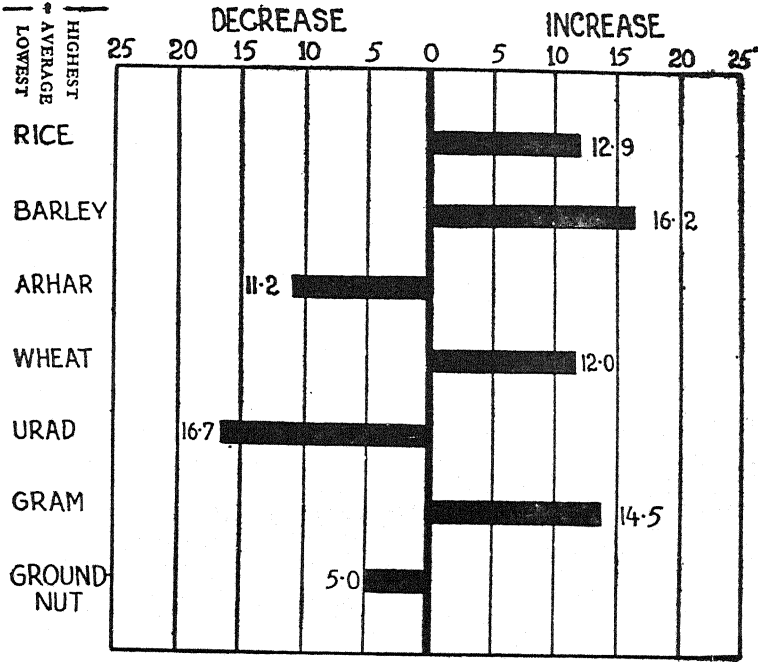
उत्तरप्रदेश के व्यय-निर्देशांक प्रति व्यक्ति

दण्ड चित्र ३

दण्ड चित्र संख्या ४ में कई वर्षों के लिए भारतवर्ष के विदेशी व्यापार के विभिन्न अंगों को दण्ड चित्रों को विभाजित करके दिखलाया गया है। दण्ड चित्रों को साधारण स्वरूप में न सजाकर नए ढंग से रखने से आकर्षण में भी वृद्धि हुई है। इस प्रकार के दण्ड चित्र को खींचने के लिए कुल व्यापार के अंक को १०० मानकर प्रत्येक अंग के लिए प्रतिशत मालूम कर लिए जाते हैं और फिर उन्हीं के अनुसार दण्डों को विभाजित करके विभिन्न रंगों से रंग दिया जाता है। ऐसे दण्ड चित्र से पूर्ण विदेशी व्यापार की तुलना के अतिरिक्त व्यापार के विभिन्न अंगों के परिवर्त्तनों का भी निरीक्षण किया जा सकता है।

भारत के विदेशी व्यापार के विभिन्न अङ्गों की
प्रतिशत घट-बढ़

दण्ड चित्र ४

दण्ड चित्र संख्या ५ में मूल्यों के प्रतिशत घट–बढ़ को विभिन्न दिशाओं में दण्ड खीचकर दिखलाया गया है। ऐसे दण्ड चित्र को द्विएकक-दण्ड-चित्र कहते हैं।

साधारण तुलना करते समय अनुप्रस्थ (Horizontal) या उदग्र (Vertical) दण्ड चित्र खीचने के निमित्त कोई स्थायी नियम नहीं है परन्तु

द्विएकक दण्ड-चित्र

चित्र ५

साधारणत: यदि किसी सारणी में महत्वपूर्ण समंक अनुप्रस्थ दशा में हैं तो अनप्रस्थ और यदि उदग्र दशा में है तो उदग्र दण्ड चित्रों का प्रयोग करना चाहिए। इसके अतिरिक्त जनसाधारण की सुविधा और तुलनात्मक सुविधा का भी ध्यान रखना चाहिए। प्राय: उदग्र दण्ड चित्रों का प्रयोग अंकात्मक सामग्री और अनुप्रस्थ दण्डों का प्रयोग, गुणात्मक या कालिक सामग्री में किया जाता है। यदि घट-बढ़ दिखलाना अभीष्ट हो तो द्विएकक दण्ड चित्र का प्रयोग किया जाता है।

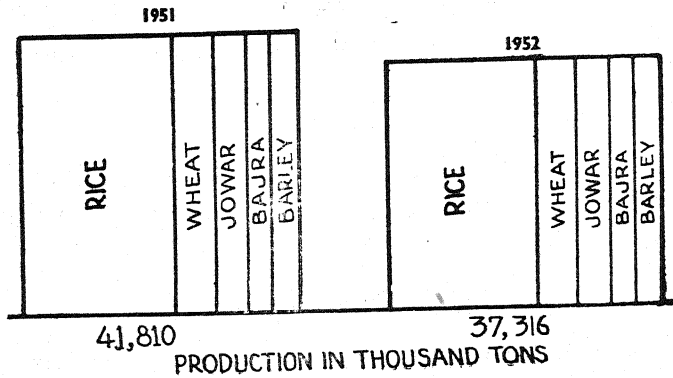
द्विविमा चित्र—क्षेत्रीय चित्र

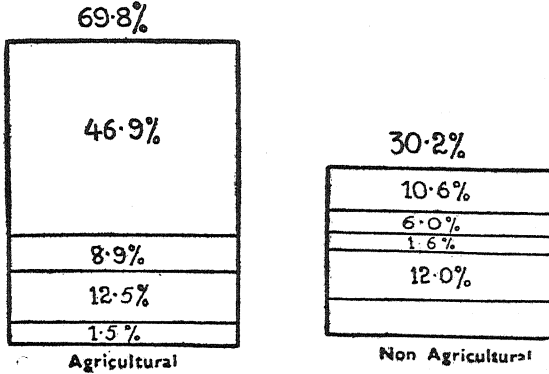
क्षेत्रीय चित्रों में लम्बाई और चौड़ाई को पृथक महत्व न देकर उनके गुणनफल अर्थात् क्षेत्र को महत्व दिया जाता है। इन चित्रों का आकार

क्षेत्रफल के द्वारा सामग्री की विपुलता को दर्शाता है। द्विबिमा चित्रों का प्रयोग प्राय: उस समय किया जाता है जबकि एक ही चित्र पर कई चीजों को दिखलाना हो, उदाहरणार्थ, उत्पादन-व्यय, लाभ, मूल्य इत्यादि। ऐसी दशा में इनका प्रयोग दण्ड चित्रों की अपेक्षा अधिक उपयोगी सिद्ध होता है। द्विबिमा चित्रों का प्रयोग ऐसी स्थिति में भी किया जाता है जबकि समंकों के परस्पर अन्तर बहुत अधिक हों और उन्हें दण्ड चित्रों द्वारा प्रदर्शित करना असम्भव हो।

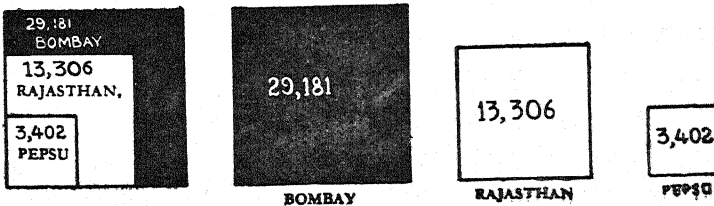
आयत चित्र (Rectangles)

जब दो बिमाओं को महत्व देना हो तो आयत चित्र खींचे जाते हैं। आयत चित्र दो प्रकार के हो सकते हैं— (अ) अविभाजित आयत और (ब) विभाजित आयत। जब बहुत बड़े समंकों की परस्पर तुलना करनी होती है तो अविभाजित आयतों से काम चल सकता है परन्तु जब उनके विभिन्न अंगों या पदों की तुलना करना हो तो विभाजित आयत का प्रयोग किया जाता है। विभाजित करते समय दण्ड विभाजन की रीति का ही उपयोग किया जाता है।

चित्र संख्या ६ में सन् १९५१ और १९५२ में कुछ फसलों की उपज और कुल उपज की तुलना की गई है। ऐसा करने में विभाजित आयत का प्रयोग किया गया है।

चित्र ६

चित्र संख्या ७ में १९५१ की जनगणना के ग्रामीण और अग्रामीण पेशों के जीवन निर्वाह के अनुसार किए गए विभागों को एक विभाजित आयत द्वारा दिखलाया गया है ।

चित्र ७

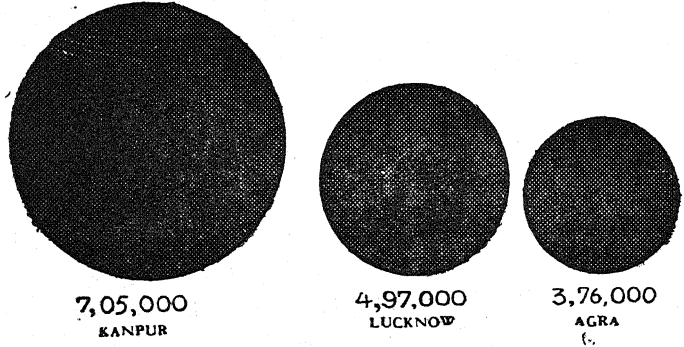
वर्ग-चित्र (Squares)

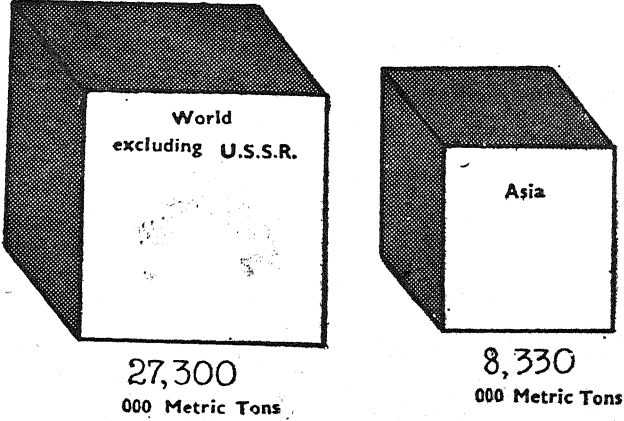
क्षेत्रफलों की तुलना वर्गों द्वारा भी की जाती है। वर्गों की लम्बाई चौड़ाई बराबर होने के कारण आकर्षण अधिक होता है। उन्हें एक दूसरे के समक्ष या एक दूसरे के अन्दर रखकर तुलना की जा सकती है। वर्ग बनाते समय वर्ग की भुजा निकालने के लिए दिए हुए समंकों के वर्गमूल निकालना चाहिए और उनके अनुपात में भुजा की लम्बाई लेनी चाहिए। निम्नलिखित चित्र में भारत के तीन राज्यों की जनसंख्या सन् १९५१ की जनगणना के आधार पर वर्गों द्वारा दर्शायी गई हैं। इन जनसंख्याओं का परस्पर अन्तर इतना है कि दण्ड चित्रों का प्रयोग ठीक न होगा।

चित्र ८

वर्तुल चित्र (Circles)

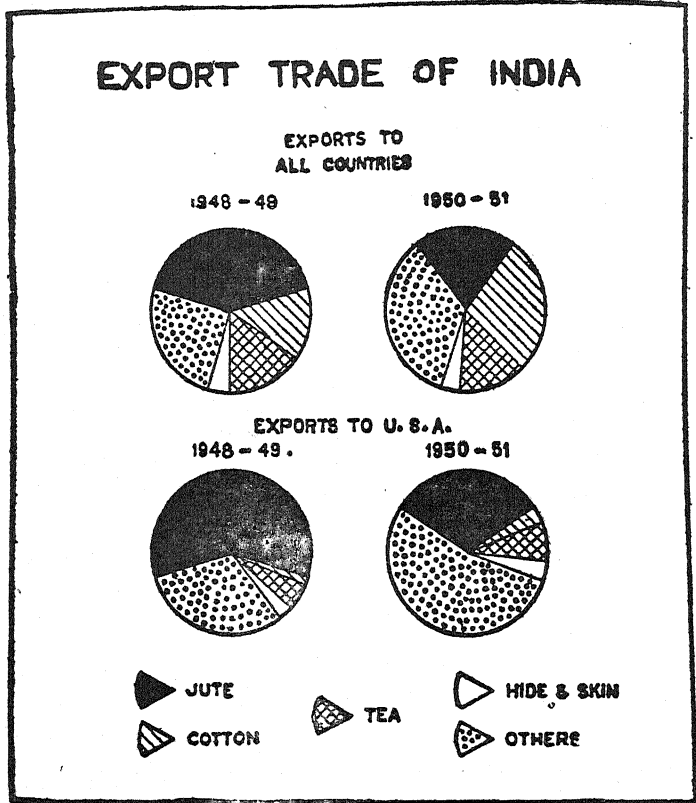
द्विबिमा सामग्री को वर्तुल चित्रों द्वारा भी दिखलाया जा सकता है। ये भी क्षेत्रीय चित्र हैं और इनके क्षेत्रफलों द्वारा तुलना की जाती है। वर्तुल चित्रों को आसानी से खींचा जा सकता है और उन्हें देखते ही अन्तर ठीक समझ में आ जाते हैं। वृत्त बनाते समय समंकों के वर्गमूल लेकर उनके अनुपात में वृत्त की त्रिज्या (Radius) ले ली जाती है। तुलना करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि सभी वर्तुलों के मध्य-बिन्दु एक ही लाइन में हों। नीचे के चित्र में उत्तरप्रदेश के ३ बड़े नगरों की जनसंख्याओं को वर्तुल चित्रों द्वारा दिखलाया गया है।

चित्र ९

त्रिबिमा चित्र

ये चित्र घनफल द्वारा सामग्री का प्रदर्शन करते हैं और बक्स, इष्टका, घनाकार या गेंद की शकल के हो सकते हैं। क्षेत्रीय चित्रों के समान ही त्रिबिमा चित्रों में स्थान की बचत, आकर्षण और प्रदर्शन की विभिन्नता, आदि, गुण पाये जाते हैं। घन, गोले या इष्टका बनाते समय समंकों के घनमूल निकाले जाते हैं और उनके अनुपात से उनके भुजाओं की लम्बाई ले ली जाती है। इनकी सहायता से बहुत बड़े समंकों की तुलना की जा सकती है।

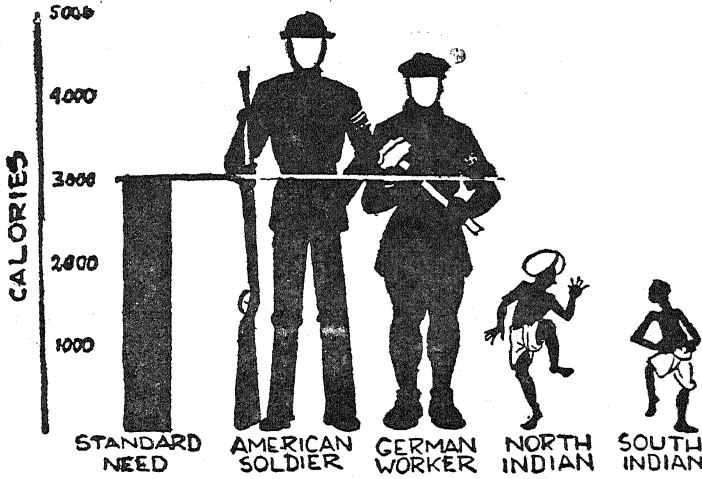
नीचे के चित्र में सन् १९३४–३८ में एशिया और विश्व में गन्ने का उत्पादन घनों द्वारा दिखलाया गया है। इस चित्र को देखने से ज्ञात होता है कि कितनी बड़ी संख्याएँ कितने कम स्थान में कितनी सुन्दरता से दिखलाई जा सकती हैं।

चित्र १०

कोणीय चित्र (Angular Diagrams)

जब समग्रों के साथ साथ उनके अंगों की भी तुलना करना हो या किसी एक समग्र में उसके अंगों की महत्ता समझाना हो तो कोणीय चित्र की सहायता ली जाती है जिसमें आयत और वर्गों के समान ही वर्तुल चित्र को भी विभिन्न भागों में विभाजित किया जाता है। यदि किसी वर्तुल चित्र को विभाजित करना हो तो उसकी एक त्रिज्या (Radius) खींच ली जाती है और फिर समग्र के विभिन्न अंगों के प्रतिशत निकाल कर उन्हें ३·६ से गुणा करके उनके कोण (Angles) अंश में मालूम कर लिये जाते हैं। खींची हुई त्रिज्या पर क्रमशः एक एक अंग के कोण को प्रोट्रैक्टर की सहायता से खींचते जाते हैं और इस प्रकार वर्तुल चित्र के उतने ही विभाग बन जाते हैं जितने कि एक समग्र में भाग हों। इन विभाजित वृत्तों की सहायता से समग्रों और उनके अंगों की तुलना अच्छे प्रकार से की जा सकती है। अगले पृष्ठ के चित्र में ऐसे ही विभाजित वर्तुलों द्वारा १९४८-४९ और १९५०-५१ में किया गया भारत से सभी देशों और अमरीका को निर्यात और उसके अंगों को दिखलाया गया है।

चित्र ११

चित्रलेख (Pictograms)

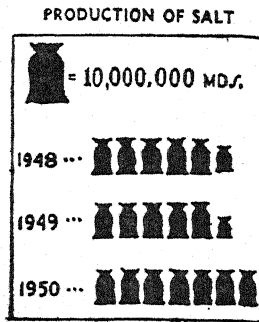
चित्रलेख वास्तव में चित्रों के द्वारा लिखे हुए तथ्य हैं जिनमें चित्रों के बराबर आकर्षण, सुबोध और सरल प्रदर्शन और सुन्दरता होती है। चित्रलेखों में तथ्यों से अधिक प्रदर्शन की सुन्दरता को महत्व दिया जाता है इस कारण समग्र के महत्वपूर्ण अंकों का प्रदर्शन किया जाता है और महत्वहीन तथ्य छोड़ दिये जाते हैं। चित्रलेख भी दो प्रकार के होते हैं। एक तो वे जिनमें सामग्री की विपुलता को चित्रों के आकार द्वारा व्यक्त किया जाता है और दूसरे वे जिनमें सामग्री की विपुलता को चित्रों की विपुलता के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

नीचे दिए गए चित्रलेख में अमेरिकन सिपाही, जर्मन श्रमिक और एक उत्तर भारतीय और एक दक्षिण भारतीय के द्वारा खाने की शक्ति की तुलना की गई है । ये पहिले प्रकार का चित्रलेख है ।

चित्र १२ (अ)

दूसरे प्रकार के चित्रलेख का उदाहरण नीचे दिया हुआ है जिसमें सन् १९४८, १९४९ और १९५० में नमक का उत्पादन दिखलाया गया है और सामग्री की विपुलता का प्रदर्शन बोरों की विपुलता द्वारा किया गया है । इस चित्र के एक बोरे के अर्थ में १०,०००,००० मन नमक है ।

यद्यपि चित्रलेखों के बनाने के लिए कोई स्थाई नियम नहीं प्रतिपादित किए जा सकते हैं परन्तु श्री रुडोल्फ मोडले के द्वारा सुझाए हुए निम्नलिखित नियम उल्लेनीय हैं:--

(१) व्यवहृत चिन्ह स्वयं-स्पष्ट होने चाहिए ।

(२) अधिक अंक अधिक चित्रों द्वारा दर्शाये जाना चाहिये ।

चित्र १२ (ब)

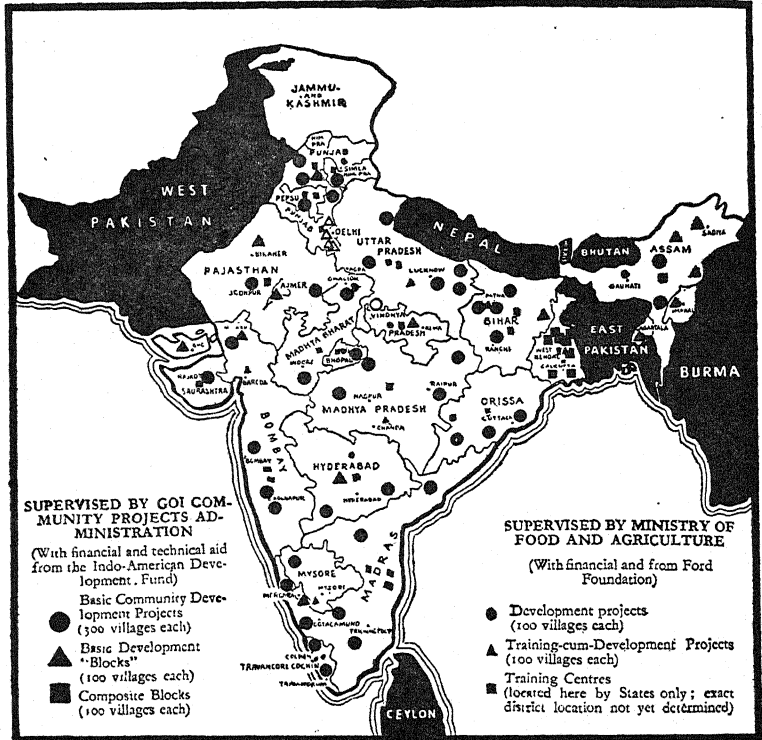
(३) व्यक्तिगत समंकों को चित्रलेखों द्वारा नहीं दिखलाना चाहिए और इनका प्रयोग केवल तुलना के लिए ही करना चाहिए।

(४) इनके द्वारा अनुमानित समंकों की तुलना की जा सकती है और प्रत्येक महत्वहीन अंक की नहीं।

साँख्यिकीय नक्शे (Cartograms)

सांख्यिकीय नक्शों में बिन्दुओं और रेखाओं का प्रयोग समंकों को दिखलाने के लिए किया जाता है। यदि किसी स्थान पर समंकों की आवृत्ति अधिक होगी तो वहाँ पर बिन्दुओं का जमाव उतना ही अधिक रखा जाएगा। रेखायें और बिन्दु के अतिरिक्त अन्य चिन्हों का भी प्रयोग किया जा सकता है। साँख्यिकीय नक्शे कई प्रकार के हो सकते हैं।

(अ) बिन्दु चित्र (ब) रंगीन नक्शे

(स) लाइनदार नक्शे और (द) आलपिनों के नक्शे

उपरोक्त विवरण से हम यह देखते हैं कि समंकों का प्रदर्शन एक कलाकार के समान किया जा सकता है परन्तु कलाकार के समान ही यह ध्यान में रखना चाहिए कि कल्पना की उड़ान में यथार्थता दूर न छूट जाए। सुन्दरता के लिए सांख्यिकीय प्रदर्शन में यथार्थता का बलिदान नहीं दिया जा सकता है।

वक्रों द्वारा समंकों का प्रदर्शन

वक्रों का साँख्यिकी में एक महत्वपूर्ण स्थान हैं और बिन्दुरेखीय प्रणाली में चित्रों के सभी गुणों के अतिरिक्त उनके अवगुण नहीं पाए जाते हैं अर्थात् यर्थाथता का बलिदान सुन्दरता के लिये नहीं होता। बिन्दुरेखीय प्रणाली की उपयोगिता निम्नलिखित विवरण से स्पष्ट हो जाती है:—

(१) बड़े समंकों और विशालकाय सारणीयों की अपेक्षा टेढ़ी मेढ़ी रेखाओं का मस्तिष्क पर अधिक स्थाई प्रभाव पड़ता है। उदाहरणार्थ, सांख्यिक ढंगों से अनभिज्ञ व्यक्ति किसी अस्पताल में किसी भी बीमार के बुखार का वक्र देखकर आसानी से याद रख सकता है कि किसी सप्ताह में उसकी दशा कैसी रही थी। इसी प्रकार किसी होटल के पास लगे हुए वक्र द्वारा साधारण व्यक्ति किसी भी उद्योग की प्रगति की कल्पना बड़ी सारणीयों की अपेक्षा अधिक अच्छी कर सकता है।

(२) वक्रों का तुलना करते समय एक अनोखा महत्व है और उनके द्वारा बड़ी आसानी से मूल्य-परिवर्त्तनों और जीवन-निर्वाह के स्तरों की तुलना की जा सकती है।

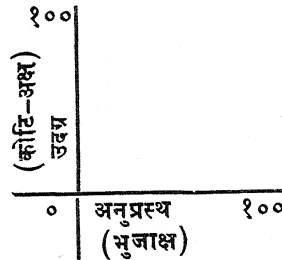
(३) भूयिष्ठक और अन्य स्थानिक मूल्यों (Positional Values) के मालूम करने में वक्रों का प्रयोग किया जा सकता है और गणितीय रीति द्वारा मालूम किए माध्यों की इस रीति द्वारा जाँच की जा सकती है।

(४) वक्रों के द्वारा बारम्बारता-मालाओं को बड़े अच्छे ढंग से दर्शाया जा सकता है और वे समग्र का प्रदर्शन करने के अतिरिक्त समग्र में बारम्बारता के वंटन के स्वरूप को भी समझाने में समर्थ सिद्ध होते हैं अर्थात् वक्रों द्वारा समग्र के अंक-वंटन का स्वरूप कि वह सामान्य, असंमित या प्रथुशीर्ष है, यह जाना जा सकता है।

(५) वक्रों का प्रयोग आन्तरगणन में भी किया जाता है और इसकी सहायता से समग्र के कुछ अज्ञात अंक भी मालूम किए जा सकते हैं।

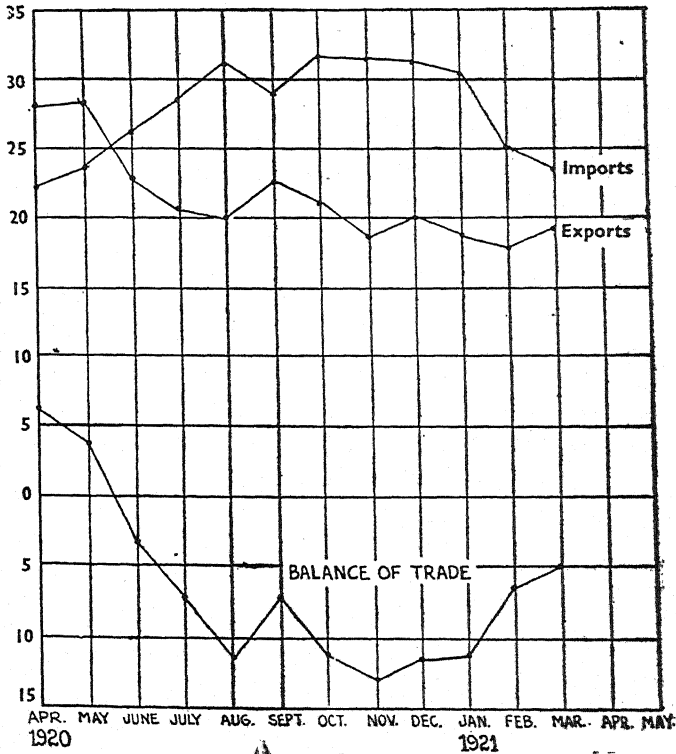
(६) वक्रों की सहायता से दो या अधिक समंक-मालाओं में सह-सम्बन्ध-ज्ञापन भी किया जा सकता है।

(७) वक्रों का कालिक या ऐतिहासिक समंक-मालाओं के विश्लेषण में एक बहुत बड़ा हाथ है। इनके आधार पर चक्रीय उच्चावचन, आर्वतिक परिवर्त्तन, इत्यादि, का अध्ययन किया जा सकता है। इसके द्वारा व्यवसायिक पूर्वानुमान भी लगाए जाते हैं।

वक्रों का महत्व समझ लेने के बाद हमें देखना है कि वक्र किस प्रकार बनाए जाते हैं। वक्र किसी भी एक घटना के दो पहलुओं के क्रमबद्ध परिवर्त्तन को दिग्दर्शित करता है इस कारण उसके प्रत्येक बिन्दु के दो पहलू होते हैं जिन्हें क्रमशः (य) और (र) कहा जा सकता है। इसी बात को दूसरे ढंग से यों कहा जा सकता है कि किन्हीं भी दो सम्बद्ध–मालाओं के तत्संवादी बिन्दुओं को बिन्दुरेख कागज पर प्रांकित करने से एक बिन्दु निकलता है और ऐसे ही सभी बिन्दुओं को मिला देने से एक वक्र प्राप्त हो जाता है जो दोनों ही संबद्ध–मालाओं के अनुपातिक परिवर्त्तनों को एक आकर्षक ढंग से प्रदर्शित करता है। प्रत्येक वक्र दो परस्पर लम्ब डालने वाली रेखाओं की तुलना में बनाया जाता है जिनमें से अनुप्रस्थ (Horizontal) रेखा को भुजाक्ष और उदग्र (Vertical) रेखा को कोटि–अक्ष कहते हैं।

वक्र बनाते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि समंक मालाओं का प्रमुख भाग बिन्दु रेख चित्र के मध्य में रहे। यदि एक से अधिक वक्र हो तो प्रयत्न ये करना चाहिए कि वे पास पास हों जिससे तुलना में आसानी हो।

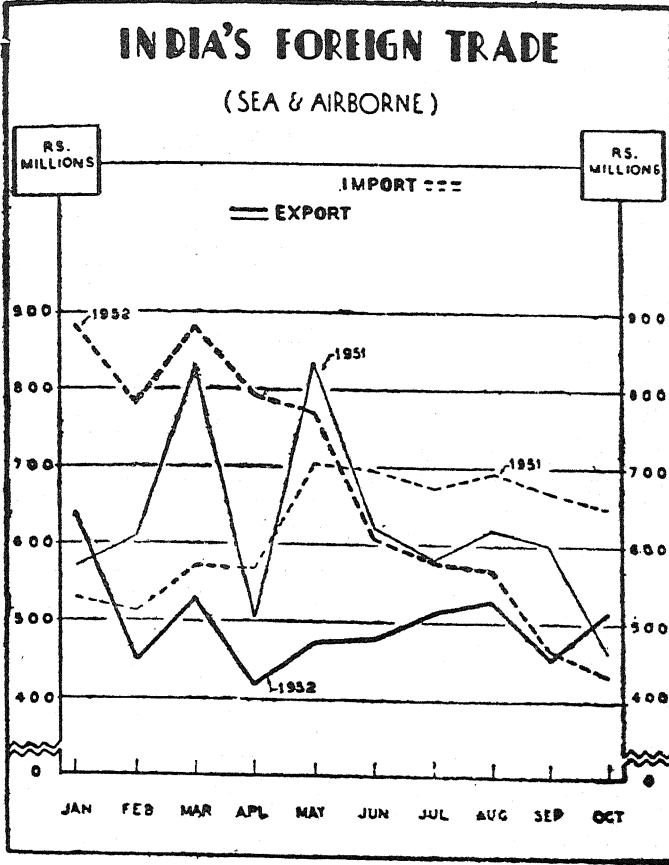
वक्र का आकार प्रकार न बहुत बड़ा और न बहुत छोटा होना चाहिए। प्राय: अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई उदग्र अक्ष से अधिक रखी जाती है। यह कोई नियम नहीं है केवल सुन्दरता के लिए ही ऐसा किया जाता है। वक्रों के प्रांकन से पहिले उनके समंकों के अनुरूप अनुमाप (Scales) ले लेनी चाहिए।

प्राकृत माप-श्रेणी के वक्र

जैसा कि ऊपर के चित्र में दिखलाया गया है भुजाक्ष और कोटि-अक्ष दोनों एक मूल बिन्दु पर मिलते हैं जिसकी दोनों ही अक्ष पर आकृति शून्य के

बराबर होती है। उस माप-श्रेणी को जो दोनों ही दिशा में शून्य से प्रारम्भ हो प्राकृत माप-श्रेणी (Natural scale) कहते हैं। जब कोई कालिक या ऐतिहासिक माला को बिन्दुरेख कागज पर प्रांकित करना हो तो हमेशा अनु-प्रस्थ अक्ष या भुजाक्ष पर समय और कोटि-अक्ष पर अन्य तत्व दिखलाया जाता है। कालिक-माला को जब वक्र द्वारा दिखलाया जाता है तो ऐसे वक्र को कालिक-चित्र (Historigram) कहते हैं। यदि कालिक-चित्र के लिए समंक-माला के ही समंक प्रांकित किये जाएँ तो उसे निरपेक्ष कालिक-चित्र (Absolute Historigram) कहते हैं और यदि निरपेक्ष समंकों के स्थान पर किसी एक को आधार मानकर उसके सापेक्षिक निर्देशाँक प्राँकित किए जाएँ तो ऐसे कालिक-चित्र को देशना-कालिक-चित्र (Index Historigram) कहते हैं। नीचे के चित्र में एक निरपेक्ष कालिक-चित्र द्वारा सन् १९२० और १९२१ के कुछ माहों में भारत के आयात, निर्यात और व्यापार-का-अन्तर के समंक दिखलाये गए हैं।

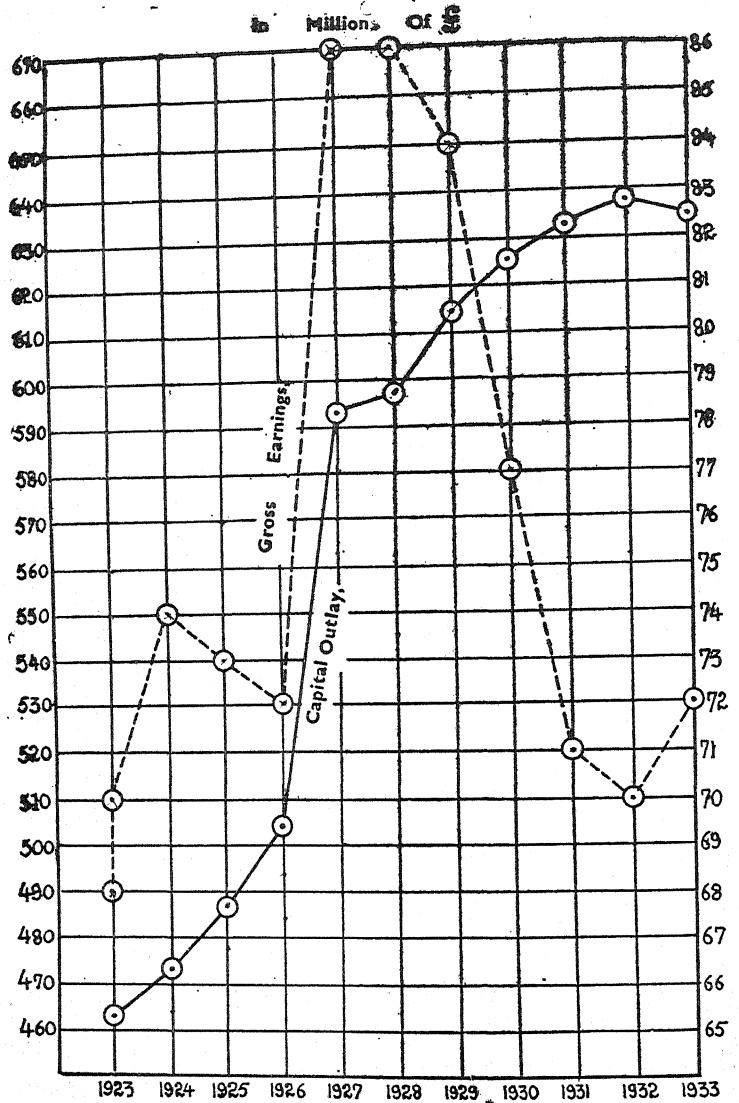
कूट-आधार-रेखा

जब कोटि-अक्ष और भुजाक्ष दोनों एक ही मूल्य-बिन्दु पर (जिसका मूल्य शून्य के बराबर हो) न मिलते हो तो ऐसी आधार रेखा को कूट-आधार-रेखा (False Base Line) कहते हैं। प्रायः कूट-आधार-रेखा का प्रयोग कालिक-चित्रों में किया जाता है और कालिक-चित्रों के लिए समय हमेशा ही भुजाक्ष पर लिया जाता है इसलिए कूट-आधार-रेखा से ऐसी रेखा का बोध होता है जिसका भुजाक्ष शून्य से आरम्भ हो और कोटि-अक्ष (र) समंकमाला के किसी न्यूनतम समंक से शुरू हो। इस कूट-आधार-रेखा का उपयोग प्रायः इसलिए किया जाता है कि तुलना करने के लिये वक्र पास पास आ जाएँ। यद्यपि कूट-आधार-रेखा के प्रयोग से स्थान की बचत और तुलना में सुबिधा होती है इसके द्वारा उच्चावचन बहुत बड़े दिखाई पड़ते हैं और समानुपातिक विभ्रम होने का डर रहता है। इसका प्रयोग कम से कम किया जाता है। नीचे के चित्र में भारत का विदेशी व्यापार कुछ माह के लिए सन् १९५१ और १९५२ में आयात और निर्यात के रूप में अलग अलग वक्रों द्वारा कूट-आधार-रेखा की सहायता से दिखलाया गया है। इसमें भुजाक्ष यद्यपि शून्य से प्रारम्भ होती है। कोटि-अक्ष ४०० से प्रारम्भ होती है। यदि ऐसा न

किया जाता तो वक्र न मालूम कहाँ पर बनते। इस प्रकार कूट–आधार–रेखा के द्वारा ० से ४०० तक का व्यर्थ का अन्तर दूर कर दिया गया है।

चित्र १६

माप-श्रेणी परिवर्तन

कभी कभी जब दो या अधिक समंक-मालाओं के वक्र बनाना होता है तो उनको तुलना की सुविधा के लिए माप-श्रेणी परिवर्तन का सहारा लेना पड़ता है। जब एक से अधिक माप-श्रेणी ली जाएँ तो इस बात का ध्यान

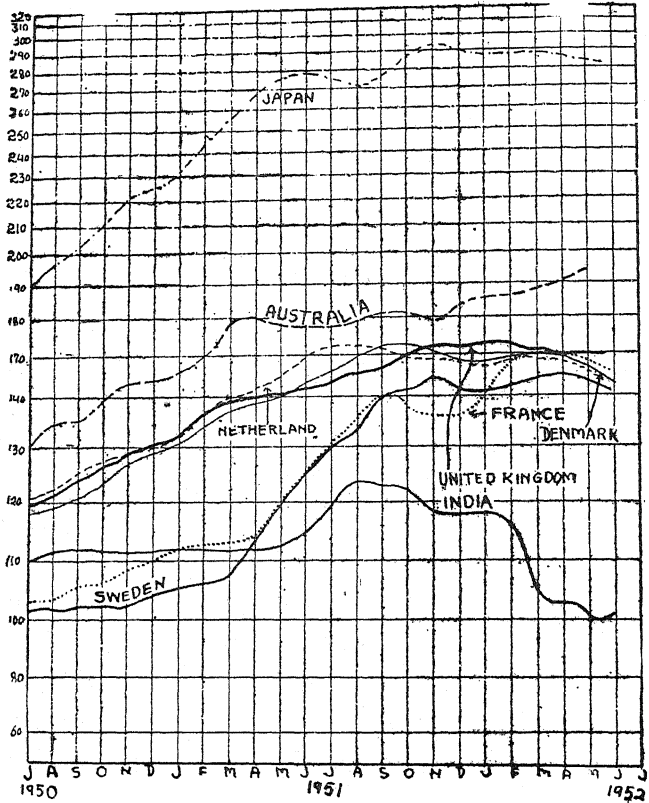
रेलवे की कुल आय और पूँजी व्यय

रखना चाहिए कि वक्र एक दूसरे के बिल्कुल पास आने चाहिए। जब अलग अलग अनुमाप लिए जाएँ तो एक माला के माध्य के सामने दूसरी माला का माध्य रखना चाहिए और फिर उन माध्यों की सापेक्षिता में मापश्रेणी के अंक लेने चाहिए। इसलिए निरपेक्ष अंकों को प्रांकित करने से पहिले उदग्र श्रेणी पर दोनों ही मालाओं के माध्यों को सर्वप्रथम प्रांकित करना चाहिए। ऐसा करने से दोनों ही मालाओं के वक्र एक दूसरे के करीब होंगे जैसा कि पिछले पृष्ठ पर दिये गये चित्र से स्पष्ट है।

अर्ध-छेदा या अनुपात माप-श्रेणी

अर्ध-छेदा या अनुपात मापश्रेणी चल-समंकों (Variables) के परिवर्तनों की दर या उनकी सापेक्षिक घट-बढ़ की तुलना करने की एक विधि है। यदि भुजाक्ष के अनुमाप में गणितीय वृद्धि होती हो अर्थात् प्रत्येक अंक की बराबर कीमत हो और कोटि-अक्ष में गुणोत्तर वृद्धि हो तो ऐसी मापश्रेणी को अनुपातिक-मापश्रेणी कहते हैं। इस प्रकार की मापश्रेणी में भुजाक्ष बराबर निरपेक्ष चलन का प्रदर्शन करता है और कोटि-अक्ष बराबर अनुपातिक चलन प्रदर्शित करता है जोकि निरपेक्ष समंकों के अनुपात, या छेदा द्वारा जाने गए हों। यह मापश्रेणी अनुपात या दरों के तुलना में बहुत उपयोगी होने के कारण भी अनुपात मापश्रेणी कहलाती है। ऐसी मापश्रेणी में शून्य से प्रारम्भ होने वाली अनुप्रस्थ रेखा नहीं होती है और केवल वक्रों के झुकाव का ही महत्व होता है। इस मापश्रेणी के द्वारा हम विभिन्न एकको में दिए गए समग्रों की भी तुलना कर सकते हैं।

प्राकृत मापश्रेणी से अनुपात मापश्रेणी की निम्नलिखित प्रकार से तुलना की जा सकती है:—(१) प्राकृत श्रेणी में (य) और (र) पदों के निरपेक्ष अनुपात दिए रहते है और अनुपात मापश्रेणी में अनुपातिक परिवर्त्तनों की दरें। (२) अनुपात मापश्रेणी गुणोत्तर वृद्धि का प्रदर्शन करती है और प्राकृत मापश्रेणी गणितीय वृद्धि का।

प्राय: ऐसा होता है कि बिन्दुरेखीय वक्र यह बतलाने में असमर्थ होते हैं कि समंकों में परिवर्त्तनों की दर स्थिर, वर्धी या ह्रासमूलक है। इस समस्या के निवारण के लिए दो हल हैं:—

छेदा वक्र (Log Curves)

(१) समंक-मालाओं के समंकों को अनुपात मापश्रेणी पर प्रांकित किया जाए।

(२) उनके छेदाकों (Logarithms) को प्राकृत मापश्रेणी पर प्रांकित किया जाए।

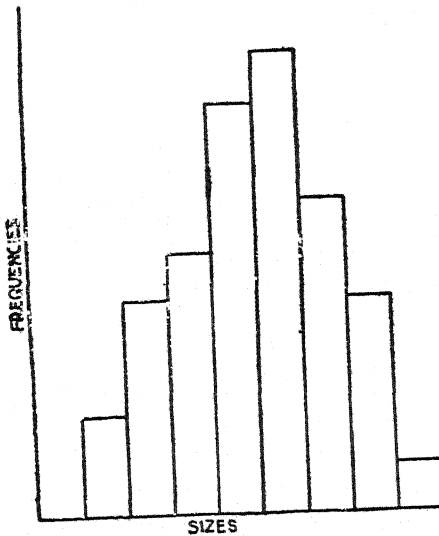
उपरोक्त दोनों ही रीतियों के प्रयोग से जो वक्र प्राप्त होते हैं उन्हें छेदा वक्र (Logarithmic Curves) कहते हैं। इन वक्रों के निर्वचन करते समय हमें ध्यान रखना चाहिए कि (अ) यदि वक्र ऊपर की ओर बढ़ रहा हो तो इस आरोही गति से हमें यह समझना चाहिए कि वृद्धि की दर हमेशा बढ़ रही है और इसी प्रकार वक्र की अवरोही गति से हमें यह अनुमान लगाना चाहिए कि वृद्धि की दर में क्रमिक ह्रास

हो रहा है। (ब) यदि वक्र एक आरोही सीधी रेखा है तो वृद्धि की दर समान गति से बढ़ रही है और यदि एक अवरोही सीधी रेखा है तो वृद्धि की दर समान गति से घट रही है। (स) यदि वक्र समानान्तर हो तो वे समान प्रतिशत दर से घट-बढ़ प्रदर्शित करते हैं।

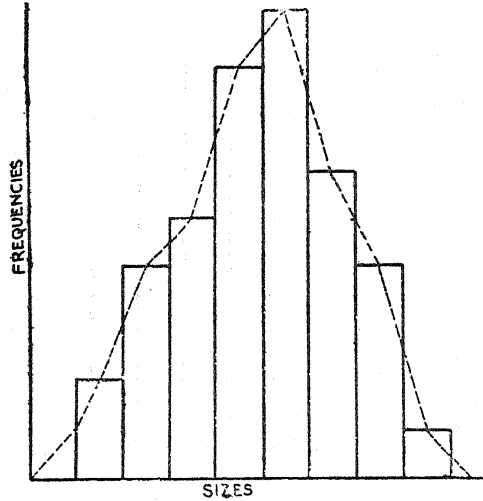
छदा वक्रों का प्रयोग घट-बढ़ की दरों की तुलना, आन्तरगणन और वाह्यगणन और देशना-कालिक-चित्र के प्रदर्शन में किया जाता है। इनके द्वारा सापेक्षिक उच्चावचनों की महानता को भी दर्शाया जासकता है।

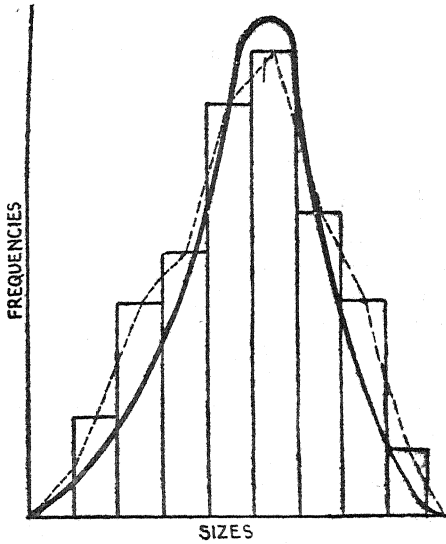
इन वक्रों का प्रयोग विभिन्न मालाओं के निरपेक्ष अंकों की तुलना में नहीं किया जा सकता है और जबकि कुछ अंक विलोम (—) हों। इसके अतिरिक्त इन वक्रों का निर्वचन एक कठिन काम है जोकि सांख्यिकी से अनभिज्ञ व्यक्ति समझ भी नहीं सकता है।

बारम्बारता या आवृत्ति वक्र

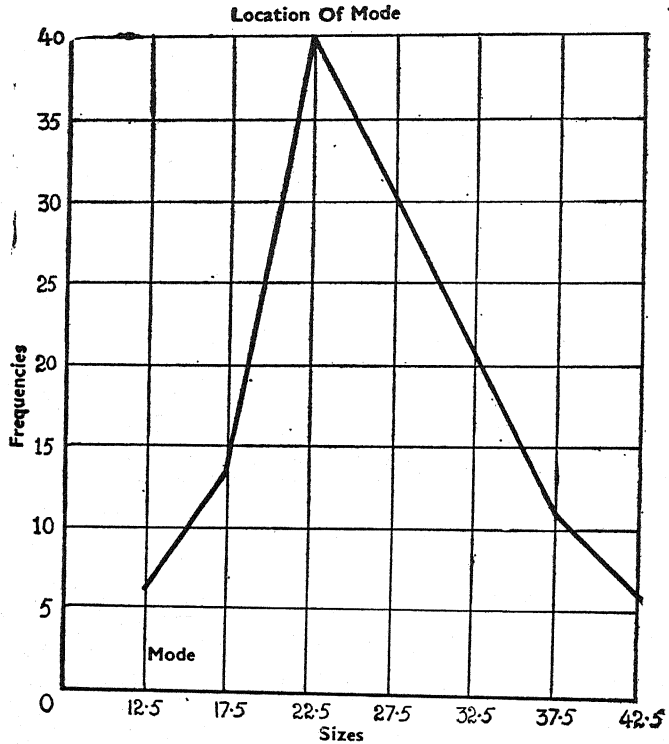
कालिक-मालाओं के अतिरिक्त बारम्बारता-मालाओं को भी चित्रों और वक्रों की सहायता से प्रदर्शित किया जा सकता है। किसी भी विच्छिन्न-माला को लकीरों या दण्ड-चित्र द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जैसा

बारम्बारता दण्ड-चित्र

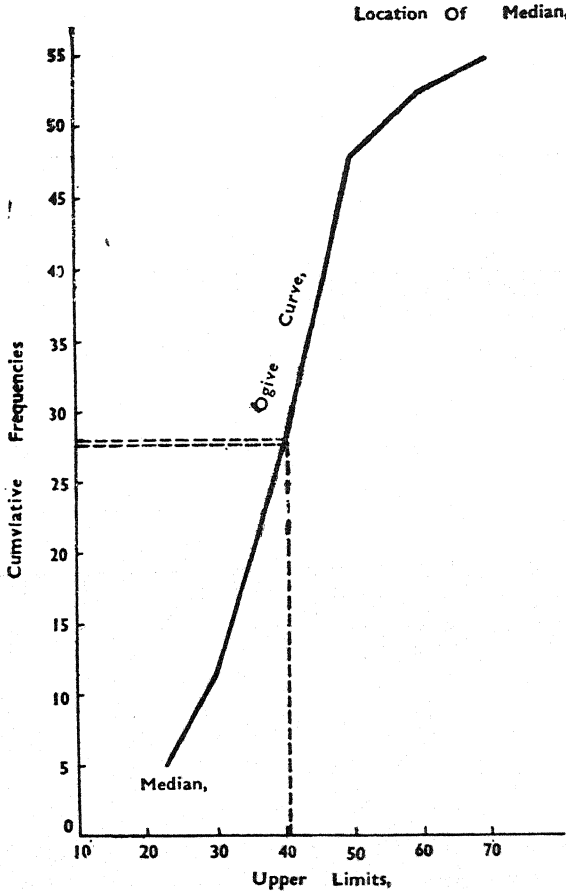
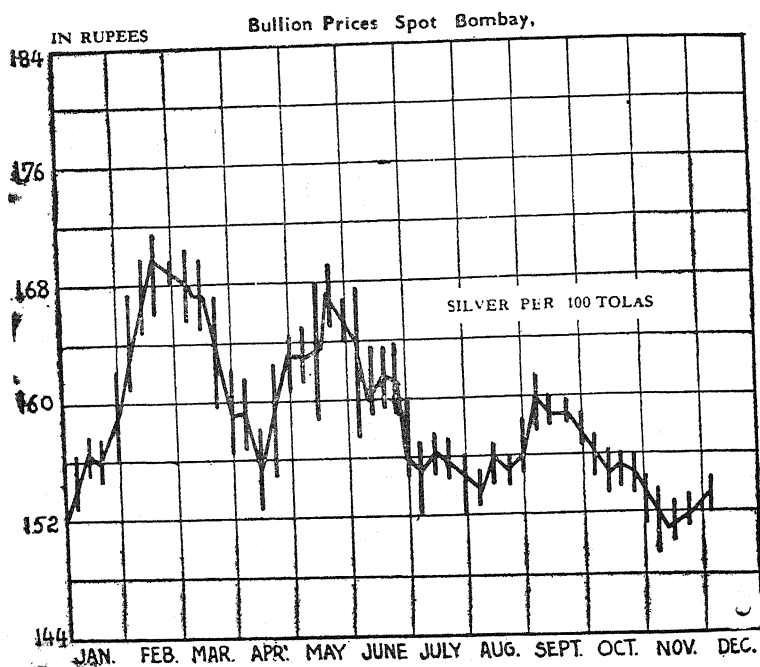
कि हम इस अध्याय के प्रारम्भ में देख चुके हैं। एक अविच्छिन्न-बारम्बारता-माला को भी एक विशिष्ट प्रकार के दण्ड-चित्र द्वारा दिखलाया जा सकता है जिसे "बारम्बारता-दण्ड-चित्र" (Histogram) या इष्टका चित्र (Block Diagram) कहते हैं। यह चित्र सीढ़ीनुमा दिखलाई देता है और इसका प्रत्येक दण्ड समंकमाला का एक एक संभाग और उसकी उचाँई प्रत्येक संभाग की आवृत्ति दिखलाते हैं। इस चित्र को बनाने में भुजाक्ष पर आकृति और कोटि-अक्ष पर बारम्बारता या आवृत्ति ली जाती हैं।

उपरोक्त बारम्बारता-दण्ड-चित्र समंकमाला का पूर्ण चित्र अंकित करता है। यदि प्रत्येक संभाग को प्रदर्शित करने वाले दण्ड के शिरोभाग की रेखाओं के मध्य-बिन्दुओं को चित्र की आधार रेखा के अन्तस्थ बिन्दुओं से सीधी रेखाओं द्वारा मिला दिया जाए तो जो चित्र प्राप्त होता है उसे बारम्बारता बहुभुज (Frequency Polygon) कहते हैं। कभी कभी जब समंकमाला विषम अंकों की बनी होती हैं और बारम्बारता के एकदम घटने या बढ़ने के कारण चित्र ठीक नहीं बन पाता है तो दण्ड-चित्र की अपेक्षा बहुभुज अधिक अच्छे ढंग से समंकमाला का प्रदर्शन करने में समर्थ होता है। बारम्बारता-दण्ड-चित्र और बहुभुज दोनों ही का क्षेत्रफल बराबर होता है।

बारम्बारता बहुभुज

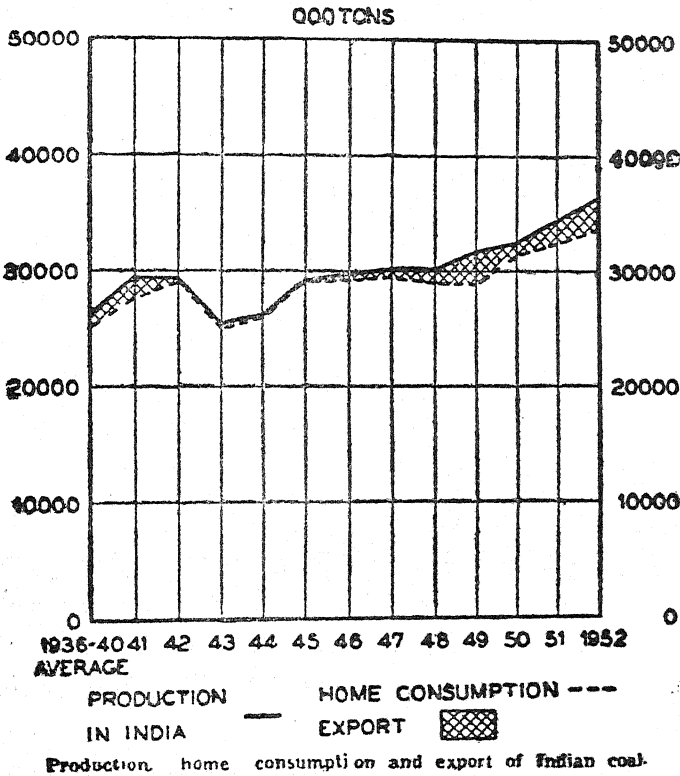
बारम्बारता-बहुभुज समंकों की आकृतियों के विचरण की नियमिता को समझाने में असमर्थ रहता है क्योंकि उसकी लकीरों से एक अविच्छिन्न वक्र नहीं बन पाता है। इस कमी को दूर करने के लिए बारम्बारता-दण्ड-चित्र के मध्य-बिन्दुओं को सीधी रेखाओं की सहायता से न जोड़ते हुए यदि मुक्त-हस्त-रेखाओं (Freehand Curve) द्वारा जोड़ा जाए तो एक अविच्छिन्न-वक्र प्राप्त हो सकेगा। इस प्रकार प्राप्त किए गए वक्र को "बारम्बारता वक्र" (Frequency Curve) कहते हैं।

बारम्बारता वक्र

उपरोक्त चित्र को सरलित-बारम्बारता-चित्र (Smoothed Histogram) भी कहते हैं। वक्र को सरलित करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि वक्र बारम्बारता-बहुभुज की चोटी से ऊपर होकर जाए और एक नियमित व समान वक्र मालूम पड़े जिसमें न्यूनतम आकस्मिक घुमाव हों। एक अविच्छिन्न-माला में बारम्बारता-वक्र प्राप्त करने के लिए ब भुज बनाना तो आवश्यक है परन्तु दण्ड-चित्र बनाने की आवश्यकता नहीं। यदि अविच्छिन्न-माला के संभागों के मध्य-बिन्दुओं और बारम्बारताओं को प्राँकित किया जाए तो बिना दण्ड-चित्र बनाए हुए ही बहुभुज प्राप्त किया जा सकता है।

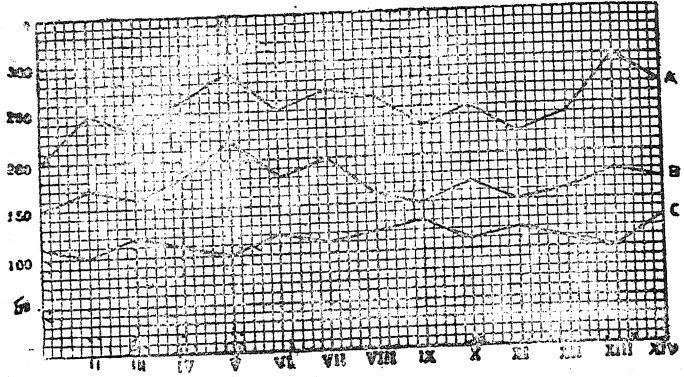
बारम्बारता-दण्ड-चित्र, बहुभुज या वक्र की सहायता से भूयिष्ठक मालूम किया जा सकता है। भूयिष्ठक की परिभाषा 'सरलित-दण्ड-चित्र की चोटी के अंक की आवृत्ति' के रूप में भी की गई है और इस प्रकार यदि बहुभुज की चोटी या वक्र की चोटी से भुजाक्ष पर एक लम्ब (Perpendicular) डाला जाय और भुजाक्ष पर लम्ब द्वारा बनाये हुए बिन्दु से मूल बिन्दु (०) तक का अन्तर नाप लिया जाय तो वह भूयिष्ठक की आकृति होगी। नीचे एक बारम्बारता-वक्र द्वारा भूयिष्ठक निकाला गया है:—

जब कोटि-अक्ष पर बारम्बारता के स्थान पर संचयी-बारम्बारता ली जाती है तो वक्र की प्रकृति सदा आरोही रहती है और ऐसे वक्र को "संचयी-बारम्बारता-वक्र" (Ogive Curve) कहते हैं। इस वक्र के आँकड़ों

को प्राँकित करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि कोटि-अक्ष पर संचयी आवृत्ति और भुजाक्ष पर संभागों की उच्च-सीमाओं (सी$_2$) को प्राँकित किया जाता है। संचयी-बारम्बारता-वक्र का प्रयोग अनुस्थिति मूल्यों (Positional Values) जैसे मध्यका, चतुर्थांश, दशाँस इत्यादि के निकालने में किया जा सकता है। नीचे के उदाहरण में संचयी-आवृत्ति-वक्र की सहायता से मध्यका की आकृति निकाली गई है।

वक्रों की सहायता से एक ही दिन पर एक ही वस्तु के मूल्यों के परिवर्त्तन और अधिकतम व न्यूनतम मूल्य दिखलाए जा सकते हैं। इस प्रकार के वक्र को "क्षेत्रीय वक्र" (Zone Curve) कहते हैं और इसे प्राँकित करने के लिए एक ही दिन एक ही मापश्रेणी पर किसी वस्तु के उच्चतर और न्यूनतम मूल्यों को प्राँकित कर दिया जाता है और उन बिन्दुओं को मिला दिया जाता है। ऐसे सभी लाइनों या दण्डों को मिला देने से क्षेत्रीय-वक्र बन जाता है जैसा कि नीचे के उदाहरण से स्पष्ट है।

दण्ड या आयत चित्रों के समान वक्रों द्वारा भी कुल और अंगों दोनों की ही तुलना की जा सकती है। सबसे ऊपर के वक्र के नीचे का सम्पूर्ण क्षेत्र सम्पूर्ण समग्र दर्शाता है और उसके नीचे की पंक्तियाँ विभिन्न अंगों का दर्शन करते हैं। इस प्रकार के वक्रों को पाँति-वक्र (Band Curves) कहते हैं। अगले उदाहरण में पाँति-वक्र द्वारा भारत का कुछ वर्षों के लिए कुल उत्पादन, आंतरिक उपभोग, और निर्यात दिखलाए गए हैं।

पाँति-वक्र

Production home consumption and export of Indian coal.

वक्रों की सहायता से समग्र का अंक-वंटन समझाया जा सकता है और आय, भृत्ति, लाभ इत्यादि का वितरण स्पष्ट किया जा सकता है। वक्र अंक-वंटन का स्वरूप और प्रकृति स्पष्ट करने की बहुत ही स्पष्ट रीति प्रदान करते हैं जिन्हें देखकर ही सांख्यिकीय ज्ञान से अनभिज्ञ व्यक्ति भी अंक-वितरण समझ सकता है।

दो या अधिक वक्रों के परस्पर सह-सम्बन्ध को गुणक की अपेक्षा वक्रों द्वारा अधिक सुबोध व सरल बनाया जा सकता है। अगले पृष्ठ के उदाहरण में (अ), (ब) और (स) तीन मालाओं का परस्पर सह-सम्बन्ध वक्रों द्वारा प्रदर्शित किया गया है जिन्हें देखने मात्र से ही यह मालूम पड़ता है कि (अ) और (ब) में समान, और (अ) और (स) में असमान घट-बढ़

होती है । उनके उच्चावचनों से यह जाना जा सकता है कि (अ) और (ब) में संगामी सह-सम्बन्ध और (अ) और (स) में प्रतिगामी सह-संबन्ध है ।

वक्रीय-रीति से समग्र के अज्ञात अंकों का आन्तरगणन एवं वाह्यगणन किया जा सकता है परन्तु यह पद्धति केवल उसी समय ठीक सिद्ध होती है जबकि चक्रीय उच्चावचनों को सरलित कर लिया जाए क्योंकि कुछ पहले के अंकों के आधार पर ही आन्तरगणन या पूर्वानुमान लगाए जाते हैं ।

वक्रीय-पद्धति कालिक-मालाओं के चक्रीय उच्चावचन, मौसमी परिवर्त्तनों, और सुदीर्घकालीक परिवर्त्तनों के अध्ययन और व्यवसायिक पूर्वानुमानों में भी बहुत महत्व रखते हैं जिसका विवरण अगले अध्याय में दिया गया है ।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. Write short notes on : Bar-diagram (दण्ड चित्र) Pie-diagram (वर्तुल चित्र), three dimensional diagram (त्रिविमा चित्र), Pictogram (चित्रलेख) Staircase diagram (सीढ़ीनुमा चित्र) Globes, Two-unit Bar diagram (द्विएकक चित्र), Cartogram (मानचित्र).

2. What kind of statistical data are best represented by diagrams (चित्र) ? Illustrate your answer with examples.

(*B. Com.*, *Agra*, 1937).

3. (i) Diagrams (चित्र) are meant for a rapid view of the relation of different data and their comparison—Discuss.

(ii) Draw a 'Bar' (दण्ड) or 'Pie' (वर्तुल) diagram to represent the following data :—

Out put and cost of production of coal

	1924	1928
Cost per ton disposed commercially		
Wages	12·74	7·95
Other costs	5·46	4·51
Royalties	0·56	0·50
Total	18·76	12·96
Sale proceeds per ton	19·91	12·16
Profit (+) or loss (—) per ton	+ 1·15	— 0·80

(*M. A.*, *Agra*. 1940).

4. Value of the imports of glass and glassware into India from different countries—during the year 1931-32.

Japan	42 lakhs of Rs.
Czechosolvakia	23 ,,
Germany	20 ,,
U.K.	13 ,,
Belgium	13 ,,
Other countries	11 ,,

Represent the above figures by suitable (समुचित चित्र) diagrams.

(*B. Com., Alld* 1933).

5. Draw a suitable diagram to represent the following information :—

Factory	Wages	Materials	Profits	Units Produced
A	2000	3000	1000	1000
B	1400	2400	1000	800

Show also the cost and profit per unit. (प्रति इकाई)

(*B. Com., Agra*, 1943).

6. The following table gives the birth rates and death rates of a few countries of the world during the year 1931:—

Country	Birth rate	Death rate
Egypt	44	27
Canada	24	11
U.S.A.	19	12
India	33	24
Japan	32	19
Germany	16	11
France	18	16
Irish Free State	20	14
United Kingdom	16	12
Soviet Russia	40	18
Australia	20	09
New Zealand	18	08
Palestine	53	23
Sweden	15	12
Norway	17	11

Represent the above figures by a suitable diagram.

(*B. Com., Luck.*, 1938)

7. Represent the following by a suitable diagram :—

Principal heads of Revenue	1938-39 Lacs of Rs.	1939-40 Lacs of Rs.
Custom	4050	4588
Central Excise Duties	868	652
Corporation Tax	204	238
Taxes on income	1374	1420
Salt	812	1080
Opium	50	46
Other heads	112	130

(*B. Com., Nagpur,* 1943).

8. The following table give the details of monthly expenditure of three families :—

Items of Expenditure	Family A	Family B	Family C
Food	12 0	30 0	90
Clothing	2 0	7 0	35
House-rent	2 0	8 0	40
Education	1 8	3 0	12
Litigation	1 0	5 0	40
Conventional necessity	0 8	3 0	60
Miscellaneous	1 0	4 0	23

Represent the above figures by a suitable diagram. Which family is spending the money most wisely ? Give reasons.

(*M., A. Alld.,* 1937).

9. Show by suitable diagrams, the absolute (निरपेक्ष) well as relative (सापेक्षिक) changes in the student population of the colleges A and B in the different departments, from 1940 to 1947.

	A		B	
	1940	1947	1940	1947
Arts	300	350	100	200
Science	120	500	150	250
Commerce	200	650	130	150
Law	100	300	100	120

(*B. Com.*, *Agra*, 1948).

10. Diagrammatically compare the following statistics of textiles production and imports in India. What conclusions do you draw from the given figures ?

	In crores of yards	
	1913-14	1938-39
Mill production	116·4	426·9
Handloom production	106·8	192·0
Imports	319·7	64·7

(*B. Com.*, *Alld.*, 1946).

11. Write short notes on the following:—Histogram (बारम्बारता चित्र), Historigram (कालिक चित्र), Ogive (संचयी आवृत्ति चित्र), Lorenz curve (लारेंज वक्र), Natural scale (प्राकृतमाप श्रेणी), Logarithmic scale (छेदा मापश्रेणी).

12. Represent the figures given below on a graph paper and comment upon their relationship.

	Price in Rs. per Maund	
Year	Rice	Arhar
1929	12·4	7·8
1930	10·4	5·6
1931	4·5	3·6
1932	3·9	3·6
1933	3·7	3·3
1934	3·7	3·3
1935	3·9	4·7
1936	3·6	3·4
1937	4·3	4·3
1938	4·1	4·3
1939	4·3	4·2
1940	4·7	3·9

(*B. Com., Agra*, 1944).

13. Represent graphically the Index Numbers (निर्देशांक) (July 1914-100) of Wholesale Prices of following places and also write a reasoned note on the same.

Year	Bombay	Price Indices Karachi	Calcutta
1923	181	148	172
1924	182	154	173
1925	163	151	159
1926	149	140	148
1927	147	137	148
1928	146	137	145
1929	145	133	141
1930	126	108	116
1931	109	95	96
1932	109	99	91
1933	98	97	87
1934	95	96	89
1935	99	99	91
1936	96	102	91
1937	106	108	102

(*B. Com., Bombay*, 1939).

14. From the figures given below draw a graph to show which group has greater inequality (विषमता या असमानता)

Income	No. of Persons. A group	No. of Persons. B group
Below 500	6,000	5,000
500-1000	4,250	4,500
1000-2000	3,600	4,800
2000-3000	1,500	2,200
3000-4000	650	1,500

(*B. Com., Agra*, 1947).

15. What are the advantages of the Ratio Scale (अनुपात-मापश्रेणी) over the Natural Scale (प्राकृत मापश्रेणी) ? Plot the following data graphically on the logarithmic scale:—

Year	Total Notes issued in crores of Rs.	Notes in Circulation in crores of Rs.
1933-34	177	167
1934-35	186	172
1935-36	196	167
1936-37	208	192
1937-38	214	185
1938-39	207	187
1939-40	252	237
1940-41	269	258
1941-42	421	410
1942-43	650	625

(*B. Com., Nagpur*, 1943).

16. Plot (a) a Histogram (बारम्बारता-दण्ड-चित्र) (b) Cumulative frequency curve (संचयी-बारम्बारता-वक्र) from the following data.

Number of Dairy farms according to Cost of Production of Milk, 1935-36.

Cost of Production per gallon	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	Total
Total Number of farms	13	111	182	105	19	7	437

Find the approximate value of Median (मध्यक) from the Cumulative Curve (संचयी-आवृत्ति-वक्र) and mark that value on the Histogram (बारम्बारता-दण्ड-चित्र)

(*B. Com.*, *Rajputana*, 1949).

17. The following table shows the total sales of gold by the Bank of England on foreign account. Represent the data graphically on the logarithmic scale :—

Year		£ '000
1910	...	14,488
1911	...	8,228
1912	...	9,670
1913	...	7,943
1914	...	8,027
1915	...	43,076
1916	...	2,360

(*B. Com.*, *Alld.*, 1932).

18. Plot the following figures relating to Population of India (undivided) so as to show the proportionate increase (समानुपातिक वृद्धि) in population from one period to another.

Year		Population (000,000's omitted)
1872	...	210
1881	...	250
1891	...	290
1901	...	295
1911	...	315
1921	...	320
1931	...	350
1941	...	390

(*B. Com., Nagpur*, 1945).

19. Describe the Lorenz Graph (लारेंज वक्र) How does it differ from an Ogive (संचयी आवृत्ति वक्र) ? Illustrate your answer by fitting a Lorenz Curve and an Ogive to the following data:—

Percentage of age distribution of the male population in British India, 1931.

Age Group	Males
0-10	82.0
10-20	20.9
20-30	17.7
30-40	14.3
40-50	9.7
50-60	5.6
60-70	2.7
70-over	1.1
Mean Age (मध्यक उम्र)	23.2

(*M.A., Patna*, 1940).

20. The following table gives the prices of gold and wheat and Net export of gold during the years 1931-32 to 1938-39:—

Years	Average price of gold (per tola)		Average price of wheat (per md.)	Net export of gold
	Rs.	as.	Rs.	Crores of Rs.
1931-32	25	4	3.3	58
1932-33	30	12	3.3	65
1933-34	33	6	2.8	57
1934-35	35	8	3.1	52
1935-36	35	4	3.2	37
1936-37	36	0	3.9	28
1937-38	36	6	3.0	16
1938-39	37	12	3.4	13

Plot the above figures on a graph paper and comment upon their relationship. (*M.A.*, *Agra*, 1943).

अध्याय १६.

कालिक मालाओं का विश्लेषण
(Analysis of Time Series)

विवरणात्मक समंकों के लिए तो मध्यक या विचरण के माप विश्लेषण की रीतियाँ प्रदान कर सकते हैं परन्तु जब कालिक-मालाओं में काल परिवर्त्तनों का अध्ययन करना अभीष्ट हो तो समग्र के विश्लेषण की साधारण रीतियाँ उपयोगी सिद्ध नहीं हो पाती है। इस शताब्दी में 'परिवर्तनशील' स्थिति के सम्बन्ध में अर्थशास्त्रियों का ध्यान बहुत लगा रहा है और जगत के परिवर्तनमय तत्वों के अध्ययन के लिए समाजशास्त्रियों, डाक्टरों, जीव-वैज्ञानिकों इत्यादि सभी की अपनी अपनी समस्याएँ है। एक व्यवसायी काल-परिवर्तनों के विश्लेषण द्वारा अपने व्यवसाय को आकस्मिक उच्चावचनों सम्भावित अवसाद और विकट मूल्य-परिवर्तनों से बचा सकता है। इस प्रकार के विश्लेषण का उद्देश्य भूतकालिक परिवर्तनों के आधार पर भावी संभावित परिवर्तनों के सम्बन्ध में अनुमान लगाना है।

बहुत से व्यवसायों में कालिक-मालाओं में प्रायः निम्नलिखित स्पष्ट परिवर्तन दृष्टिगोचर होते हैं:—

(अ) मूलभूत या सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति
(ब) आर्त्तव विचरण या उच्चावचन
(स) चक्रीय उच्चावचन

उपरोक्त काल-परिवर्तन अनेक कारणों से होते हैं और उनके आधार पर भावी पूर्वानुमान लगाये जा सकते हैं। इन्हीं पूर्वानुमानों पर व्यापारियों के भविष्य निर्भर होते हैं।

सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति

दीर्घकाल में किसी भी तत्व के घटने या बढ़ने की प्रवृत्ति को 'प्राथमिक परिवर्तन या सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति (Secular Trend) कहते हैं। यह एक ऐसी प्रवृत्ति है जोकि समंकमाला में मौसमी, चक्रीय या अन्य प्रकार

के उच्चावचनों के अभाव में पाई जाती है। इस प्रकार किसी भी कालिक-माला में सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति किसी वृद्धि-तत्व (Growth Factor) या ह्रास-तत्व (Decline Factor) की उपस्थिति के कारण दृष्टिगोचर होती है। व्यवसायों की कालिक-मालाओं में वृद्धि-तत्व पूँजी-निर्माण, विशिष्टीकरण, अति-उत्पादन, वैज्ञानिकरण, श्रम-व्यवस्था, इत्यादि, के रूप में हो सकते हैं और ह्रास तत्व, प्रतियोगिता की वस्तुओं के निर्माण, पूर्ति की कमी या व्यापारिक असुविधाओं के रूप में पाए जा सकते हैं। यह आवश्यक नहीं है कि व्यवसायिक कालिक-मालाओं में एक ही प्रकार की सुदीर्घकालीन प्रवृत्तियाँ पाई जाए। इन प्रवृत्तियों के स्वरूप घट-बढ़ के अनुपातों के अनुसार विभिन्न होंगे।

कालिक-मालाओं के विश्लेषण में सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का अध्ययन करने के लिए अल्पकालीन उच्चावचनों को हटा देना पड़ता है। किसी भी समंक माला के अल्पकालीन परिवर्तनों को हटाने के लिए निम्नलिखित ढंगों का प्रयोग किया जाता है:—

(१) मुक्तहस्त वक्र रीति (Freehand Curve Method).

इस रीति के अनुसार कालिक-माला के उच्चावचनों को मुक्तहस्त द्वारा वक्र खींच कर सरलित कर दिया जाता है। सरलन (Smoothening) की क्रिया एक अनुभवी सांख्यिक के लिए तो ठीक है परन्तु अनुभवहीन प्रयोगी इस रीति से प्रायः गलत वक्र अन्वायोजन करेगा। सरलन करने की एक अच्छी रीति ये है कि तीन वक्र खींचे जाए। पहले दो वक्र तो उच्चावचनों में सर्वाधिक वृद्धि और सर्वाधिक ह्रास के लिए और तीसरा उत्तम-अन्वायोजन-वक्र (Line of best fit)। इस रीति की आलोचना की जा सकती है क्योंकि एक ही सामग्री से दो या अधिक व्यक्ति भिन्न भिन्न प्रकार के वक्रों का अन्वायोजन करेंगे। इसके अतिरिक्त एक अनुभवहीन व्यक्ति केवल अर्थरहित लकीरें ही खींच सकेगा। इस कमी को दूर करने के लिए समंक-माला को कई भागों में विभक्त करके उनके माध्यों को प्रांकित करके फिर वक्र-अन्वायोजन किया जा सकता है। इस प्रकार से खींचा गया वक्र उत्तम-अन्वायोजन वक्र होगा।

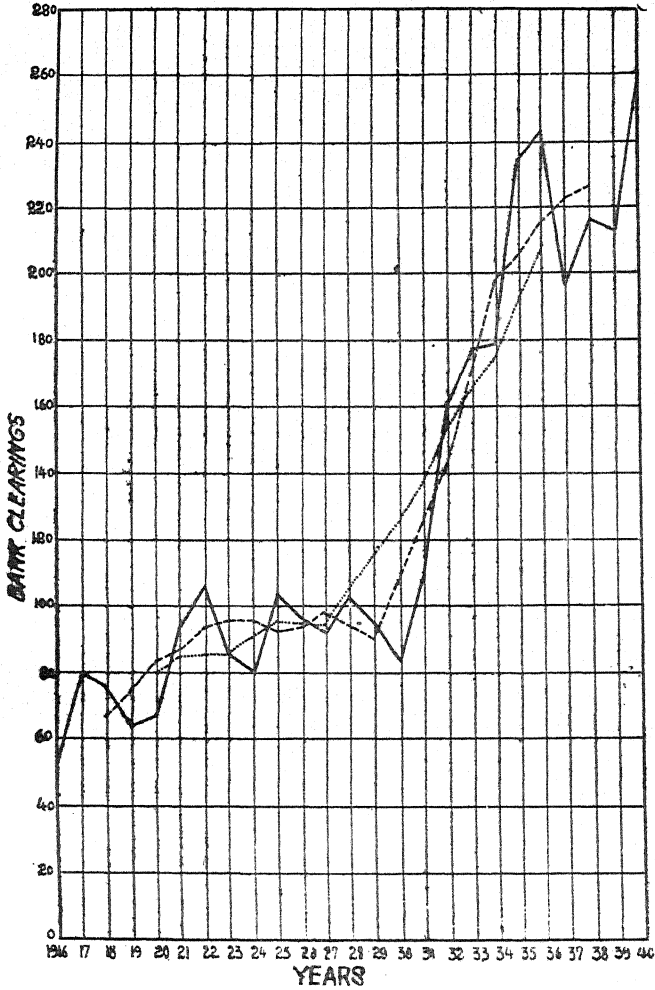
(२) चल माध्य रीति (Moving Average Method)

अल्पकालीन उच्चावचनों को दूर करने का एक सरल और लोचदार तरीका चल-माध्य-रीति है। चल-माध्यों का निकालना माध्यों के अध्याय में बतलाया जा चुका है। पंच-वर्षीय चल-माध्य निकालने के लिए पहले पाँच वर्षों के पदों को जोड़ कर ५ से भाग देकर तीसरे अंक के सामने लिख दिया जाता है और इसके बाद के चल-माध्यों के लिए प्रत्येक बार पहला पद छोड़ दिया जाता है। यदि इस प्रकार प्राप्त की गई चल-माध्यों की पदमाला को बिन्दुरेख कागज पर प्रांकित किया जाये तो चल-माध्यों का वक्र सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति दिखलायेगा। चल-माध्य इस प्रकार अल्पकालीन उच्चावचनों को दूर कर देते हैं। चल-माध्य के लिए उपयुक्त अवधि मालूम करने के लिए कालिक-चित्र की आर्वातता (Periodicity) को ध्यान में रखा जाता है। निरपेक्ष पदों को प्रांकित करने से जो वक्र प्राप्त होता है उसके उतार और चढ़ावों के उच्चतम और निम्नतम बिन्दुओं के अन्तर को आर्वातता कहते हैं। यदि कोई महत्वपूर्ण चढ़ाव प्रति पाँच वर्ष में आता हो तो अल्पकालीन उच्चावचनों को दूर करने के लिए पंचवर्षीय चल-माध्य लेना ठीक होगा। अगले पृष्ठ के उदाहरण में सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का विश्लेषण किया गया है। निरपेक्ष अंकों में वक्र में अल्पकालीन उच्चावचन पूरे पूरे दृष्टिगोचर होते हैं और पंच-वर्षीय चल-माध्यों के वक्र में यही उच्चावचन कम हो गए हैं और नौ-वर्षीय चल-माध्यों के वक्र में इनका पूर्ण लोप हो गया है। यही नौ-वर्षीय चल माध्यों का वक्र ही सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का दिग्दर्शन कराता है।

इस प्रकार चल-माध्य अल्पकालीन प्रदोल (Oscillations) का सरलन कर देते हैं और उनके द्वारा प्राप्त वक्र एक नियमित वक्र होता है जो समंकों की सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति पर प्रकाश डालता है। चल-माध्यों की अवधि जितनी बड़ी ली जाएगी अर्थात् चल-माध्यों में जितने अधिक अंक लिए जाएगें प्रवृत्ति उतनी ही सरल और नियमित होती जावेगी।

चल-माध्यों के कुछ दोष भी बतलाये जाते हैं, जैसे,

(१) चल-माध्य केवल केन्द्रीय प्रवृत्ति का दिग्दर्शन करा सकते हैं और वक्र के उच्चावचनों पर किंचित मात्र भी प्रकाश नहीं डालते।

ABSOLUTE VALUES
5 YEARLY MOVING AVERAGE (TREND)
9 YEARLY MOVING AVERAGE
BANK CLEARINGS
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
1916
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
YEARS

(२) इनका प्रयोग उसी समय किया जा सकता है जबकि समंकों में उच्चावचन (Periodic fluctuations) हों क्योंकि इनकी अवधि समंकों की आवर्तिता (Periodicity) पर निर्भर रहती है।

(३) क्योंकि माध्य अवधि के मध्य-बिन्दु सूचक होते हैं इसलिए उन्हें आधुनिकतम नहीं बनाया जा सकता है।

(४) चल-माध्यों पर अभिनति (Bias) का बहुत अधिक प्रभाव होता है।

(३) सरल रेखा अन्वायोजन रीतियाँ

सरल-रेखा-अन्वायोजन (Fitting straight lines) द्वारा भी सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का अध्ययन किया जा सकता है। सरल-रेखा-अन्वायोजन की दो रीतियाँ हैं—(अ) अर्ध-माध्यों की रीति (Method of Semi-Averages) और (ब) अल्पतम वर्गों की रीति (Method of Least Squares)।

(अ) अर्ध-माध्यों की रीति के अनुसार कालिक-माला को दो बराबर भागों में विभक्त किया जाता है और तदुपरान्त दोनों ही भागों के माध्यों को प्राँकित करके बिन्दुओं को सरल रेखा द्वारा जोड़ दिया जाता है। यह एक सरल और सुगम विधि है परन्तु इसमें एक दोष यह है कि चक्रीय प्रभावों के कारण दोनों में से कोई एक माध्य बहुत छोटा या बहुत बड़ा हो सकता है और ऐसा होने पर व्यवसायिक चक्र का प्रभाव सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का यथार्थ माप न आने देगा। यह रीति गणितीय और अर्ध-छेदा या अनुपातिक दोनों ही प्रकार की प्रवृत्तियों के अध्ययन में काम आ सकती हैं।

(ब) अल्पतम वर्गों की रीति गणितीय शुद्धता से परिपूर्ण रीति है। इस रीति के अनुसार 'उत्तम-रेखा-अन्वायोजन' (Line of best fit) किया जाता है। यह रेखा मध्यक के समान है क्योंकि जिस प्रकार मध्यक किसी भी माला के विभिन्न पदों का संक्षिप्त विवरण देता है उसी प्रकार यह रेखा भी अल्पतम वर्गों की सहायता से पूरी कालिक-माला के परिवर्त्तनों को एक संक्षिप्त रूप में दर्शन कराती है।

निम्नलिखित सारणी में भारत सरकार के आर्थिक सलाहकार के निर्देशाँक दिए गए हैं जिनकी आपको सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति अल्पतम वर्गों की रीति से मालूम करनी है ।

मास (य)	निर्देशाँक (र)	जून १९४२ से विचलन (वि)	विचलनों के समायत (वि²)	(वि×र)	प्रवृत्ति के कोटि-अक्ष अंक
१९४१					
अक्टूबर	१२७·४	—८	६४	—१०१९·२	१०९·४
नवम्बर	१२७·९	—७	४९	—८९५·३	११५·३
दिसंबर	१२७·५	—६	३६	—७६५·०	१२१·२
१९४२					
जनवरी	१२८·४	—५	२५	—६४२·०	१२७·१
फरवरी	१३२·३	—४	१६	—५२९·२	१३३·०
मार्च	१३०·५	—३	९	—३९१·५	१३८·९
अप्रैल	१३६·५	—२	४	—२७३·०	१४४·८
मई	१४४·७	—१	१	—१४४·७	१५०·७
जून	१५२·३	०	०	०	१५६·६
जुलाई	१५५·८	१	१	१५५·८	१६२:५
अगस्त	१५८·९	२	४	३१७·८	१६८·४
सितंबर	१६१·०	३	९	४८३·०	१७ ·३
अक्टूबर	१६७·२	४	१६	६६८·८	१८०·२
नवम्बर	१७२·४	५	२५	८६२.०	१८६·१
दिसम्बर	१७८·५	६	३६	१०७१·०	१९२·०
१९४३					
जनवरी	१९०·८	७	४९	१३३५·६	१९७·९
फरवरी	२७०·०	८	६४	२१६०·०	२०३·८
योग १७	Σ र = २६६२·१		Σ वि² =४०८	Σ वि र =२३९४·१	

$$\text{मासिक निर्देशांकों का मध्यक} = \frac{\Sigma\, \text{र}}{\text{यो}} = \frac{२६६२\cdot१}{१७} = १५६\cdot६$$

$$\text{वृद्धि की दर} = \frac{\Sigma\, \text{विर}}{\Sigma\, \text{वि}^2} = \frac{२३९४\cdot१}{४०८} = ५\cdot९$$

अब प्रवृत्ति के कोटि-अक्ष के अंक निकालने के लिए जून १९४२ का कोटि-अक्ष अंक १५६·६ को लेकर उसके पहले के महीनों के अंकों के लिए प्रतिमाह ५·९ घटाते जावेंगे और जून १९४२ के नीचे के प्रत्येक मास के लिए ५·९ जोड़ते जावेंगे। इस प्रकार प्रवृत्ति के अंक मालूम कर लेने पर उन्हें प्रांकित करके जब बिन्दुओं को जोड़ा जाएगा तो एक सीधी रेखा मिलेगी जिसे अल्पतम वर्गों के अनुसार प्राप्त उत्तम-अन्वायोजन-रेखा कहा जावेगा।

अल्पतम वर्गों की रीति को समझाने के लिए नीचे कोटि-अक्ष अंकों के परिगणन की विधि दी जा रही है:—

(१) सभी समंकों का मध्यक निकालिये। यह उत्तम अन्वायोजन रेखा के लिए मध्य-बिन्दु का काम देगा।

(२) बीच के मास या वर्ष से कालिक-विचलन (Time deviations) मालूम कीजिए। उपरोक्त उदाहरण में जून सन् १९४२ से कालिक-विचलन लिए गए हैं।

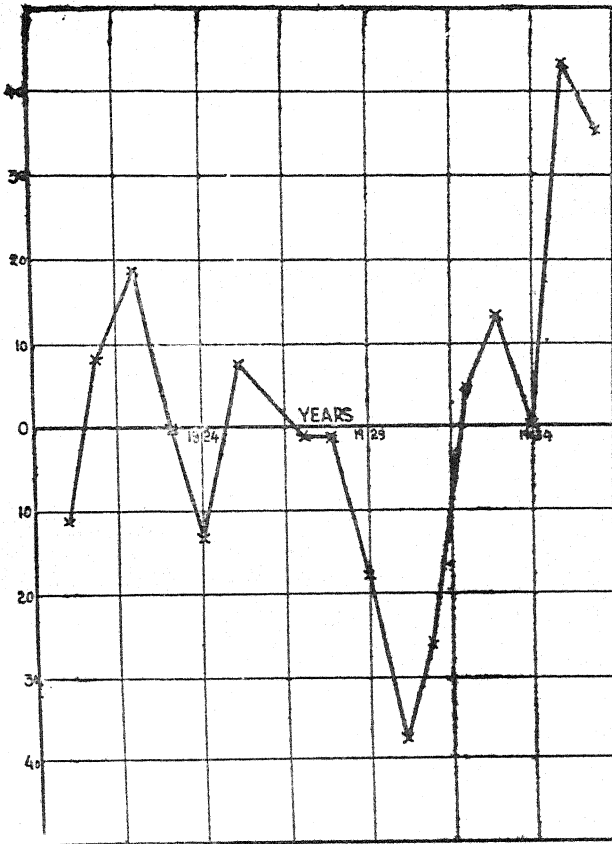
(३) इन विचलनों के समायत (Squares) निकालिए और उन समायतों का योग मालूम कीजिए।

(४) समंकमाला के विभिन्न पदों को कालिक-विचलनों से गुणा कीजिए और उनके गुणनफलों का योग निकालिये।

(५) उपरोक्त उदाहरण के समान वृद्धि की दर मालूम कीजिए।

(६) प्रवृत्ति के कोटि-अक्ष अंक निकालने के लिए मध्य वर्ष के सामने समंक माला का मध्यक रख कर वृद्धि दर के प्रयोग से उपनति के अंक मालूम कीजिए।

उपरोक्त वर्णित रीतियाँ अल्पकालीन प्रवृत्तियों के निरसन (Elimination) के द्वारा सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति मालूम करती हैं परन्तु जब कभी अल्पकालिक उच्चावचनों को महत्व देना अभीष्ट हो तो सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति

का निरसन करना होगा। ऐसा करने के लिए समंकों का पुर्नप्रांकण (Replotting) करना होगा। पुर्नप्रांकण के समंक समंकमाला के अंकों में से तंत्संवादी चल-माध्यों को घटाकर मालूम किए जायेगें। इन्हीं अन्तरों को अल्पकालीन प्रदोल (Oscillations) कहते हैं। अल्पकालीन प्रदोल को प्रदर्शित करने वाले समंकों को प्रांकित करते समय भुजाक्ष पर काल और कोटि-अक्ष पर प्रवृत्ति से विचलनों का प्रांकण किया जायेगा। जैसा कि नीचे के चित्र से स्पष्ट है जिसमें चल-माध्यों से विचलनों को प्रांकित किया गया है।

अल्पकालीन प्रदोल

अल्पकालीन परिवर्त्तन या प्रदोल वृद्धि और ह्रास के कारणों से आकस्मिक रूप से सुदीर्घकाल की प्रवृत्ति में उच्चावचन निर्माण कर देते हैं। ये परिवर्त्तन तीन प्रकार के होते हैं:—(१) आर्तव या मौसमी (Seasonal) (२) आकस्मिक या असमान्य (Accidental or Abnormal) और (३) आवर्तिक (Periodic)।

आर्तव या मौसमी विचरण

प्रायः सभी व्यवसायिक क्रियाओं पर मौसमी या आर्तव प्रभाव पड़ते हैं जिनके कारण व्यापार में तेजी मंदी आती है। इन परिवर्त्तनों का प्रभाव ये होता है कि सामान्य व्यापारिक स्थिति से व्यापार अधिक या कम होने लगता है परन्तु यह केवल अल्प-काल के लिए ही जब तक आर्तव या मौसम का प्रभाव रहता है। आर्तव-प्रभाव चक्रीय (Cyclical) प्रभाव की अपेक्षा थोड़े समय के अन्तर से आता है और अल्पकाल के पश्चात् ही चला भी जाता है। ये भी एक प्रकार के आवर्त्तिक प्रदोल (Periodic oscilliations) कहे जाते हैं परन्तु इनकी अवधि कम रहती है।

आर्तव या मौसमी परिवर्त्तनों को नापने के लिए सामान्य रूप से निम्नलिखित रीतियों का प्रयोग किया जाता है:—

(१) आर्तव माध्य रीति (Seasonal Average Method):— इस रीति के अनुसार प्रत्येक मौसम का माध्य निकाला जाता है। यदि समंकों पर चक्रीय उच्चावचनों का प्रभाव हो तो माध्य निकालने से पूर्व कुछ परिवर्त्तन करने पड़ते हैं। मौसम के माध्य निकालने के लिए वर्ष के प्रत्येक महीने के समंकों को कई वर्षों के लिए जोड़ लिया जाता है और उन योगों को वर्षों के योग से भाग दे दिया जाता है—जैसे जनवरी या फरवरी कई वर्षों की जोड़ कर उन्हें वर्षों की संख्या से भाग दे दिया जाए। इस प्रकार आर्तव-माध्य मालूम कर लिए जाते हैं। इस रीति को 'मासिक योग' या 'मासिक माध्य' रीति भी कहते हैं। कभी कभी प्रत्येक महीने का योग कुल महीनों के माध्य के प्रतिशत के रूप में भी लिखे जाते हैं जो कि आर्तव परिवर्त्तनों के द्योतक होते हैं। इस रीति का गुण इस बात में है कि यह बहुत आसान है परन्तु इसका दोष है कि यह सुदीर्घकालीन प्रवत्ति को एकदम महत्व नहीं देती।

(२) प्रवृत्ति रीति (Trend Method):—उपरोक्त रीति प्रवृत्ति के अंकों को किंचित मात्र भी महत्व नहीं देती है इसलिए 'प्रवृत्ति के अनुपातों' (Ratio to-Trend) को रीति का प्रयोग किया जा सकता है। इस रीति के अनुसार समंकों को महीनों और वर्षों के अनुसार विन्यस्त करके प्रत्येक मास के लिए प्रवृत्ति के अंक निकाल लिए जाते हैं और प्रत्येक मास के समंकों को इन प्रवृत्ति के अंकों के अनुपात के रूप में लिखा जाता है। इन मासिक अनुपातों को फिर जोड़ कर संख्या से भाग दे दिया जाता है। तदुपरान्त प्रत्येक मास के औसत अनुपात को मौसमी निर्देशांक के अनुसार ठीक कर लिया जाता है। यद्यपि यह रीति प्रवृत्ति को महत्व देती है इसमें एक बड़ा दोष है कि परिगणन में गल्ती होने के अतिरिक्त कभी कभी चक्रीय उच्चावचनों का प्रभाव बना ही रहता है।

(३) चल माध्य रीति (Moving Average Method):—यह रीति उपरोक्त वर्णित रीति के समान ही है परन्तु इसमें उपरोक्त रीति के प्रतिकूल अन्वायोजित प्रवृत्ति (Fitted Trend) के स्थान पर चल माध्यों का प्रयोग किया जाता है। प्रवृत्ति के अंक निकालने के लिए १२-मासिक चल माध्यों का प्रयोग किया जाता है क्योंकि १२ मासिक माध्य निकालने में मौसमी परिवर्त्तनों का पूर्णतः निरसन हो जाता है यदि उनकी प्रकृति स्थिर हो। समंकमाला के प्रत्येक अंक को प्रवृत्ति के अंकों के प्रतिशत के रूप में दर्शाया जाता है और यही प्रतिशत अल्पकालीन प्रदोल के मापक होते हैं।

(४) श्रंखला मूल्यानुपात रीति (Chain Relatives Method):—इस रीति के अनुसार पिछले मास पर आधारित चालू मास के संबद्ध मूल्यानुपात निकाल लिए जाते हैं उदाहरणार्थ प्रत्येक जनवरी के लिए दिसंबर, फरवरी के लिए जनवरी, और मार्च के लिए फरवरी का आधार मान लिया जाए। इसके बाद इन मूल्यानुपातों के मध्यक निकालकर फिर उनके किसी एक समान आधार पर श्रंखला मूल्यानुपात निकाल लिये जाते हैं। इन श्रंखला मूल्यानुपातों को इस प्रकार से लिखा जाता है कि प्रत्येक मूल्यानुपात जनवरी मास के मूल्यानुपात का प्रतिशत होता है। अन्त में सामान्य वर्ष के औसत मासिक अंक निकालने के लिए समायोजित (Adjusted) श्रंखला मूल्यानुपातों का मध्यक निकाल लिया जाता है और आर्तव निर्देशांक (Seasonal Index) मालूम करने के लिए इस मध्यक

(१) प्रवृत्ति विक्षेपण और वक्र अन्वायोजन रीतिः—प्रवृत्ति विक्षेपण (Trend Projection) और वक्र अन्वायोजन (Curve Fitting) रीति द्वारा समंकों की सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति को भविष्य काल में विक्षेपण करके या प्रवृत्ति के आधार पर वक्र अन्वायोजन करके पूर्वानुमान लगाए जाते हैं। प्रायः चार प्रकार की प्रवृत्तियाँ पाई जाती हैं और उनवे अनुरूप वक्रों का अन्वायोजन किया जाता है— (१) एक सीधी रेखा जो गणितीय वृद्धि दर्शाती हो (२) एक छेदा सरल रेखा या चक्रवृद्धि ब्याज प्रवृत्ति जो गुणोत्तर वृद्धि दर्शाती हो (३) अंग्रेजी के 'S' वर्णाक्षर वे समान वक्र जो पहले कम फिर अधिक और अंत में कम वृद्धि दर्शाता हो औ (४) एक अनियमित सरलित वक्र जो किसी विशिष्ट प्रकार की व्यापारि प्रवृत्ति दर्शाता हो।

(२) व्यवसायिक चक्र या चक्रीय उच्चावचन रीति :—व्यवसायिक च या चक्रीय उच्चावचनों का अध्ययन करके व्यवसायिक पूर्वानुमान लगान एक कठिन कार्य है और इसके लिए वक्रों का निर्वचन (Interpretation करते समय प्रत्येक वक्र के परिवर्तन की दिशा, पिछले चलन की दिशा औ परिवर्त्तन की मात्रा का ध्यान रखा जाता है। जब संबद्ध अंक-माला में कालिक-विलम्बना (Time Lag) हो तो विलम्बना की मात्रा का अनुमा लगाकर उसके अनुसार ही वक्रों का निर्वचन करना चाहिए।

(३) व्यवसायिक क्रियाओं का विश्लेषण और स्थिति तत्व रीतिः- इस रीति के अनुसार (अ) पिछली परिस्थितियों की ऐतिहासिक समीक्ष (Historical Analysis) और (ब) वर्त्तमान स्थिति की विभागीय समीक्ष (Cross-section Analysis) द्वारा पूर्वानुमान लगाए जाते हैं। ऐ हासिक समीक्षा की सामान्य क्रिया से महत्वपूर्ण विवरण के अतिरिक्त चक्र कारण और उनके प्रतिफल मालूम हो जाते हैं और वर्तमान स्थिति विभागीय समीक्षा से किसी विशिष्ट स्थिति के मूल कारण और प्रभ इत्यादि ज्ञात हो जाते हैं। इस रीति में प्रमुख रूप से तीन होते हैं :—

(अ) व्यवसायिक क्रिया को विभिन्न भागों में बाँटकर व्यक्तिगत प्रवृत्ति मालूम करली जातीं हैं।

(ब) इसी प्रकार वर्त्तमान व्यवसायिक स्थिति के विभिन्न भाग करके उनमें से प्रत्येक का अलग अलग अध्ययन किया जाता है।

(स) पहिले और दूसरे क्रमों के प्रतिफलों को मिलाकर उनके आधार पर अनुमान लगा लिया जाता है।

(४) आधार निर्देशांक रीति (Basic Indicators)—इस रीति के अनुसार निर्देशाँकों का प्रयोग किया जाता है। कुछ ऐसी वस्तुएँ बाजार में होती हैं जो प्रत्येक छोटी सी घटना से भी प्रभावित होती है। ऐसी वस्तुओं को बाजार के आधार निर्देशांक या परिस्थिति मापक यंत्र मान लिया जाता है और उनके परिवर्तनों के आधार पर पूर्वानुमान लगाए जाते हैं। उदाहरणार्थ अभी तक शयर बाजार के निर्देशांक के रूप में टाटा आइरन और स्टील कम्पनी के डेफर्ड शेयरों को समझा जाता था।

(५) प्रमाप-विचलन के आधार पर पूर्वानुमान लगाने की रीतिः—इस रीति का प्रयोग उस समय किया जाता है जबकि कोई दो या अधिक चल आपस में सह-संबंधित हों। पूर्वानुमान लगाने के लिए सह-सम्बंध गुणक, मध्यक और प्रमाप-विचलनों पर आधारित प्रतीपगमन सूत्रों (Regression Equations) का भी प्रयोग किया जाता है।

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. Distinguish between secular trend (सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति) Seasonal variations (आर्तव उच्चावचन) and cyclic fluctuations. How will you measure the secular trend in any given data.

(*M. Com., Agra,* 1946).

2. Describe one method each of (a) eliminating the effect of trend from time series (कालिक-माला से प्रवृत्ति के प्रभाव के निरसन के लिए) and (b) measuring the seasonal variation (आर्तव उच्चावचन के मापन के लिए).

In measuring seasonal (आर्तव) variation can cyclical (चक्रीय) and erratic influences be eliminated ? How ?

(*I.A.S.*, 1948).

3. Represent the following data graphically, and using 3-years Moving Average (चल माध्य) indicate the trend of the series.

Birth	Birth-Rate	Year	Birth-Rate	Year	Birth-Rate
1917	30·9	1924	31·0	1931	23·1
1918	30·2	1925	29·0	1932	23·7
1919	29·1	1926	27·9	1933	22·6
1920	31·4	1927	27·7	1934	23·6
1921	33.4	1928	26.4	1935	23·0
1922	30·2	1929	24·7	1936	22·0
1923	30·4	1930	24·1	1937	22·6
				1938	22·9

(*M.A.*, *Alld.*, 1951).

4. Explain how you will deal with a time series (कालिक माला) and illustrate your remarks with the help of the following series:—

Quarter	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930
1	102	102	106	108	110	109	121	106
2	107	90	102	107	110	109	125	204
3	101	88	101	108	104	110	122	91
4	98	98	106	108	101	114	108	84

(*M. Com.*, *Nagpur*, 1942).

5. Convert the following yield of major foodgrains in India into index numbers with figures for 1938-39 equated to 100, and fit a straight-line trend by the method of least squares (अल्पतम वर्ग रीति द्वारा एक सीधी रेखा का अन्वायोजन कीजिए) to the indices thus computed :—

Year	Yield (in Millions of tons)
1934-35	52·7
1935-36	49·9
1936-37	55·5
1937-38	54·3
1938-39	49·6
1939-40	53·0
1940-41	50·2

(Index Numbers and trend (प्रवृत्ति) need not be graphically presented). (*M. Com., Alld.,* 1945).

6. Draw a graph of the following series and study its trend :—

Year	Value	Year	Value	Year	Value
1920	505	1927	734	1934	999
1921	610	1928	562	1935	883
1922	630	1929	750	1936	805
1923	670	1930	980	1937	900
1924	575	1931	820	1938	1.050
1925	680	1932	743	1939	935
1926	895	1933	789	1940	930

(*B. Com., Alld.,* 1945).

7. The following table shows the available supplies of all cereals per adult in India for a number of years :—

Year	lbs.	Year	lbs.
1931-32	427	1938-39	360
1932-33	416	1939-40	382
1933-34	408	1940-41	352
1934-35	408	1941-42	355
1935-36	379	1942-43	358
1936-37	405	1943-44	383
1937-38	390	1944-45	361

Draw a graph to represent the above data. Calculate 3-yearly Moving average (त्रिवर्षीय चल माध्य) and plot (अंकित कीजिए) them on the same chart. What are the deviations of the actual values from the moving average for the years 1941-42 and 1943-44? (*M. Com., Raj.* 1951).

8. Assuming a ten-year cycle for the following series relating to Index Numbers of the Retail Prices of Wheat in India (1873 = 100), give the trend values (प्रवृत्ति के अंक) and represent graphically the short-time fluctuations (अल्पकालीन उच्चावचन) with the trend removed.

Year	Annual average	Year	Annual average	Year	Annual average
1906	155	1914	200	1922	315
1907	168	1915	227	1923	356
1908	226	1916	193	1924	246
1909	203	1917	205	1925	294
1910	170	1918	270	1926	281
1911	153	1919	341	1927	267
1912	170	1920	310	1928	264
1913	177	1921	360	1929	262

(*M. Com., Alld.*, 1944).

9. (a) Explainfully what is meant by secular trend (सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति), seasonal variations (आर्तव उच्चावचन) and cyclical fluctuations (चक्रीय), illustrating your answer.

(b) Study the short-time fluctuations (उच्चावचन अल्पकालीन) the following temperatures measured in degrees Farenheit.

Date Feb. 1941	Temp. of	Date Feb. 1941	Temp. of	Date Feb. 1941	Temp. of
1	40	8	40	15	62
2	50	9	56	16	68
3	44	10	68	17	86
4	70	11	78	18	96
5	52	12	80	19	94
6	44	13	60	20	78
7	36	14	64		

(*B. Com., Alld.,* 1942).

10. Plot (अंकित कीजिए) the following Index Numbers of Wholesale Prices in U.S.A. and show the trend (प्रवृत्ति) of general prices :—

Year	Index	Year	Index
1800	129	1870	135
1810	131	1880	100
1820	106	1890	82
1830	91	1900	82
1840	95	1910	103
1850	84	1920	226
1860	93	1930	126

(*B. Com., Alld.,* 1935).

11. Explain the use of Moving Average (चल माध्य) in the Analysis of Time Series. Find out an approximate Moving Average for the following series :—

1901	506	1912	818
1902	620	1913	745
1903	1036	1914	845
1904	673	1915	1276
1905	588	1916	898
1906	696	1917	814
1907	1116	1918	929
1908	738	1919	1360
1909	663	1920	961
1910	777	1921	926
1911	1189		

(*M. A., Cal.,* 1936).

अध्याय १७.

सांख्यिकीय निर्वचन

(Interpretation of Statistics)

पिछले अध्याय में हमने काल परिवर्तनों के विश्लेषण और व्यापारिक पूर्वानुमान के सम्बन्ध में पढ़ा है और हम देख चुके हैं कि अनेक रीतियों के प्रयोग द्वारा विश्लेषण करने के पश्चात् भूतकालिक अनुभव के आधार पर ही भविष्य के लिए अनुमान लगाए जाते हैं। वास्तव में अनुमान लगाने का कार्य समंकों के यथार्थ निर्वचन पर आधारित होता है। सांख्यिकीय सामग्री को एक अंधे आदमी के समान अपने विचारों के पुष्टि के लिए ही केवल प्रयोग न करना चाहिए वरन् उनके द्वारा ज्ञान का विकास होना चाहिए। वास्तव में समंकों के वैज्ञानिक निर्वचन द्वारा ही यथार्थ निष्कर्षों तक पहुँचा जाता है। इस प्रकार हम देखते हैं कि सांख्यिकीय निर्वचन किसी भी निश्चित क्षेत्र के सम्बन्ध में तर्कशुद्ध निष्कर्ष निकालने का एक तरीका है।

सांख्यिकीय तर्क का विभिन्न क्षेत्रों में महत्व देखते हुए यह कहना पड़ता है कि यह एक विशेषज्ञ का कार्य है। क्योंकि समंकों के ऊपर उनके गुणों की छाप नहीं रहती इसलिए उनका प्रयोग सावधानी से किया जाना चाहिए। क्योंकि अवैज्ञानिक और समंकों के छल प्रयोग भ्रामक निष्कर्षों का प्रतिपादन करते हैं इसलिए सांख्यिकीय ढंगों के प्रयोगी को एक कलाकार का दृष्टिकोण रखना चाहिए जो उन्हीं वस्तुओं से सुन्दर भावनाओं को मूर्त्त स्वरूप प्रदान करता है, जिन्हें दूसरे व्यक्ति कुरुप चित्रों में परिवर्त्तित करते हैं।

आज कल आर्थिक क्रिया में सहकारिता का महत्व बढ़ता जा रहा है और राष्ट्रीय नियोजन के लिए समंकों का संकलन प्रयोग और निर्वचन की अत्यन्त आवश्यकता है। यह कार्य यदि अनुभवहीन व्यक्तियों पर छोड़ दिया जाएगा तो इस बात का पूरा भय है कि किसी छलसाधन के बिना ही गलत निष्कर्ष निकाल लिए जाएँ। जिस प्रकार समंकों के संकलन, वर्गी-करण और सारणीयन में सामान्य ज्ञान और अनुभव की आवश्यकता होती

है उसी तरह निर्वचन की तो वे आधार शिलायें हैं। प्रायः निर्वचन करने वाला व्यक्ति वह व्यक्ति होना चाहिए जिसे समंकों के उद्गम का पूर्णज्ञान, और उनके अर्थ एवं उपयोगिता का पूर्ण अनुमान हो।

उदाहरणार्थ, जनगणना-आयुक्त जनगणना के समंकों का एक ऐसे अर्थशास्त्री की अपेक्षा अधिक अच्छा निर्वचन करेगा जिसने केवल उन्हें जनगणना की रिपोर्ट से लिया हो। निर्वचक (Interpreter) के लिए पक्षपात शून्य होना चाहिए और निर्वचन समुचित और यथार्थ समंकों के आधार पर ही किया जाना चाहिए। जब संगृहीत सामग्री सविचार निदर्शन का प्रतिफल हो तो अभिनत या पक्षपात का प्रभाव निर्वचन में भी झलकने लगेगा। इसलिए सविचार प्रवरित न्यादर्श के निर्वचन में संभाव्य विभ्रमों को दूर करने का प्रयत्न करना चाहिए। यदि संग्रहीत सामग्री दैव-प्रवरण द्वारा प्राप्त की गई हो तो निर्वचन में पक्षपात का भय नहीं रहता और यथार्थ निष्कर्ष निकलने की पूर्ण आशंसा रहती है। समंकों के निर्वचन करते समय न्यादर्श की समुचितता की जाँच करने के प्रयोग करने चाहिए और अस्थिर समंकों को त्याग देना चाहिए। निर्वचन के समंक समान, तुलनीय और स्पष्ट होने चाहिए। निर्वचन करते समय विभ्रम की प्रकृति मालूम कर लेना चाहिए क्योंकि यदि विभ्रम अनभिनत (Unbiassed) हुआ तो निष्कर्ष पर प्रभाव न पड़ेगा और अभिनत विभ्रम तो निर्वचन का स्वरूप ही बदल देगा।

निर्वचन के विभ्रम (Errors)

प्रायः सभी प्रकार की सावधानी बरतने पर भी निर्वचन में विभ्रम हो ही जाते हैं निर्वचन के विभ्रम अनेक कारणों से होते हैं, जैसे भ्रामक या अपूर्ण समंक, अभिनत या छलपूर्ण समंकों का प्रदर्शन, भ्रमपूर्ण तर्क और सांख्यिकीय ढंगों का दुरुपयोग। कभी कभी सांख्यिकीय ढंगों से अनभिज्ञ व्यक्ति निर्वचन जैसा दुस्कर कार्य हाथ में ले लेते हैं और ऐसी दशाओं में निष्कर्ष हमेशा ही गलत निकलते हैं। प्रायः विज्ञापनकर्त्ता और मतदान-प्रतिनिधि अपने कार्य के संपादन के हेतु समंकों का छलसाधन करते हैं। अपने अपने कार्य की सिद्धि के लिए सांख्यिकीय तर्क का प्रयोग तो आजकल के युग में बहुत सामान्य सा दिखलाई पड़ता है। निर्वचन के विभ्रम निदर्शन प्रणाली के कारण भी होते हैं। यदि न्यादर्श

बहुत छोटा होगा तो न्यादर्श विभ्रम बहुत बड़ा होगा और सामान्यत: न्यादर्श विभ्रम समग्र में अंकों के बंटन पर निभर रहता है। यदि न्यादर्श की आकृति बढ़ा दी जाए तो न्यादर्श विभ्रम कम हो जाता है। इसके अतिरिक्त निदर्शन की प्रणाली का भी विभ्रम के आकार पर प्रभाव पड़ता है। जैसा कि पहले कहा जा चुका है सविचार-प्रवरण में विभ्रम दैव-प्रवरण की अपेक्षाकृत बहुत अधिक होता है।

निर्वचन के विभ्रम सांख्यिकीय ढंगों, गुणकों और अचल पदों के गलत प्रयोग से भी उत्पन्न होते हैं। कभी कभी गणितीय माध्य (मध्यक) के प्रयोग से एकदम गलत निष्कर्ष निकलते हैं। जब किसी समंकमाला के पदों में परस्पर महत्व सम्बन्धी विभिन्नताएँ हों तो उनके महत्व के अनुसार भार-वंटन किया जाता है और ऐसी दशा में यदि एक भारित मध्यक के स्थान पर साधारण मध्यक का प्रयोग किया जाए तो उसके निर्वचन द्वारा प्राप्त किया गया निष्कर्ष वास्तविकता से बहुत दूर होगा। इसके अतिरिक्त 'भार' की परिभाषा और उसके प्रयोग के कारण भी निर्वचन सम्बन्धी विभ्रम उत्पन्न हो जाते हैं। सच तो यह है कि मध्यक समग्र को समझाने में पूर्ण रूप से समर्थ नहीं होता है। श्री वावले के मतानुसार "समग्र के बहुत से महत्वपूर्ण गुणों को समझाने की अपेक्षा मध्यक उन्हें छिपा लेता है क्योंकि यह एक संक्षिप्त संकेत मात्र है और प्राय: काहिली के कारण एक संकेताक्षर द्वारा समग्र को समझाने के लिए प्रयुक्त किया जाता है।"

निर्वचन के विभ्रम प्राय: निर्देशांकों के गलत प्रयोग और निर्वचन के कारण भी उत्पन्न होते हैं। निर्देशांक अनेक तत्वों के विचरण का एक संगृथित माध्य है और मध्यक के समान वह उन तत्वों के पूर्ण अर्थ को समझाने में असमर्थ सिद्ध होता है। जैसा कि हम देख चुके हैं निर्देशांकों के परिगणन में अनेक प्रकार के माध्यों का प्रयोग किया जाता है और विभिन्न भार-वंटन की रीतियाँ अपनाई जाती हैं। निर्देशांकों का निर्वचन भी उन माध्यों और भार-वंटन के तदुनुरूप ही होगा। प्राय: निश्चित निर्देशांक निश्चित प्रकार के मूल्यानुपातों के प्रदर्शन करने के ही लिए प्रयोग किये जाते हैं इसलिए यदि उनका गलत प्रयोग कर लिया जाए तो भी निर्वचन में विभ्रम उत्पन्न हो जाएगा। निर्देशांक किसी एक तथ्य की ओर संकेत नहीं करता वरन् वह मूल्य के स्तर में होने वाले परिवर्तनों की ओर निर्देश

करता है और उन परिवर्त्तनों के कारण नहीं बतला सकता है। इसलिए जब सांख्यिकीय तर्क का प्रयोग निर्देशांक की सहायता से मुद्रास्फीति या मुद्रा-संकुचन को बतलाने में किया जाता है तो भ्रामक निष्कर्ष निकल सकता है क्योंकि मूल्य-स्तर तो विभिन्न कारणों द्वारा प्रभावित होता है। इसी प्रकार जब देश के निवासियों की आय बढ़ रही हो और मूल्य भी बढ़ रहा हो तो केवल निर्देशांक देखकर यह नहीं कहा जा सकता है कि व्यक्तिओं की यथार्थ आय (Real Income) बढ़ रही है। उसके लिए तो यथार्थ आय के निर्देशांक अलग निकालने पड़ेंगे या मूल्य निर्देशांकों के आधार पर ही आय के निर्देशांकों का वैज्ञानिक निर्वचन करना पड़ेगा। इस प्रकार के उदाहरण में अनुभवहीन निर्वचन गलत निष्कर्ष निकालेगा।

उदाहरण

किसी एक मजदूर के भृत्ति-सम्बन्धी अंक और मूल्य निर्देशांक नीचे के प्रश्न में दिये गए हैं। उनकी सहायता से मजदूर की यथार्थ भृत्ति में वृद्धि का निर्वचन कीजिए।

वर्ष	भृत्ति	मूल्य निर्देशांक
१९३९	२००	१००
१९४२	२४०	१६०
१९४३	३५०	२८०
१९४४	३६०	२९०
१९४५	३६०	३००
१९४६	३७०	३२०
१९४७	३७५	३३०

उपरोक्त श्रमिक की आय का निर्वचन करने के लिए हमें सर्वप्रथम यथार्थ भृत्ति के निर्देशांक मालूम करने पड़ेंगे जोकि नीचे दी हुई रीति से निकाले जाएगें।

वर्ष	मौद्रिक भृत्ति निर्देशाँक (आधार १९३९)	यथार्थ भृत्ति निर्देशाँक	परिगणन
१९३९	१००	१००	१००
१९४२	१२०	७५	$\frac{१२०}{१६०} \times १००$
१९४३	१७५	६२·५	$\frac{१७५}{२८०} \times १००$
१९४४	१८०	६२	$\frac{१८०}{२९०} \times १००$
१९४५	१८०	६०	$\frac{१८०}{३००} \times १००$
१९४६	१८५	५७·९०	$\frac{१८५}{३२०} \times १००$
१९४७	१८७·५	५६·८	$\frac{१८७.५}{३३०} \times १००$

उपरोक्त उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाता है कि यदि यथार्थ भृति के निर्देशाँक न निकाले जाएँ और केवल आय के आरोही निर्देशाँकों के आधार पर ही आय-सम्बन्धी धारणायें बनाई जाएँ तो बेचारा श्रमिक वास्तविकता से परे एक धनी व्यक्ति दिखलाई पड़ने लगता है।

निर्वचन सम्बन्धी विभ्रम समग्र के अंक-वंटन के सम्बन्धी मापों के ग़लत प्रयोग करने से भी हो जाते हैं। यदि विचरण-विस्तार, चतुर्थांशान्तर-विस्तार या अन्तर-माध्य (Mean difference) का प्रयोग किया जाए तो वही अर्थ नहीं लगाया जा सकता है जोकि मध्यक या प्रमाप-विचलन द्वारा लिया जाता है। इसके अतिरिक्त कभी कभी तुलना केवल निरपेक्ष मापों में ही करली जाती है परन्तु सापेक्षिक मापों की तुलना के बिना निष्कर्ष अवश्य ही भ्रामक होगें। लारेंज वक्र की सहायता से यद्यपि समग्र का अंक वितरण समझाया जा सकता है परन्तु उन वक्रों का निर्वचन करते समय यदि विचरण गुणक का भी प्रयोग किया जाए तो तुलनात्मक निष्कर्ष बिल्कुल यथार्थ होगें। सांख्यिकीय मापों में निर्वचन करते समय संभाव्य-विभ्रम और प्रमाप-विभ्रम का भी ध्यान रखना चाहिये। कभी कभी

मध्यका, भूयिष्ठक और मध्यक के परस्पर सम्बन्ध जिस पर विषमता के माप आधारित हैं समग्र में पाये नहीं जाते ऐसी दशा में विषमता-गुणक का निर्वचन भ्रामक निष्कर्ष देगा। उदाहरणार्थ, किसी भी साधारणतः असंमित अंक-वंटन में (मध्यक-भूयिष्ठक) बराबर होता है ३ (मध्यक-मध्यका), के परन्तु यदि असाधारण रूप से असमित समग्र का विषमता-गुणक निकाला जाए तो वह विषमता-गुणक भ्रामक होगा। इसके अतिरिक्त सामान्य-वक्र सभी एक से नहीं होते हैं। उन्हें समझाने के लिए उनके निर्वचन में उनकी पृथुशीर्षता (Kurtosis) को महत्व देना चाहिए।

सह-सम्बन्ध गुणक के निर्वचन में भी प्रायः विभ्रम उत्पन्न हो जाते हैं। सह-सम्बन्ध गुणक का निर्वचन दो प्रकार से किया जाता है:—(अ) मात्रा के अनुसार और (ब) महत्व के अनुसार। जब मात्रा के अनुसार निर्वचन किया जाता है तो यह गुणक (+१) और (—१) के बीच में विचरण करता है और उसी के अनुसार अनुलोम, पूर्णतः अनुलोम, विलोम और पूर्णतः विलोम कहा जाता है। महत्व के अनुसार निर्वचन करते समय साधारण नियमों के अतिरिक्त यदि यह गुणक अपने संभाव्य-विभ्रम (Probable Error) के ६ गुणे से अधिक हो तो महत्वपूर्ण अन्यथा महत्वहीन कहलाता है। इन दोनों ही रीतियों का विशेष महत्व है और यदि इनका ठीक२ प्रयोग न किया जाए तो निष्कर्ष भ्रमात्मक हो जाएगा। वास्तव में यह एक गणितीय संख्या है जिसके निवर्चन में उसके नियम और विशेष परिस्थितियों के अनुसार ही तर्क का प्रयोग करना चाहिए। कभी कभी केवल गणित के प्रयोग से सह-सम्बन्ध गुणक निकाल लिए जाते हैं जबकि दो समंक मालाओं में जरा भी सह-सम्बन्ध या आश्रयभूतत्व न पाया जाता हो उदाहरणार्थ, रेल दुर्घटनाओं और रेडियो के सुनने वालों की संख्याओं के बीच का सह-सम्बन्ध गुणक एक मजाक ही होगा। इसके अतिरिक्त सह-सम्बन्ध वाली मालाओं में प्रायः कालिक-विलम्बना (Time Lag) पाया जाता है और यदि इस विलम्बना और पुनरागमन का ठीक प्रबन्ध न किया जाए तो सह-सम्बन्ध गुणक वास्तविक न होगा। कभी कभी समंक मालाओं की प्रकृति ऐसी होती है कि अनुभवहीन व्यक्ति गल्ती कर जाता है जैसा कि अगले पृष्ठ के उदाहरण से स्पष्ट है।

उदाहरण—

नीचे दिए गए समंकों की सहायता से यह स्पष्ट कीजिए कि आयु और चक्षुहीनता में कोई सम्बन्ध है या नहीं।

आयु	व्यक्तियों की संख्या सहस्त्रों में	चक्षुहीन
०—१०	१००	५५
१०—२०	६०	४०
२०—३०	४०	४०
३०—४०	३६	४०
४०—५०	२४	६०
५०—६०	११	३६
६०—७०	६	२२
७०—८०	३	१८

उपरोक्त सारणी के समंकों को देखकर अनुभवहीन और सामान्य ज्ञान से शून्य व्यक्ति आयु और चक्षुहीन व्यक्तियों की मालाओं में सह-संबंध गुणक मालूम करेगा जोकि विलोम होगा और जिसका निर्वचन यह होगा कि आयु के बढ़ने के साथ ही साथ चक्षुहीनता घटती जाती है। परन्तु यह निष्कर्ष वास्तविक जगत का न होगा। इस सारणी में सह-संबंध गुणक निकालने के लिए चक्षुहीनता की दर (प्रतिशत प्रति सहस्त्र या प्रति लक्ष) निकाल कर फिर आयु और चक्षुहीनता दर में सह संबंध निकाला जावेगा। यदि ऐसा किया जाए तो उत्तर अनुलोम होगा जो यह निर्देश करेगा कि दोनों मालाओं में एक ही दिशा में चलन है और आयु के साथ ही साथ चक्षुहीनता बढ़ती जाती है। सह-संबंध गुणक के अतिरिक्त विचरण-गुणक और प्रतीपगमन-रेखाओं और गुणकों के निर्वचन में भी अत्यन्त सावधानी रखनी चाहिए।

आन्तरगणन में निर्वचन विभ्रम होने की केवल एक दशा है जबकि किसी भी सूत्र का प्रयोग करते समय उसके भूलभूत परिकल्पनाओं (Assumptions) का ध्यान रखा जाए। यदि (य) और (र) दोनों

ही मालाओं को महत्व देना हो तो लैंगरैंज की रीति ही सर्वोत्तम होगी ।

गुण-सम्बंध-गुणक के निर्वचन में विभ्रम आँशिक गुण-सम्बंध (Partial Association) के कारण उत्पन्न होते हैं । (का), (खा) और (गा) के समग्र में (गा) की उपस्थिति के कारण (का) और (गा) और (खा) और (गा) के सम्बन्ध के कारण प्रायः (का) और (खा) का गुण-सम्बन्ध यथार्थ न होगा क्योंकि उनके सम्बन्ध पर (गा) की भी छाप तो होगी ही। कभी कभी यही सम्बन्ध भ्रामक (Illusory) भी होता है । इस प्रकार यदि किसी दवाई की शक्ति की परीक्षा करनी हो और चिकित्सा और बीमारी से रक्षा के बीच गुण- सम्बन्ध स्थापित किया गया हो तो वह भ्रामक निष्कर्ष दे सकता है । क्योंकि किसी भी समूह के लिए जहाँ का वह गुण-सम्बन्ध हो यह कहा जा सकता है कि चिकित्सा केवल धनिक वर्ग ही करा सका था और वे अच्छे साफ सुथरे मकानों में रहने के अतिरिक्त एक अच्छा जीवन निर्वाह का स्तर रखते हैं । ऐसी दशा में निर्वचन करते समय इन बातों का ध्यान रखना चाहिए और दवाई की शक्ति को बहुत महत्व न देना चाहिए । यदि गुण-सम्बन्ध-गुणक को ही महत्व देना अभीष्ट हो तो समूह के दोनों ही वर्गों के लिए अलग अलग चिकित्सा और बीमारी से रक्षा के बीच गुण-सम्बन्ध-गुणक निकालना चाहिए ।

"सन् १९५१ जनगणना के आयुक्त की रिपोर्ट का निम्नलिखित अंग बहुत ही सुन्दर ढंग से सांख्यिकोय तर्क प्रणाली को समझाता है:—

यदि आजकल की कमियों को दूर करना हो एवं भारतवर्ष को अपनी ३६ करोड़ जनसंख्या को खिलाना और पहिनाना हो तो उसे ७५० लाख टन वार्षिक की आवश्यकता होगी । यदि आजकल का स्तर कायम रखना है तो यही सन् १९६१ में ८५० लाख टन वार्षिक और सन् १९७१ में ९६० लाख टन वार्षिक और सन् १९८१ में १०८० लाख टन वार्षिक बढ़ाना पड़ेगा । इस प्रकार सन् १९६१ से पहिले २१%, सन् १९७१ से पहिले ३७% और सन् १९८१ से पहिले ५४% उत्पादन में वृद्धि होनी चाहिये । भारतवर्ष के क्षेत्रफल का १५·५ प्रतिशत सिंचाई के नीचे है जोकि चीन को छोड़ कर समस्त विश्व में कोई अन्य देश के पास नहीं है । पंच-वर्षीय योजना अपनी प्रमुख योजनाओं के द्वारा १६०·९ लाख एकड़ भूमि को सिंचाई के नीचे ले आने की उदिष्ट रखता है जबकि

अंग्रेजी राज्य की एक शताब्दी में केवल १४९·४ लाख एकड़ ही सिंचाई के नीचे लाए गए थे। परन्तु बड़े सिंचाई योजनाओं द्वारा बढ़ाई गई सिंचाई आवश्यक सिंचाई की १/४ से कम हो पावेगी। सिंचाई की छोटी योजनाओं द्वारा सिंचाई के क्षेत्र में ११३ लाख एकड़ की वृद्धि होगी और कुल योजनाएं मिलाकर १९६१ तक कुल आवश्यकता का २/५ भाग पूरा हो जावेगा। ...... ये सभी रीतियाँ २४० लाख वार्षिक टन उत्पादन बढ़ा सकेगीं जिसका १/६ खेती के विस्तार, १/३ सिंचाई योजनाओं द्वारा और १/२ अन्य रीतियों से सम्पन्न होगा। परन्तु यह वृद्धि भी सन् १९७१ तक भारत की आवश्यकता पूरी न कर सकेगी और सन् १९८१ तक कमियों को पूरा कर सकेगी जब कि हमारी जनसंख्या ४५ करोड़ हो जावेगी। उपरोक्त समंकों से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि उत्पादन के क्रमिक ह्रास का नियम तेजी से कार्य चला रहा है और हमें एक निश्चित तथ्य का सामना करने के लिए तैयार हो जाना चाहिए कि जनसंख्या को अवाधित वृद्धि के साथ उत्पादन बढ़ाने की हमारी योजना असफल हो जावेगी। हमारा निष्कर्ष यह है कि जनसंख्या की वृद्धि को रोकने का कोई उपाय करना आवश्यक है। जनसंख्या की वृद्धि का नियंत्रण सरकारी उपायों द्वारा ही शीघ्र संभव होगा। ऐसे उपायों का उद्देश्य बच्चों की उत्पत्ति का नियंत्रण करना होना चाहिए जिससे वह मृत्यु दर से उस समय तक बहुत अधिक न बढ़ जाए जब तक हमारी जनसंख्या ४५ करोड़ तक न पहुँच जाए।......... प्रत्येक विवाहित युग्म के यदि ३ बच्चे तक हों तो कोई राष्ट्रीय समस्या नहीं खड़ी होगी। इस संख्या से अधिक बच्चे होने पर 'बुद्धिहीन मातृत्व' होगा जोकि भारतवर्ष में इस समय ४० से ४५ प्रतिशत है। यदि यह 'बुद्धिहीन मातृत्व' दूर किया जा सके तो जन्म दर ४० प्रति सहस्र से २३ प्रति सहस्र रह जाएगी।...........आजकल प्रति सहस्र जो २७ मृत्यु होती हैं उनमें ११ बच्चों की होती है जिनकी वयस ५ वर्ष से कम होती है। यदि जन्म दर में कमी हो जाएगी तो मृत्यु दर २७ प्रति सहस्र से २२ प्रति सहस्र रह जाएगी। इसके अर्थ यह होगें कि जनसंख्या की वृद्धि की दर १३ प्रतिशत प्रति दशक से कम होकर केवल एक प्रतिशत प्रति दशक, रह जाएगी। यदि 'बुद्धिहीन मातृत्व' पूर्णतः दूर न होकर केवल ५ प्रतिशत रह जाए तो वृद्धि दर प्रति दशक २ प्रतिशत रह जाएगी।"

EXERCISES

अभ्यास प्रश्न

1. The following table gives the percentage distribution of expenditure among industrial workers in Bombay in 1921-22 and in 1932-33.

Percentage Expenditure On	1921-22	1932-33
Food	56.32	46.60
Fuel and Lighting	7.29	7.11
Clothing and Footwear etc.	8.40	7.75
Bedding and Household necessaries	2.26	0.13
House-rent	7.67	12.81
Miscellaneous	18.06	25.60
Total	100.00	100.00

What conclusions (प्रतिफल) would you draw from this table regarding the change in the standard of life of workers during the period ? How do these figures affect the validity of a Cost of Living Index Number (जीवन निर्वाह निर्देशांक) for 1931-32 drawn on the basis of the percentage distribution of expenditure in 1921-22?

(*M. Com.*, *Agra*, 1946-50).

2. What is a Logarithmic Graph (छेदावक्र), and what are its uses ? The quantities of cotton piece good exported from India, and imported into India during 1942-43 and 1943-44 were as follows:—

Months	Exports (in million yards)	Imports (in million yards)
1942		
April	103.5	1.0
May	104.7	1.6
June	68.2	1.5
July	62.5	1.7
August	77.6	1.4
September	71.4	1.6
October	46.7	2.0
November	84.8	1.4
December	51.2	0.6
1943		
January	50.0	0.1
February	46.0	0.1
March	51.6	0.1
April	25.4	0.1
May	59.5	0.2
June	46.9	0.1
July	52.9	0.1
August	20.1	—
September	23.6	0.1
October	33.7	0.1
November	66.7	0.3

Represent the figures graphically and comment on trends (प्रवृत्तियों). (*M.A.*, *Agra*, 1945).

3. The following table gives the number of families and income per head of different classes of people in a certain village in U.P.:—

Class of people	Number of Families	Income per head in 1947 in Rupees
Landlord	1	1,000
Cultivators	50	80
Landless labourers	25	40
Money	2	750
School teachers	3	100
Shop-keepers	4	150
Carpenters	3	120
Weavers	5	60

Represent the figures given above by a suitable diagram (चित्रलेख), and discuss the economic condition of the people of the village on the basis of these figures.

(*M.A.*, *Agra*, 1949).

4. The following table gives the percentage distribution of expenditure among industrial workers in Bombay :—

Percentage Expenditure on	1932-33	1944-45
Food	46.60	51.96
Fuel and Lighting	7.11	10.16
Clothing, Footwear, etc.	7.75	11.72
Bedding and Household requisities	0.13	0.50
House-rent	12.81	7.20
Miscellaneous	25.60	17.46
Total	100.00	100.00

What conclusions (निष्कर्ष) would you draw from the above data regarding the change in the worker's standard of life during the period ? (*M.A.*, *Agra*, 1954).

5. Plot the following figures relating to wholesale prices (थोक मूल्यों) and the supply of currency and deposit money in India on a full page graph and comment on their relationship:—

Year 1952	Jan	Feb.	Mar.	April	May	June	July	Aug.	Sept.
Wholesale Price Index	430	416	378	378	367	375	384	387	389
Money supply in crores of Rs.	1886	1898	1887	1890	1873	1850	1832	1816	1797

(*M.A., Agra,* 1954).

6. The table on the next page gives statistics of stoppages of work during the 12 months ending June 1945.

What inferences (प्रतिफल) you will draw from the table ?

Month		No. of stop-pages	No. of Workers involved	Successful	Partially Successful	Unsuccessful	Indefinite	In progress
July	1944	40	31,878	8	6	16	5	5
Aug.	1944	48	51,625	5	14	22	2	5
Sept.	1944	42	41,492	8	11	20	2	1
Oct.	1944	66	33,948	10	14	23	5	14
Nov.	1944	69	35,313	8	13	22	5	21
Dec.	1944	94	76,977	12	33	23	11	12
Jan.	1945	51	35,097	5	8	21	13	4
Feb.	1945	45	39,675	3	6	23	6	6
Mar.	1945	57	39,781	6	9	22	8	9
April	1945	59	45,623	7	6	25	14	2
May	1954	65	30,014	7	15	18	13	8
June	1954	68	54,353	5	5	12	12	8

7. Comment upon the relation, if any, which exists between the volume of currency and price in India from the following table:—

Year	Notes in circulation (in lakhs of Rs.)	Demand Laibilities of scheduled banks (in lakhs of Rs.)	Economic Adviser's General Index No. of Prices (Base Aug. 1939=100)
1939-40	209,22	139,65	125.6
1940-41	241,41	163,90	114.8
1941-42	307,68	211,35	137.0
1942-43	513,44	306,28	171.0
1943-44	777,17	456,63	236.5
1944-45	968,69	584,90	244.2

(*M. Com.*, *Agra*, 1946).

8. What conclusion (निष्कर्ष) would you draw regarding the economic activities of the people living in U.S.S.R. (Russia) from the study of figures given in the following table.

	1928=100						
	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935
Industrial Production	126	164	203	231	250	300	369
Output of Investment goods	131	185	240	279	307	382	481
Output of Consumer's goods	122	147	172	190	200	230	274
Imports	92	111	116	74	37	24	25
Exports	114	128	100	71	61	52	25

(*B. Com.*, *Alld.*, 1939).

9. Examine the validity of the conclusions (निष्कर्ष की सत्यसता की परीक्षा कीजिये) in any two of the following :—

(a) It in observed, the intelligent fathers have intelligent sons; and intelligent grandfathers have intelligent grandsons. Therefore, intelligence is hereditary.

(b) The standard deviation of scores for a group of pupils of an arithmetic tests is 28 and on spelling test is 18. It is concluded that this group is relatively more variable in arithmetic than in spellings. Do you agree?

(c) For families in general in a certain country, there is a positive correlation between the amount of money spent annually for food and that spent for clothing. It is argued that one is the cause and the other the effect in a direct causal connection. (*M. Com., Alld.*, 1946).

10. (a) The death-rate in the American Navy during the Spanish-American war was 9 per thousand while in the city of New York, for the same period, it was 16 per thousand. It was safer, to be a sailer in the American Navy than to live in New York city.

(b) The per capita national income for India for 1931-32 according to the estimates framed by Dr. V. K. R. V. Rao was Rs. 65. The estimate of 1948-49 framed by the National Income Committee was Rs. 225. In 1948-49 India was, therefore, four times more prosperous than in 1931-32. Do you agree?

(c) The Examination result of School X was 75% in a particular year. In the same year and at the same examination only 400 out of a total 600 students were successful in school Y.

The teaching standard of the former school was decidedly better. Is it so ? (*B. Com., Delhi*, 1953).

11. Criticize (समीक्षा कीजिये) the argument : "99% of the people who drink beer die before reaching 100 years of age. Therefore, drinking beer is bad for longevity."

(*I.A.S.*, 1948).

घटनाएँ कहते हैं जबकि एक दूसरे के ऊपर उनका कोई प्रभाव न हो। इस प्रकार यदि दो बार एक पाँसा फेंका जाए तो दोनों बार में से एक बार इक्का और दूसरी बार दुक्का आने की संभाविता होगी,

$$\frac{१}{६} \times \frac{१}{६} = \frac{१}{३६}$$

यदि तीन सिक्के साथ साथ उछाले जा रहें हों तो प्रत्येक सिक्के के चित्र आने की संभाविता १/२ है और तीनों सिक्कों के चित्र आने की संभाविता होगी,

$$\frac{१}{२} \times \frac{१}{२} \times \frac{१}{२} = \frac{१}{८}$$

यदि एक ताश की गड्डी में से दो पत्ते आकस्मिक चुनाव (At Random) द्वारा निकाले जाते हैं और दूसरे को निकालने से पहिले पत्ते को गड्डी में रख दिया जाता हो तो इस बात की संभाविता कि उन पत्तों में से पहिला 'पान का पत्ता' और दूसरा 'बादशाह नहीं है' निम्न रीति से निकाली जाएगी।

यदि पहले पत्ते की 'पान का पत्ता' होने की संभावना को (य) और दूसरे के बादशाह न होने की संभावना को (र) माना जाए तो,

(य) की संभावना $= \frac{१३}{५२} = \frac{१}{४}$

बादशाह होने की संभाविता $= \frac{४}{५२}$

$\because$ बादशाह होने की संभाविता $\frac{४}{५२}$ है

$\therefore$ बादशाह न होने की संभाविता अथवा (र) $= १ - \frac{४}{५२} = \frac{१२}{१३}$

$\because$ (य) की संभाविता $\frac{१३}{५२}$ और (र) की संभाविता $\frac{१२}{१३}$ है

$\therefore$ (य) और (र) की संभाविता होगी, $\frac{१}{४} \times \frac{१२}{१३} = \frac{३}{१३}$

इसी प्रकार एक गड्डी में से पत्ते बाँटे जाएँ तो पहले पत्ते के 'हुकुम का पत्ता' या 'महत्वपूर्ण पत्ता' होने की संभावना होगी,

$$\frac{१३}{५२} \times \frac{२०}{५२} = \frac{५}{५२}$$

द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem)

न्यूटन की द्विपद प्रमेय का प्रयोग भी संभाविता निकालने में किया जाता है। यदि सफलता को (य) और असफलता को (र) कहा जाए तो द्विपद प्रमेय का विस्तार निम्नलिखित होगा :—

$$(य + र)^{स} = य^{स} + \frac{स}{१} \; य^{स—१}र^{१}$$

$$+ \quad \frac{स\;(स—१)}{१ \times २} \; य^{स—२}र^{२}$$

$$+ \quad \frac{स(स—१)(स—२)}{१ \times २ \times ३} \; य^{स—३}र^{३}$$

यदि उपरोक्त समीकार को मिश्रित घटनाओं (Compound Events) जैसे चार सिक्कों के उछालने में प्रयोग करें तो उसके पदों का महत्व निम्नलिखित होगा। द्विपद प्रमेय के विस्तार का पहिला पद चारों सिक्कों के चित गिरने की सम्भावना, दूसरा पद तीन के चित और एक के पट गिरने की सम्भावना, तीसरा पद चार में से दो के चित गिरने की सम्भावना, चौथा पद चारों में से तीन के चित गिरने की सम्भावना और पाँचवा पद चारों के पट गिरने की सम्भावना व्यक्त करेगा।

शेपर्ड संशोधन

प्रायः अपकिरण के मापों के परिगणन में संभागों के मध्यबिन्दुओं को प्रतिनिधि अंक मान लिया जाता है। यद्यपि ये मध्यबिन्दु गलत अनुमान हैं परन्तु फिर भी इनके द्वारा उत्पन्न विभ्रमों में एक दूसरे के पूरक होने की प्रवृत्ति पायी जाती है यह विशेष रूप से उस समय पाया जाता है जबकि तृतीय अपकिरण-घात का परिगणन किया जाता है। द्वितीय और चतुर्थ अपकिरण-घातों के परिगणन में इस प्रकार के अनुमान से कुछ अन्तर पड़ जाता है इसलिए कुछ संशोधन की आवश्यकता पड़ती

है । श्री शेपर्ड महोदय के द्वारा कुछ संशोधन बतलाये हैं जोकि निम्न-लिखित ह,

$$\mu_1 = \pi = 0$$

$$\mu_2 = \pi_2 - \frac{h^2}{12}$$

$$\mu_3 = \pi_3$$

$$\mu_4 = \pi_4 - \frac{1}{2} h^2 \pi^2 + \frac{7}{240} h^2$$

उपरोक्त सूत्रों में μ_1, μ_2, इत्यादि संशोधित अपकिरण-घात और π_1, π_2, π_3, π_4 का प्रयोग असंशोधित अपकिरण-घात के लिए किया गया है और (h) सम्भागान्तरों का विस्तार बतलाता है।

निदर्शन

जैसा कि पहले कहा जा चुका है समंक सकंलन के दो प्रमुख ढंग हैं:—(अ) संगणना और (ब) निदर्शन।

संगणना रीति की अनेक सीमायें हैं और उसका प्रयोग निम्नलिखित बातों के पूर्व अध्ययन के पश्चात् ही किया जा सकता है:—(१) अनु-संधानी क्षेत्र की आवृत्ति, (२) पूँजी की प्राप्यता, (३) समय की कमी या अधिकता, (४) अनुसंधान की प्रकृति और उद्देश्य, और (५) प्रगणकों की प्राप्यता। भारतवर्ष में क्षेत्र बड़ा होने के अतिरिक्त निवासियों के जीवन-निर्वाह में बहुत विभिन्नतायें पाई जाती हैं इस कारण एक पूर्ण संगणना लेना कठिन कार्य है। जब बड़े क्षेत्र में संगणना करनी हो तो अधिक प्रगणकों के कारण अभिनति का प्रवेश हो ही जाता है और संगणना के उद्देश्य की पूर्ति नहीं हो पाती हैं। पूंजी की प्राप्यता भी संकलन के ढंग पर अपना प्रभाव डालती है और दोनों ही रीतियों के लिये आवश्यक धन में इतना अन्तर है कि प्रायः संगणना के स्थान पर निदर्शन को ही चुना जाता है। संगणना के कार्य में समय भी बहुत अधिक लगता है क्योंकि इसमें समग्र के सभी अंगों का पूर्ण निरीक्षण किया जाता है। जब समय की कमी हो तो संगणना रीति का प्रयोग किया ही नहीं जा सकता है। यदि अनुसंधान का उद्देश्य यह होगा कि निवासियों की सामाजिक और आर्थिक दशाओं का विशद और यथार्थतम विवरण प्राप्त हो तो

संगणना करनी होगी यद्यपि केवल औसत स्थिति जानने के लिए निदर्शन से भी काम चल जाएगा। राष्ट्रीय-आय-कमेटी की दूसरी रिपोर्ट के अनुसार निदर्शन प्रणाली संगणना की पूरक हो सकती है परन्तु उसे पूर्ण रूप से हटा नहीं सकती।

उपरोक्त सीमाओं के कारण और निदर्शन प्रणाली की सुविधा, कम व्यय और वैज्ञानिक स्वरूप के कारण उसका प्रयोग किया जाने लगा है। निदर्शन प्रणाली के अन्य गुणों के अतिरिक्त एक सबसे बड़ा गुण यह है कि उसके द्वारा संकलन का विभ्रम (Error) भी मालूम किया जा सकता है जिससे समग्र के निर्वचन में आसानी हो।

निदर्शन प्रणाली में भी दो प्रकार से संकलन किया जाता है:—(अ) सविचार-प्रवरण और (ब) दैव-प्रवरण। सविचार-प्रवरण अभिनति और पक्षपात के कारण विभ्रम पूर्ण होता है और दैव-प्रवरण आकस्मिक चुनाव पर आधारित एकत्रित होने के कारण प्रतिनिधि समंक एकत्रित करने में समर्थ होता है।

टिपेट संख्यायें

दैव-प्रवरण में चुने गए अंकों को विश्वसनीय बनाने के लिए पूर्णरूप से प्रतिनिध अंकों का चुनाव किया जाना चाहिए। श्री टिपेट महोदय ने इसीलिये आकस्मिक संख्याओं (Random Numbers) की कुछ सारणी बनाई है जिन्हें विभिन्न जनगणना की रिपोर्टों से लिया गया है और इस प्रकार से विन्यस्त किए गए हैं कि ४१,६०० अंकों के प्रयोग से १०,४००, चार अंकी संख्यायें प्रदान करें। टिपेट द्वारा प्रयोग किए गए अंकों का बड़ा महत्व हो गया है। करीब १००,००० अंक श्री बैंबिंगटन स्मिथ और श्री केनडाल ने भी बनाये हैं और ऐसा करने में उन्होंने आकस्मिकता मशीन (Randomising Machine) का प्रयोग किया है। टिपेट के आकस्मिक अंकों में से प्रथम २० संख्याएँ नीचे दी जा रही हैं।

२९५२	६६४१	३९९२	९७९२	५९११
३१७०	५६२४	४१५७	६५२४	१५४५
१३९६	७२०३	५३५६	१३००	२६९३
२३७०	७४८३	३४०८	२७६२	३५६३

यदि किसी १०,००० अंकों के समग्र में से एक दैव-प्रवरण न्यादर्श १० अंकों का लेना हो तो पहले १० टिपेट संख्यायें जो १०,००० से कम हो ले लेनी चाहिए और यह परिकल्पना कर लेनी चाहिए कि संख्याओं के क्रम १ से १०,००० तक रखे गए हैं।

गुण समंकों का निदर्शन—विपुल न्यादर्श

गुणात्मक न्यादर्श प्रवरण उस समय किया जाता है जब कि किसी समग्र से (का) और (क) लक्षणों वाले अंकों का चुनाव किया जाये। गुणात्मक निदर्शन को साधारण निदर्शन कहते हैं जबकि प्रत्येक घटना के घटित होने की समान आशा हो और सभी घटनाएँ परस्पर स्वतंत्र हों। यदि सभी घटनाओं के घटित होने की आशा एक न हो और वे परस्पर स्वतंत्र न हो तो ऐसे निदर्शन को जटिल-निदर्शन कहते हैं। उदाहरणार्थ, किसी ताश की गड्डी में से दूसरा ताश न रख दिया जाए तो ऐसा निदर्शन जटिल निदर्शन होगा।

साधारण गुणात्मक निदर्शन का मध्यक और प्रमाप-विचलन निम्न-लिखित सूत्रों द्वारा जाने जाते हैं।

$$\text{मध्यक} = \text{स य} = np$$

$$\text{प्रमाप-विचलन} = \text{स य र} = npq.$$

यदि सफलता का अनुपात जानना अभीष्ट हो तो वह निम्नलिखित प्रदान करेगा,

$$\text{अनुपात} = \frac{\text{यर}}{\text{स}} = \frac{pq}{n}$$

प्रमाप विभ्रम (Standard Error)

प्रमाप-विभ्रम, प्रमाप-विचलन का दूसरा नाम है और निदर्शन का विभ्रम नापने के काम आता है। किसी भी अनुमान का प्रमाप-विचलन ही उसका प्रमाप-विभ्रम होता है और अनुमान की यथार्थता की ओर यथार्थ और अनुमानित अंकों के आधार पर संकेत करता है। यह न्यादर्श के विश्वास की परिसीमायें निश्चित करता है और किसी सामान्य-वक्र के मध्यक के दोनों ओर १ प्र. वि. लेने पर ९५% और ३ प्र. वि. लेने पर सभी अंकों को सम्मिलित करता है।

जैसा कि ऊपर कहा जा चुका है कि किसी न्यादर्श का प्रमाप विभ्रम स य र और अनुपात का प्रमाप-विभ्रम $\frac{\text{य र}}{\text{स}}$ होता है।

दो अनुपातों के अन्तर का प्रमाप विभ्रम निम्नलिखित होता है।

$$P_1 — P_2 = \sqrt{\sigma^2 p_1 + \sigma^2 p_2}$$

$$\text{य}_1 — \text{य}_2 = \sqrt{\text{प्र.वि.}^2_{\text{य}^1} + \text{प्र.वि.}^2_{\text{य}^2}}$$

चल समंकों का निर्देशन—विपुल न्यादर्श

चल समंकों के निर्देशन में हमें गुणों के वर्गीकरण के अनुसार न्यादर्श न लेकर आवृत्ति-वंटन के अनुसार न्यादर्श लेना होता है और न्यादर्श की समुचितता, अशंसा और संभाविता और विभ्रम की सीमा एवं न्यादर्श की विश्वसनीयता का अध्ययन करना होता है। न्यादर्श का अध्ययन करने के लिए न्यादर्श के आधार पर बनाए गए सांख्यिकीय मापों और गुणकों का अध्ययन करना आवश्यक है। सांख्यिकीय विभ्रम निकाल कर गुणों के महत्व को आँका जाता है।

नीचे विभिन्न गुणकों के प्रमाप विभ्रम दिए गए हैं:—

माप	प्रमाप विभ्रम	Standard Error
१. मध्यक (लघु न्यादर्श)	$\frac{\text{प्र. वि.}}{\sqrt{\text{यो}}}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
२. मध्यक (विपुल न्यादर्श)	$\frac{\text{प्र. वि.}}{\sqrt{\text{यो}-१}}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{N-1}}$
३. विचरण (Variance)	$(\text{प्र.वि.})^2 \sqrt{\frac{२}{\text{यो}}}$	$\sigma^2 \sqrt{\frac{2}{N}}$
४. मध्यक विचलन	$\cdot ६०२८ \frac{\text{प्र. वि.}}{\sqrt{\text{यो}}}$	$\cdot 6028 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
५. प्रमाप विचलन	$\frac{\text{प्र. वि.}}{\sqrt{2\,\text{यो}}}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$
६. विषमता गुणक	$\sqrt{\frac{३}{2\,\text{यो}}}$	$\sqrt{\frac{3}{2N}}$
७. सह-सम्बन्ध गुणक	$\frac{१-(\text{स})^2}{\sqrt{\text{यो}}}$	$\frac{1-(r)^2}{\sqrt{N}}$
८. दो मध्यकों का अंतर	$\sqrt{\text{प्र.वि.}_1{}^2 + \text{प्र.वि.}_2{}^2}$	$\sqrt{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2}$
९. प्रतीपगमन गुणक	$\frac{\text{प्र.वि.}_{\text{यो}} \sqrt{१-(\text{स})^2}}{\text{प्र. वि.}_{\text{र}} \sqrt{\text{यो}}}$	$\frac{\sigma x \sqrt{1-r^2}}{\sigma y \sqrt{N}}$

उदाहरण (१)

यदि एक सिक्का ४०० बार उछाला जाए तो २१६ दफे चित गिरता है। यह बतलाइये कि क्या सिक्का अनभिनत (Unbiassed) है ।

(I.A.S.)

यदि यह मान लिया जाय कि सिक्का अनभिनत है तो उसके चित गिरने की सम्भावना $\frac{१}{२}$ होगी।

इसलिए ४०० बार सिक्के को उछालने पर उसकी चित गिरने की आशंसा $\frac{१}{२} \times ४०० = २००$ होगी।

गुण-समंकों का प्रमाप-विभ्रम सरल निदर्शन में निम्नलिखित होगा:—

$$\text{प्रमाप विभ्रम} = \sqrt{\text{स य र}}$$

$$= \sqrt{\frac{१}{२} \times \frac{१}{२} \times ४००} = १०$$

उपरोक्त सूत्र में (स) योग के लिए, (य) सफलता और (र) असफलता के लिए प्रयुक्त किए गए हैं ।

जैसा कि ऊपर देखा जा चुका है कि चित आने की आशंसा २०० है और वास्तविकता २१६ तो १६ का अंतर वास्तविकता के अनुकूल हुआ। परन्तु यह अन्तर प्रमाप-विभ्रम का केवल १·६ गुना है,

$$\text{अंतर का अनुपात} = \frac{\text{वास्तविकता} - \text{आशंसा}}{\text{प्रमाप-विभ्रम}}$$

$$= \frac{२१६ - २००}{१०} = १·६,$$

इसलिए यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि यह अन्तर महत्वहीन अंतर है और कदाचित निदर्शन के उच्चावचन के कारण हो गया हो।

अतः निष्कर्ष यह है कि सिक्का अनभिनत है ।

उदाहरण (२)

एक मुहल्ले में १८००० कुटुम्ब रहते हैं जिनमें से ८४० कुटुम्बों का एक न्यादर्श आकस्मिक चुनाव द्वारा लिया गया है । इन ८४० कुटुम्बों में से २०६ कुटुम्बों की मासिक आय ५०) या उससे कम पाई गयी थी । यह मालूम कीजिए कि कुल १८००० कुटुम्बों में से कितने कुटुम्बों की आय ५०) या उससे कम है । अपने अनुमान की परिसीमायें भी बतलाइये ।

(U.P.C.S.)

ऐसे कुटुम्बों का अनुपात जोकि ५०) या उससे कम पाते हैं,

$$(\text{य}) = \frac{२०६}{८४०} = \frac{१०३}{४२०}$$

ऐसे कुटुम्बों का अनुपात जो कि ५०) या उससे कम नहीं पाते हैं,

$$(\text{र}) = \frac{६३४}{८४०} = \frac{३१७}{४२०}$$

यदि यह कल्पना की जाए कि साधारण निदर्शन की स्थिति है तो उन कुटुम्बों के अनुपात का जो कि ५०) या उससे कम आय वाले हैं प्रमाप-विभ्रम निम्नलिखित होगा ।

$$\text{प्र. विभ्रम} = \sqrt{\frac{\text{य र}}{\text{स}}}$$

$$= \sqrt{\frac{१०३}{४२०} \times \frac{३१७}{४२०} \times \frac{१}{८४०}}$$

$$= \cdot०१५ = १\cdot५\%$$

इस प्रमाप-विभ्रम के तीन तीन गुणा अनुमान की परिसीमायें निश्चित करेगा अर्थात् यदि $\frac{१०३}{४२०}$ या २४·५% कुटुम्बों की आय ५०) या उससे कम है तो १८००० कुटुम्बों में (२४·५ + ४·५)% और (२४·५—४·५)% के बीच में कोई संख्या ऐसी होगी जो कि ५०) या उससे कम आय वाले होंगे ।

उदाहरण (३)

गोरखपुर जिले में एक २०० ग्रामों का आकस्मिक न्यादर्श प्रवरण किया गया और प्रत्येक गाँव की औसत आबादी ४८५ व्यक्ति पाई गई जिसका प्रमाप-विचलन ५० है। उसी जिले के २०० गाँवों के एक अन्य न्यादर्श में आबादी प्रति गाँव ५१० और प्रमाप-विचलन ४० है। क्या दोनों न्यादर्शों के मध्यकों का अन्तर सांख्यिकीय महत्व रखता है ?

(U. P. C. S.)

यदि यह कल्पना की जाए कि दोनों ही न्यादर्श स्वतंत्र रूप से लिए गए हैं तो दोनों मध्यकों के अन्तर का प्रमाप-विचलन प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करना पड़ेगा।

$$\text{प्र. वि.}_{\text{म}_1 - \text{म}_2} = \sqrt{\frac{\text{प्र. वि}^2{}_1}{\text{यो}_1} + \frac{\text{प्र. वि.}^2{}_2}{\text{यो}_2}}$$

यदि उपरोक्त संख्याओं को सूत्र में प्रतिष्ठित किया जाए तो निम्नलिखित प्राप्त होगा।

$$\text{प्र. वि.}_{\text{म}_1 - \text{म}_2} = \sqrt{\frac{(५०)^2}{२००} + \frac{(४०)^2}{२००}}$$

$$= \sqrt{२०.५} = ४.५३$$

और दोनों मध्यकों का अन्तर बराबर है, ५१०—४८५ = २५

उपरोक्त अन्तर और दोनों के अन्तर के प्रमाप-विभ्रम का अनुपात निम्नलिखित होगा,

$$\frac{५१० - ४८५}{४.५३} = ५.५४$$

यदि यह अनुपात २.५७६ से कम हो तो अन्तर महत्वहीन माना जाता है और यदि २.५७६ या उससे अधिक हो तो उसे महत्वपूर्ण मानते हैं।

उपरोक्त उदाहरण में अनुपात ५.५४ ह जोकि २.५७६ से अधिक ह इसलिए निष्कर्ष यह निकलता है कि यह अन्तर महत्वपूर्ण है और किसी निदर्शन के उच्चावचन के कारण नहीं हुआ है।

REVISIONARY EXERCISES

1. The marks obtained by students of classes A & B are given below. Give as much information as you can regarding the composition of the classes in respect of intelligence.

Marks obtained	No. of students in class A	No of students in class B
5—10	1	5
10—15	10	6
15—20	20	15
20—25	8	10
25—30	6	5
30—35	3	4
35—40	1	2
40—45	0	2

(*B. Com.*, *Agra*, 1939).

2. What is a weighted average (भारित माध्य) ? Why and how are weights (भार) given ?

Determine which of the towns, A & B is more healthy.

A			B		
Age	Population	Deaths	Age	Population	Deaths
0—15	15,000	360	0—15	20,000	500
15—50	20,000	400	15—50	52,000	1,040
50 & Above	5,000	140	50 & Above	8,000	240
	40,000	900		80,000	1780

(*B. Com.*, *Agra*, 1949).

3. The following table gives the distribution of the male & female population of a certain area in India. By finding the mean (मध्यक) age, the median (मध्यका) age and the upper & lower quartile (अपर एवं अधर चतुर्थांश) ages comment on the age distribution (बंटन) of the two sexes in the area :—

Age of group	Male	Female
0— 9	2,756	2,787
10—19	2,124	2,032
20—29	1,677	1,724
30—39	1,481	1,485
40—49	1,021	1,022
50—59	616	579
60—69	245	296
70—79	97	78
80—89	16	20
90—99	3	4
Total	10,000	10,007

4. Amend (सुधार कीजिए) the following table, and locate the Median (मध्यका) from the amended table. Also measure the magnitude (आकृति) of the Median so located.

Sizes (आकृति)	Frequency (आवृत्ति)
10—15	10
15—17.5	15
17.5—20	17
22—27	25
30—35	28
35—40	30
45 & over	40

(*B. Com.*, *Alld.*, 1942).

5. From the results of the two colleges. A and B given below, state which of them is better, and why :—

	A college		B college	
	Appeared	Passed	Appeared	Passed
M.A.	30	25	100	80
M. Com.	50	45	120	95
B.A.	200	150	100	70
B. Com.	120	75	80	50
Total	400	295	400	295

(*B. Com., Luck.*, 1949).

6. From the following figures find the Standard Deviation (प्रमाप विचलन) and the Coefficient of Variation (विचरण-गुणक).

Marks	No. of persons
0—10	5
10—20	10
20—30	20
30—40	40
40—50	30
50—60	20
60—70	10
70—80	4

(*B. Com., (S) Agra*, 1948).

7. Find the skewness (विषमता) in the series of figures given in Q. No. 6 by two different methods.

8. Compare the distribution of incomes in groups A and B given below.

Income in Rupees	No. of Persons A group	No. of Persons B group
Below—500	80	70
500—1000	200	180
1000—1500	325	250
1500—2000	150	200
2000—2500	115	150
2500—3000	90	100
3000—3500	35	45

(*B. Com.*, (*S*) *Agra*, 1950).

9. From the figures given in Question 8 draw a graph showing cumulative frequencies (संचयी आवृत्ति) of incomes in groups A and B.

(*B. Com.*, (*S*) *Agra*, 1950).

10. Find *r* (स) from the following Index Numbers (निर्देशांक) and interpret (निर्वचन कीजिए) it :

Wages	Cost of Living	Wages	Cost of Living
100	98	99	92
101	99	97	95
103	99	98	94
102	97	96	90
100	95	95	91

(*B. Com.*, *Agra*, 1943).

11. The following tables give the distribution of the total population and those who are wholly or partially blind among them. Find out if there is any relation (सह-सम्बन्ध) between age and blindness:—

Age	No. of persons in thousands	Blind
0—10	100	55
10—20	60	40
20—30	40	40
30—40	36	40
40—50	24	36
50—60	11	22
60—70	6	18
70—80	3	15

(*B. Com., Agra*, 1939).

12. Calculate the Coefficient of Correlation (सह-सम्बन्ध-गुणक) between the size of holding and the number of fragments from the following data.

Number of fragments

Size of Holdings	1	2	3	4	5	6	Total
0—1	3	1	...	...	...	...	4
1—2	5	5	...	...	...	...	10
2—3	6	4	...	...	...	...	10
3—4	6	3	2	2	...	...	13
4—5	7	5	1	...	...	...	13
5—6	10	5	6	1	...	...	22
6—7	8	6	1	...	...	1	16
7—8	2	6	2	3	...	...	13
8—9	1	2	...	1	1	...	5
9—10	1	4	...	1	...	...	6
Total	49	41	12	8	1	1	112

(*B. Com., Agra*, 1953).

13. Find the most likely price in Bombay corresponding to the price of Rs. 70 at Calcutta from the following data.

Average price (मध्यक मूल्य) at Calcutta 65, at Bombay 67, Standard deviation (प्रमाप विचलन) at Calcutta 2.5, at Bombay 3.5, Coefficient of Correlation (सह-सम्बन्ध गुणक) is +.8 between the two prices of the commodity in the two towns.

(*M. Com., Agra*, 1951).

14. Explain the difference between 'Statistics of Attributes' (गुणसमंक) and 'Statistics of Variables' (चल समंक).

The following table gives the distribution of students and also regular players among them, according to age in complete years. (a) Is there any correlation (सह-सम्बन्ध) between age and playing habit ? If eighteen years is considered as the age of attaining majority what association (गुण-सम्बन्ध), if any, is there between majority and playing habit.

Age in years	No. of students	Regular players
15	250	200
16	200	150
17	150	90
18	120	48
19	100	30
20	80	12

(*M. Com., Agra*, 1953).

15. What is 'Partial Association' (आंशिक गुण-सम्बन्ध) ? In a town of one lakh adult population, 52,000 were males and 48,000 females distributed according to education and employment as follows:—

	Males (000)	Females (000)
Educated and Employed	38	6
Educated and Unemployed	2	14
Uneducated and Employed	4	18
Uneducated and Unemployed	8	10

Is there any connection (गुण-सम्बन्ध) between education and employment in the two groups as well as in the total population. Interpret (निर्वचन कीजिए) the results in the light of social customs. (*M. Com., Agra*, 1953).

16. (a) What is 'Illusory association' (भ्रमात्मक गुण-सम्बन्ध) ? How can it be avoided ?

(b) Calculate the Coefficient of Association (गुण-सम्बन्ध-गुणक) between intelligence in father and son from the following data :—

Intelligent fathers with intelligent sons	248
Intelligent fathers with dull sons	81
Dull fathers with intellgent sons	92
Dull fathers with dull sons	579

(*M.A., Agra*, 1948).

17. The following table is published in a memoir written by Karl-Pearson.

Eye colour in sons

Eye colour in fathers		Not light	Light
	Not Light	230	148
	Light	151	417

Test whether the colour of sons eyes is associated (गुण-सम्बन्धित) with that of the father's. (*I.A.S.*, 1941).

18. Describe the utility (उपयोगिता) of interpolation (आन्तरगणन) and extrapolation (वाह्यगणन) to a business-man. What are the different methods of interpolation ? Interpolate the figure for 1921 by the algebraic method of finite differences (बीजगणितीय परिमितान्तर रीति).

Year	Population of India
1901	294,261,056
1911	315,156,396
1921	?
1931	351,523,045

Test the validity (सच्चाई) of your method if you know the actual figure for 1911. (*M. Com., Agra*, 1943).

19. Give a few examples of the use of interpolation (आन्तरगणन) in business statistics. The following are the annual premia in a certain Life Insurance Co., for a policy of Rs. 500 payable at death with an agreed bonus.

Age next birthday	Annual Premium Rs.	as.
25	24	10
30	27	11
35	31	9
40	36	6
45	42	5

Calculate the premium at the age 36 next birthday.

(*M. Com., Luck.*, 1942).

20. What assumptions are (परिकल्पनाएँ) made in interpolation in statistical science ? Below are given weighted Index Numbers of cost of living (भारित जीवन-निर्वाह-निर्देशांक) of labourers in an industrial centre in India. Interpolate to find out the missing index number for 1933 to the nearest integer (समीपतम इकाई तक), using all the figures.

Year	Index	Year	Index
1930	173	1934	131
1931	149	1935	141
1932	145		

(*M.A., Agra,* 1938).

21. From the following data (सामग्री), estimate the number of persons earning wages between 60 and 70 Rupees.

Wages in Rs.	No. of Persons in thousands
Below— 40	250
40— 60	120
60— 80	100
80—100	70
100—120	50

22. An analysis (विश्लेषण) of the monthly wages paid to workers in two firms A and B, belonging to the same industry, gives the following results.

Wages	Firm A	Firm B
No. of Earners	586	648
Average (मध्यक) monthly wages	52.5	47.5
Variance (विचरण मापांक) of the distribution of ages	100	121

(a) Which firm A or B, pays out the larger amount as monthly wages.

(b) In which firm A or B, is there greater variability (विचरण) in individual wages.

(c) What are the measures of (i) average monthly wage, and (ii) the variability (विचरण) in individual wages of all the workers in the two firms, A and B taken together.

(*I.A.S.*, 1951).

23. Prepare index number of prices (मूल्य निर्देशांक) for three years with average prices as base.

Rate per Rupee

	Wheat	Cotton	Oil
Ist year	10 srs.	4 srs.	3 srs.
2nd year	9 ,,	3½ ,,	3 ,,
3rd year	9 ,,	3 ,,	2½ ,,

Explain the use of Index Numbers.

(*B. Com., Agra,* 1941).

24. From the following group average prices prepare Index Numbers (निर्देशांक) with a view to determine the amount of wages :—

Group	1913	1914	1915	1916
	Rs. as. p.	Rs. as. p.	Rs. as. p.	Rs. as. p.
Food per md.	4 9 0	4 8 0	5 0 0	6 0 0
Rent per Room	2 0 0	2 0 0	3 0 0	4 0 0
Cloth per yard	0 6 0	0 8 0	0 12 0	0 14 0
Misc. per unit	2 0 0	2 8 0	34 0 0	8 9 0

Take the prices of 1913 as the base (आधार) and give the four groups weightage (भार) in the proportion of 8, 5, 3, and 2.

(*B. Com., Agra,* 1947).

25. What points should be taken into consideration in choosing the base and determining the weights in the preparation of the Cost of Living Index Numbers (जीवन-निर्वाह-निर्देशांक) ?

From the fixed Base index numbers (स्थिर-आधार निर्देशांक) given below, prepare Chain Base index numbers:—

1935	1936	1937	1938	1939	1940
94	98	102	95	93	100

(*B. Com., Agra,* 1943).

26. The following table gives the annual income of the teacher and the general index number of prices (मूल्य निर्देशांक) during the last 9 years :—

Year	Income in Rupees	General Index Number of prices
1939	360	100
1940	420	104
1941	500	115
1942	550	160
1943	600	280
1944	640	290
1945	680	300
1946	720	320
1947	750	330

(*B. Com., Agra,* 1949).

27. The following table gives the number of families and income per head of different classes of people in a certain village in U.P.:—

Class of people	No. of Families	Income per head in 1947 in Rs.
Landlord	1	1,000
Cultivators	50	80
Landless labourers	25	40
Money-lenders	2	750
School-teachers	3	100
Shop-keepers	4	150
Carpenters	3	120
Weavers	5	60

Represent the figures given above by a suitable diagram (चित्र) and discuss the economic condition of the people of the village on the basis of these figures.

(*B. Com.*, *Agra*, 1949).

28. (a) Given n independent events (स्वतन्त्र घटनाएँ) with respective pobabilities (संभाविता) of occurrence,

$$P_1, \quad P_2 \quad \ldots\ldots, \quad pn\ldots\ldots,$$

write down the probabilities of atleast one of these events happening.

(b) What is the probability (संभाविता) of getting 9 cards of the same suit on one hand at a game of bridge ?

(*I.A.S.*, 1951).

29. Three dice (पाँसा) are shaken and thrown. What are the respective chances that the points will total 3,4,5,...18. Assuming the dice are unbiassed (अनभिनत).

(*Inc.*, *Acc.* 1944).

30. There are m points on a line consisting of the the colours black and white. It p and q are the probabilities संभाविताएँ) of a point being black and white respectively so that $p+q=1$, find (आशंसा) the expectations of obtaining,

(1) a black-black join

(2) a black-white join.

and (3) a white-white join, a join being defined as the line joining two adjacent points. *(I.A.S.,* 1949).

[These revisionary exercises contain questions of almost all the possible types and the examinee can do well by mastering them. Answers to these questions have already been given in the related Chapters.]

APPENDIX I

पारिभाषिक शब्द

A

English Terms	प्रयुक्त शब्द
Abscissa	भुजाक्ष
Absolute	निरपेक्ष
A. Dispersion	निरपेक्ष अपकिरण
A. Error	निरपेक्ष विभ्रम
A. Measure of Skewness	निरपेक्ष विषमता माप
Accuracy	परिशुद्धता
Accurate	परिशुद्ध
Actual	वास्तविक
Adjacent	संलग्न
Adjoining	आसन्न
Aggregate	समूह, योग
Aggregative Method	समूही रीति
Algebra	बीजगणित
Algebraic, Algebraical	बीजगणितीय
Ambiguous	संदिग्ध
Analogous	सदृश
Analysis	विश्लेषण
Angle	कोण
Anti-logarithm	प्रतिच्छेदा
Applied	व्यावहारिक
A. Statistics	व्यावहारिक सांख्यिकी
Approximate	लगभग
Approximation	अनुमान
Arithmetic	अंकगणित

A. Average	समान्तर या गणितीय माध्य
A. Mean	समान्तर मध्यक
Arithmetical Progression	समान्तर वृद्धि
Arranged	विन्यस्त
Arrangement	विन्यास
Array	अनुविन्यास
Ascending Order	आरोही क्रम
Association	सम्बन्ध
A. of Attributes	गुण-सम्बन्ध
Coefficient of Association	गुण-सम्बन्ध गुणक
Negative A.	विलोम गुण-सम्बन्ध
Positive A.	अनुलोम गुण-सम्बन्ध
Partial A.	आँशिक गुण-सम्बन्ध
Illusory A.	भ्रमात्मक गुण-सम्बन्ध
Assumed	कल्पित
A. Average	कल्पित माध्य
A. Mean	कल्पित मध्यक
Asymmetrical	विषम, असंमितीय
A. Distribution	विषम वंटन
Average	माध्य
A. Deviation	माध्य विचलन
A. Error	माध्य विभ्रम
Descriptive Average	वर्णनात्मक माध्य
Geometric A.	गुणोत्तर माध्य
Harmonic	हरात्मक माध्य
Moving A.	चल माध्य
Progressive A.	प्रगामी माध्य
Typical A.	प्रतिनिधि माध्य
Weighted A.	भारित माध्य
Axis	अक्ष
A. of Ordinate	कोटि-अक्ष

B

Bar	दण्ड
B. Diagram	दण्ड चित्र
Horizontal Bar	क्षैतिज दण्ड
Vertical Bar	उदग्र दण्ड
Barometer	वायोडमान
Base	आधार
B. line	आधार रेखा
False Base Line	कूट-आधार रेखा
Basic Period	आधार काल
Bias	अभिनति (पक्षपात)
Biassed	अभिनत
B. Error	अभिनत विभ्रम
B. Selection	अभिनत प्रवरण
Binomial	द्विपद
B. Distribution	द्विपद वंटन
B. Theorem	द्विपद प्रमेय
Birth Rate	जन्म-दर
Bisector	अर्धक
Blank Table	निरंक सारणी
Block Diagram	इष्टका-चित्र
Boom Period	अभिवृद्धि-काल
Budget	आय-व्ययक
Business	व्यापार
B. Cycles	व्यापार-चक्र
B. Forecasting	व्यापार-पूर्वानुमान

C

Calculate	गणन
Calculation	परिगणन, गणना
Causal Relationship	हेतुक सम्बन्ध
Census	संगणना, गणना

C. of Population	जनगणना
C. of Production	उत्पादन-गणना
Chain Base	श्रंखला-आधार
Chain Relative	श्रंखला-मूल्यानुपात
Chance Selection	दैव-प्रवरण
Characteristic	लक्षण, पूर्णांश
Circular Diagram	वर्तुल चित्र
Class	संभाग
C. Frequency	संभाग-आवृत्ति
C. Interval	संभागान्तर
C. Limits	संभाग सीमाएँ
Classification	वर्गीकरण
C. according to Attributes	गुणानुसार वर्गीकरण
C. according to Class intervals	संभागान्तर वर्गीकरण
C. according to Dichotomy	द्वन्द-भाजन वर्गीकरण
Coefficient	गुणक
C. of Association	गुण-सम्बन्ध गुणक
C. of Concurrent Deviation	संगामी-विचलन गुणक
C. of Correlation	सह-सम्बन्ध गुणक
C. of Regression	प्रतीपगमन गुणक
C. of Skewness	विषमता गुणक
C. of Variation	विचरण गुणक
Collection	संग्रहण
C. of Data	सामग्री-संग्रहण
Composite	संग्रथित
Compute	संगणन
Constant	अचल
C. Term	अचल पद
Continuous Series	अविच्छिन्न माला
Co-ordination	समन्वय

Corollary	उपसाध्य, उपप्रमेय
Correlation	सह-सम्बन्ध
Cost of living	जीवन निर्वाह व्यय
Co-variation	सह-विचरण
Cross-multiplication	बज्र-गुणन
Cube Root	घनमूल
Cumulative	संचयी
Curve	वक्र
C. Fitting	वक्र-अन्वायोजन
C. of Normal Error	सामान्य-विभ्रम-वक्र
Cyclic Fluctuation	चक्रीय उच्चावचन

D

Data	सामग्री, समंक
Compilation of Data	सामग्री संकलन
Interpretation of Data	सामग्री निर्वचन
Primary Data	प्राथमिक सामग्री
Published Data	प्रकाशित सामग्री
Representative Data	प्रतिनिधि सामग्री
Secondary Data	द्वितीयक सामग्री
Death Rate	मृत्यु-दर
General D. R.	सामान्य-मृत्यु-दर
Standardised D. R.	आदर्शित-मृत्यु-दर
Decile	दशाँश
Degree of Accuracy	यथार्थता का माप
Deliberate Selection	सविचार प्रवरण
Denominator	हर
Depression	अवसाद
Derivative	व्युत्पन्न
Descending Order	अवरोही क्रम
Deviation	विचलन
Average Deviation	माध्य विचलन

Mean Deviation	मध्यक विचलन
Standard Deviation	प्रमाप विचलन
Quartile Deviation	चतुर्थांश विचलन
Diagram	चित्र
Bar Diagram	दण्ड चित्र
Circular Diagram	वर्तुल-चित्र
Scatter Diagram	प्रविक्षेप-रेखिचित्र
Subdivided Diagram	अन्तर्विभक्त चित्र
Dichotomy	द्विभाजन, द्वन्दभाजन
Difference	अन्तर
Dimension	बिमा
Discontinuous Series	विच्छिन्नमाला
Discrete Series	विच्छिन्नमाला
Dispersion	अपकिरण
Moment of D.	अपकिरण-घात
Distribution	वंटन
Divide	विभाजन
Dividend	भाज्य
Dot	बिन्दु
Downward	अधोमुख

E

Eliminate	निरसन
Enquiry	अनुसंधान
Enumerate	प्रगणन
Enumerator	प्रगणक
Equation	समीकार
Error	विभ्रम
Absolute Error	निरपेक्ष विभ्रम
Biassed Error	अभिनत विभ्रम
Relative Error	सापेक्षिक विभ्रम
Compensating Error	पूरक विभ्रम

Cumulative Error	संचयी विभ्रम
Probable Error	संभाव्य विभ्रम
Standard Error	प्रमाप विभ्रम
Unbiassed Error	अनभिनत विभ्रम
Estimate	अनुमान
Exclusive	अपवर्जी
E. Series	अपवर्जी समंकमाला
Expectation	आशंसा
Extrapolation	वाह्यगणन
Extreme	अन्तस्तपद

F

Factor Reversal Test	तत्व—उत्क्रमण-परीक्षा
Facts	तथ्य
Fallacy	भ्रान्ति
Family Budget	परिवार-आय-व्ययक
Finite Differences	परिमित अन्तर
Fitting a Curve	वक्र-अन्वायोजन
Fixed Base	स्थिर आधार
Fluctuations	उच्चावचन
Abnormal F.	असामान्य उच्चावचन
Accidental F.	आकस्मिक उच्चावचन
Seasonal F.	आर्तव उच्चावचन
Forecasting	पूर्वानुमान
Formula	सूत्र
Fraction	भिन्न
Frequency	आवृत्ति, बारम्बारता

G

General	सामान्य
Geometric Mean	गुणोत्तर माध्य
Graph	बिन्दु रेख

Grouped Series	वर्गित माला
Grouping	वर्गण

H

Harmonic Mean	हरात्मक मध्यक
Hetrogeneous	असामान्य, विषम
Histogram	बारम्बारता दण्ड चित्र
Historical Series	कालिक माला
Historigram	कालिक चित्र
Horizontal Scale	क्षैतिज मापश्रेणी

I

Identical	समान
Inclusive Method	समावेशिक रीति
Independent	स्वतंत्र
Interdependent	आश्रयभूत
Index Number	निर्देशांक
Inertia of Large Numbers	महांक जड़ता
Infinite	अनन्त
Integral Number	पूर्णांक
Interpolation	आन्तरगणन
Interpretation	निर्वचन
Interval	अन्तर
Investigation	अनुसंधान
Item	पद

L

Lag	विलम्बना
Law	नियम
Law of Statistical Regularity	सांख्यिकीय नियमिता नियम
Least Square	अल्पतम वर्ग
Line of best fit	उत्तम अन्वायोजन रेखा, अनुकलतम रेखा
Link Relatives	संबद्ध मूल्यानुपात या चल मूल्यानुपात
Logarithm	छेदांक

M

Magnitude	विस्तार
Manifold Classification	बहुगुणी वर्गीकरण
Manifold Tabulation	बहुगुणी सारणी
Mean	मध्यक
Measure	माप
Median	मध्यका
Mode	भूयिष्ठक
Moving Average	चल माध्य

N

Natural Scale	प्राकृत माप श्रेणी
Negative	विलोम
Normal	सामान्य
Normal Curve of Error	विभ्रम का सामान्य वक्र

O

Observation	अवलोकन
Official Statistics	राजकीय समंक
Oscillation	प्रदोल, उच्चावचन

P

Parabolic Curve	एकेन्द्र वक्र
Partial Association	आँशिक गुण-सम्बन्ध
Percentile	शताँश
Periodical, Periodic	आवर्तिक
Periodicity	आवर्तिता
Perpendicular	लम्ब
Pictogram	चित्र लेख
Plotting of Data	सामग्री का प्राँकण
Positive	अनुलोम
Primary Data	प्राथमिक सामग्री
Probability	सम्भावना, सम्भाविता

Probable Error — सम्भाव्य विभ्रम
Projection — विक्षेपण

Q

Quadratic Average — वर्गकरणी माध्य
Quantity — परिमाण
Quartile — चतुर्थांश
Questionnaire — प्रश्नावली
Quotient — लब्धि

R

Radius — त्रिज्या
Random Sampling — दैव-निदर्शन
Random Selection — दैव-प्रवरण
Range — विस्तार
Ratio — अनुपात, निष्पत्ति
Reciprocal — व्युत्क्रम
Regression — प्रतीपगमन
  R. Equation — प्रतीपगमन समीकार
  R. Coefficient — प्रतीपगमन गुणक
Relative — सापेक्षिक
Reversal — उत्क्रमण
Reversibility — उत्क्राम्यता

S

Sample — न्यादर्श
Sampling — निदर्शन
  Conscious S. — सविचार प्रवरण
  Random S. — दैव-प्रवरण
Scale — मापश्रेणी
  Logarithmic S. — छेदा-मापश्रेणी
  Ratio S. — अनुपात मापश्रेणी
Scatter Diagram — प्रविक्षेप रेखिचित्र

Schedule — अनुसूची
Seasonal — आर्तव
  S. Fluctuations — आर्तव उच्चावचन
  S. Variations — आर्तव विचरण
Secondary Data — द्वितीयक सामग्री
Secular Trend — सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति
Series — माला
Simultaneous Equation — युगपत समीकार
Skewness — विषमता
Smoothening — सरलन
Smoothed — सरलित
Standard Deviation — प्रमाप विचलन
Statistics — साँख्यिकी, समंक
Statistician — साँख्यिक
Statistical — साँख्यिकीय
Symmetrical — संमित
  S. Distribution — संमित वंटन
  S. Series — संमित माला

T

Table — सारणी
Tabulation — सारणीकरण, सारणीयन
Theorem — प्रमेय
Trend — प्रवृत्ति, उपनति

U

Unbiassed Error — अनभिनत विभ्रम
Unit — एकक
Universe — समग्र

V

Variables — चल
Variation — विचरण
Vertical Scale — उदग्र मापश्रेणी

W

Wage	भृत्ति
Weight	भार

X, Y, Z.

X Series	य, अक्ष
Y Series	र, अक्ष

APPENDIX II

List of Govt. Publications Periodicals & Reports

(Central Government)

I. Food & Agriculture

1. *Agricultural Situation in India*—(Monthly)—Issued by the Directorate of Economics and Statistics, Ministry of Food and Agriculture, Govt. of India, contains notes and articles on related topics and statistical statements classified into :— (a) Rainfall and crop estimates, (b) Commodity trade movement, (c) Prices and Index Numbers, (d) Agricultural wages, (e) Crop estimates of foreign countries.

2. *Bulletin of Agricultural Prices*—(Weekly)—Issued by the Directorate of Economics and Statistics, Ministry of Food and Agriculture, Govt. of India, contains sections relating to Indian and foreign markets.

3. *Indian Tea Statistics, Indian Coffee Statistics, Indian Rubber Statistics, Indian Sugar Statistics, Indian Cotton Statistics, Indian Oilseed Statistics*—These publications are issued by the Economic and Statistical Adviser, Ministry of Food and Agriculture, Govt. of India periodically. The latest information available relates to the period 1943-44 to 1947-48. These publications are delayed ones and those containing the aforesaid information were published in 1950. These publications give (a) Area under production, (b) Average number of persons employed, (c) Exports, imports and re-exports by sea and land. Most of the tables are graphically illustrated.

4. *Agricultural Statistics of India Vol. I & II*—Issued by the Directorate of Economics & Statistics, Ministry of Food and Agriculture, Govt. of India. The issue containing information for 1939-40 to 1942-43 published in 1950, contains tables Districtwise and Statewise. It gives information relating to (a) Area, (b) Classification of area, (c) Area under irrigation (d) Area under crops, (e) Live stock, plough and carts (f) Land Revenue assessment and (g) Harvest prices.

5. *Indian Agricultural Price Statistics*—Issued by the Economic & Statistical Adviser, Ministry of Agriculture, Govt. of India in 1950 contains information relating to the period 1939 to 1950. Divided into 4 parts it contains information relating to Index Numbers, harvest prices, wholesale and retail prices, prices of principal foodgrains, pulses and raw material etc.

II. Industry

1. *Census of Manufactures*—These reports are published by the Directorate of Industrial Statistics, Govt. of India and cover all Part A, B and C States. Information in tabular form is available on the following—(1) No. of factories and average number of working days, (2) Productive Capital employed, (3) No. of persons employed, (4) No. of man hours worked during the year, (5) Salaries and wages paid, (6) Quantity and value of fuels, electricity, lubricants etc. consumed (7) Quantity and value of materials consumed, (8) Quantity and value of products and by-products for sale, (9) Ex-factory value of raw materials fuels etc. consumed and work done for the industry by other concern, (10) Ex-factory value of products and by, products and work done by the industry for customers, (11) Value added by Manufacture. The last available Census relates to 1950, known as the Fifth Census of Manufactures, 1950. This publication is also a delayed one and the Fifth Census was published in 1954.

2. *Large Industrial Establishments in India*—1946, issued by the Labour Bureau Govt. of India, in 1950 is the 18th issue of the series. This is a biennial publication and contains information relating to all factories employing more than 20 workers in respect of the number of factories, their owners, number of workers employed etc.

3. *Monthly Statistics of the Production of Selected Industries of India*—Issued by the Directorate of Industrial Statistics, of Commerce and Industry; every month, contains information Ministry relating to monthly productions, annual production and installed capacity of about 90 industries. It gives Indices of Industrial production.

4. *Monthly Statistics of Cotton Spinning and Weaving in Indian Mills*—issued by Directorate of Industrial Statistics, Ministry of Commerce & Industry, contains information relating to (a) Quantity of yarn spun in the mills according to counts, (b) Quantity of manufactured goods classified according to quality.

III. Trade

1. *Accounts relating to the Foreign Sea and Airborne Trade and Navigation of India* (Monthly)—Issued by the Department of Commercial Intelligence and Statistics, Calcutta, Govt. of India, contains Statistics of (1) Quantity and value of imports, exports and re-exports of important articles, (2) Declared value per unit of chief imported and exported articles, (3) Gross amount of import and export duty collected and (4) Movement of cargo shipping.

2. *Annual Statement of Seaborne Trade of India with the British Empire and Foreign Countries, Vols. I & II*—Issued by the Directorate of Commercial Intelligence and Statistics, Govt. of India, gives consolidated accounts taken from the monthly publications. Vol. I gives abstract tables of imports and exports commoditywise and Vol. II contains tables showing imports and exports countrywise.

3. *Indian Trade Journal* (Weekly)—Issued by the Department of Commercial Intelligence and Statistics, Ministry of Commerce, Govt. of India, gives information relating to (a) Weekly exports and imports of selected commodities, (b) Weekly arrivals and despatches of certain staple commodities at selected centres, (c) a Monthly summary of the foreign seaborne trade of India. It also gives All-India Crop Estimates and Price Index Numbers.

4. *Indian Trade Bulletin* (Monthly)—Issued by Ministry of Commerce and Industry, Govt. of India, contains articles on foreign trade and related topics besides giving important Statistics.

5. *Annual Review of the Trade of India*—Issued by Ministry of Commerce and Industry, Govt. of India. This is

a delayed publication and the issue relating to 1945-46 and 1946-47 was published in 1950.

IV. Labour

1. *Indian Labour Year Book*—Issued by Labour Bureau, Ministry of Labour, Govt. of India, contains information relating to general labour situation, employment, industrial relations, wages and earnings, working-class cost of living, health and safety, housing and welfare, condition of agricultural labour, Industrial Disputes, etc.

2. *Indian Labour Gazette* (Monthly)—Issued by the Labour Bureau, Ministry of Labour, Govt. of India contains information relating to (a) Employment, (b) Wages and earnings, (c) Industrial Disputes, (d) Cost of living, (e) Retail and Wholesale prices, (f) Absenteeism, (g) Employment Service, (h) Labour in coal mines, labour legislation and sample surveys.

V. Miscellaneous

1. *All India Income Tax Revenue Statistics* (Annual)—Issued by the Central Board of Revenue, Govt. of India, contains figures of the number of assessees, income assessed, income tax and super tax, figures, of refunds and rebates etc. This is a delayed publication and the issue relating to 1948-49 was published in 1950.

2. *Monthly Survey of Business Conditions*—Issued by the Office of the Economic Adviser to the Govt. of India, contains description of economic situation and Statistics relating to crop estimates, industrial production, trade, price indices, railway traffic industrial disputes, etc. This publication has been stopped since 1951.

3. *Monthly Abstract of Statistics and Weekly Bulletin of Statistics*—Issued by the Central Statistical Office, Cabinet Secretariat, Govt. of India provide statistics in all sections of national economy in a co-ordinated form.

4. *The Journal of Industry and Trade*—Monthly issued by the Ministry of Commerce and Industry, Govt. of India. This

is the result of a combination of Indian Trade Bulletin, I & S Bulletin, Monthly Survey of Busines Conditions in India and Indian and Foreign Market Reviews and contains almost all information which used to be published in these issues. The publication of the Journal of Industry and Trade started from 1951.

5. *Statistical Abstract of India*—Now issued by the Central Statistical Organisation, Cabinet Secretariat, Govt of India, the first issue being that of 1950. There are various sections giving statistics relating to climate and rainfall, area and population, movement of population, public health and vital statistics, national finance, income tax, exchange coinage and currency, agriculture, industrial production, labour, national income, trade, etc.

6. *Statistics of Foreign Trade of India by Countries and Currency Areas for March* 1954—Issued by the Director General of Commercial Intelligence and Statistics Calcutta.

7. *Annual Statement of the Foreign Sea and Air Borne Trade of India for the five Fiscal Year's ending* 31st *March* 1952, *Vol. I*—Issued by Director General of Commercial Intellgience and Statistics, contains information relating to imports and exports, and re-exports and merchandise and treasure.

8. *Agricultural Labour—how they Work and Live*—Essential Statistics by Dr. B. Ramamurti is the main result of the Agricultural Labour Enquiry conducted under the auspices of the Government.

9. *Indian Agricultural Atlas* 1952—Issued by the Economics and Statistical Adviser, Ministry of Food and Agriculture gives a pictorial representation of all important agro-economic data relating to India in the form of maps and diagrams. It is completely revised and enlarged version of the Crop Atlas of India, which used to be published in the past by the Department of Commercial Intelligence and Statistics.

10. *Cost of Living Index Nos. in India*—Is a Monograph issued by the Labour Bureau, Ministry of Labour, Govt. of India and contains latest information on C.O.L. Indices.

II

GOVERNMENT OF U. P.

I. Agriculture

1. *Annual Administration Report of the Department of Agriculture, U.P.*—Is a priced publication giving information relating to rainfalland general agricultural conditions, area & yield of important crops with comments and a comparison with the preceding year, schemes of research and development as well as other departmental schemes, agricultural education and the departmental budget. At the end are some appendices giving information on (1) distribution of Rabi and Kharif seeds through the Department and through private agencies separately for each district in the state, (2) financial results of each Govt. agricultural farm and seed and demonstration plot, (3) distribution of different kinds of agricultural implements in each district and (4) distribution of different types of manures in each district.

2. *Quinquennial Statement of normal yield of principal crops in U.P.*—Issued by the Director of Agriculture every 5 years contains information relating to approximate normal yield per acre of the principal crops in 17 selected districts of the state for each quinquenium, the earliest being 1892. Among the crops are included all cereals, peas, arhar, sugarcane cotton and different oilseeds. A combined figure for irrigated and non-irrigated areas is also given for the entire State.

II. Industry

1. *Administration Report of the Department of Industries and Commerce, U.P.*—Issued by the Director of Industries and Commerce (Now designated as Director of Cottage Industries) annually, gives brief information on the general conditions of Industries and Trade on departmental activities. The report is followed by some tables giving statistics relating to enrolment and examination results of every educational institution under the Department, the amount spent on stipends and scholarship, the net expenditure per capita is also given for every such institution.

III. Labour

1. *Labour Bulletin*—Issued by the Labour Commissioner, U.P., Kanpur every month, contains special articles together with other information and statistics pertaining to different aspects of labour such as, important judgements in labour cases, activities of the department, general labour situation, Cost of Living Index Numbers at Kanpur and other places of the State, Reports on the Administration of Factories Act, Payment of Wages Act, Workmen Compensation Act, etc. Statistics of Welfare Activities, Absenteeism and Employment are also given.

2. *Annual Report on the Working of the Factories Act in U.P.*—Issued by the Chief Inspector of Factories, U.P. gives information on the number of factories, employment in factories their sanitation, ventilation, lighting, water supply, fencing, accidents, inspections and prosecutions, house of factory workers, their health and hours of work, welfare activities and strikes.

3. *Annual Report of the Working of the Payment of Wages Act in U.P.*—Issued by Chief Inspector of Factories U.P., reviews the working of the Act followed by some statistical returns relating to amount of wages paid and deductions made on different accounts in different types of industries separately as well as the number of cases instituted on account of deductions from and payment of wages, the amount claimed and the results of the cases.

4. *Annual Report on the Working of Workmen's Compensation Act in U.P.*—Issued by the Labour Commissioner, U.P., includes information relating to the number and nature of industrial accidents , their causes and the efforts made to minimise such accidents. Statistics are also given regarding the number of workmen meeting with fatal and other accidents in various industries and the amount of compensation paid in each case.

5. *Annual Report on the Working of the Indian Trade Unions Act*, 1926 *in U.P.*—Issued by the Labour Commissioner,

U.P., for every year reviews the working of the Act in U.P. followed by Tables giving information on the number of Trade Unions according to Industries as well as districts, their affiliation to various federations and their non-official position.

IV. Miscellaneous

1. *Monthly Bulletin of Statistics*—Issued by the Department of Economics and Statistics, U.P., is a priced publication started since November, 1947, which gives information relating to the different departments of Government. The regular features of the Bulletin include data relating to agricultural conditions, financial conditions, population, trade, cost of living, wholesale and retail prices of Agricultural and Industrial commodities, births and deaths from various causes in different districts of U.P., crime, consumption of spirits and intoxicants and employment.

2. *Statistical Abstract of the Uttar Pradesh* (1949) —Issued by the Department of Economics and Statistics U.P. contains statistics as far as available from 1939 to 1949 and in about 30 chapters covers all departments of Government including Agriculture, Banks, and Joint Stock Companies, Corporation, Crime, Public Health and Vital Statistics, Transport and Trade.

3. *Annual Administration Report of the Animal Husbandry Department, U.P.*—Issued by the Director of Animal Husbandry, U.P., gives information about the different departmental activities including disease control, research, marketing breeding and development, fisheries and training.

4. *Season and Crop Reports of the U.P.*—Issued by the Secretary Board of Revenue (Land Records) U.P. gives a brief account of the character of the season during the year, area under cultivation, crop area, out-turn and total produce, and prices and stock. The Report is followed by a number of Statements. The data given include information relating to rainfall during different seasons in each district, details of area not available for cultivation in each district, area irrigated

from different sources in each district, outturn of principal crops for the State, and prices at harvest time of principal crops in each district.

5. *Annual Report on the Working of the Cane Development Department in U.P.* —Issued by the Cane Commissioner U.P.

6. *Annual Report on the Working of Co-operative Societies in U.P.*—Issued by the Registrar, Co-operative Socieities U.P.

7. *General Report on Public Instruction in U.P.*—Issued by the Director of Education, U.P.

8. *Report on the Excise Administration of the U.P.*—Issued by the Excise Commissioner, U.P.

9. *Annual Progress Report of Forest Administration in the U.P.*—Issued by the Chief Conservater of Forest for U.P.

10. *Report on the Administration of the Police of the U.P.*—Issued by the Inspector General of Police for U.P.

11. *Report on the Prison Administration of the U.P.*—Issued by the Inspector General of Prisons for U.P.

12. *Report on the Administration of Justice in the U.P.*—Issued by the Registrar of High Court of Judicature at Allahabad.

13. *Report on the Working of the District Boards in the U.P.*—Issued by the Secretary to Govt. U.P.

14. *Report on Municipal Administration and Finances in the U.P.*—Issued by the Secretary to Government U.P. Municipal Department.

15. *Annual Report of Civil Hospitals and Dispensaries of the U.P.*—Issued by the Inspector General of Civil Hospitals (now Designated as Director of Medical and Health Services, U.P.)

16. *Annual Report of the Director of Public Health of U.P.*—Issued by Director of Medical and Health Services, U.P.

17. *Annual Report on the Mental Hospitals in the U.P.*—Issued by Director of Medical and Health Services, U.P.

18. *Annual Report of the Chief Engineer Public Health Engineering Department U.P.*—Issued by the Chief Engineer, Public Health Engineering Department U.P.

19. *Administration Report of the Uttar Pradesh Public Works Department* (Building and Roads Branch). Issued by the Secretary to Government, U.P. P.W.D., Lucknow.

20. *Irrigation Administration Report of the U.P.*—Issued Government Secretary to Government, U.P., P.W.D., U.P.

21. *Report on the Administration of the Registration Department U.P.*—Issued by the Inspector General of Registration U.P.

22. *Report on the Revenue Administration of the U.P.*—Issued by the Secretary to Government, Revenue Department, U.P. Lucknow.

23. *Report of the Court of Wards of the U.P.*—Issued by the Secretary, Court of Wards, U.P. Lucknow.

APPENDIX III

AGRA UNIVERSITY

M. A. EXAMINATION, 1954

ECONOMICS

SECOND (*f*) PAPER—Theory and Practice of Statistics

1. Trace briefly the development of the science of Statistics from its primitive form to its present complex status and estimate its increasing importance to Economics.

2. Bring out clearly the difference between a census and a sample enquiry and discuss briefly their comparative advantages. State the difficulties which led the Government of India recently to undertake a village sample survey.

3. 'It is never safe to take published statistics their face value without knowing their meaning and limitation.' (*A.L Bowley*). Explain this statement and point out the general rules that you would lay down for making use of published data.

4. If you had to work as secretary to the Taxation Inquiry Commission recently appointed by the Government of India and conduct a statistical enquiry, what existing sources of statistical data you tap for the following?—

(*a*) Savings and capital formation, (*b*) Industrial production and profits, (*c*) Wages and employment, and (*d*) Aggregate tax collection and its all occation.

5. Write short notes on any four of the following :—

(*a*) Law of Statistical Regularity, (*b*) Interpolation (*c*) The Moving Average, (*d*) Biassed Errors, (*e*) Quartiles.

6. Find out the most likely price in Bombay corresponding to the price of Rs. 70 at Calcutta from the following data :—

	Calcutta	Bombay
Average price	65	67
Standard deviation	2·5	3·5

Coefficient of correlation between the two prices in the two towns is +.8.

7. Calculate (*a*) Median Coefficient of Dispersion and, (*b*) Mean Coefficient of Dispersion from the following data:—

Size of items :	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,
Frequency :	2,	4,	5,	3,	2,	1,	4,

8. The following table gives the percentage distribution of expenditure among industrial workers in Bombay :—

Percentage expenditure on	1932-33	1944-45
Food	46.60	51.96
Fuel and lighting	7.11	10.16
Clothing, footwear, etc.	7.75	11.72
Bedding and Household requisites	0.13	0.50
House Rent	12.81	7.20
Miscellaneous	25.60	18.46
Total	100.00	100.00

What conclusions would you draw from the above data regarding the change in the worker's standard of life during the period ?

9. Find the Coefficient of Skewness of the two groups given below and point out which distribution is more skew:—

Marks	Group (A)	Group (B)
55—58	12	20
58—61	17	22
61—64	23	25
64—67	18	13
67—70	11	7

10. The following figures relate to the value of sugar manufactured in various States of the Union :—

States	Value in Rupees
Uttar Pradesh	47,55,73,000
Bihar	18,18,18,000
Madras	7,57,76,000
Bombay	4,01,01,000
Other States	1,97,17,000
All India	79,29,85,000

(*Census of Manufactures*, 1950).

Represent the above data by means of both (*a*) circles, (*b*) squares to bring out their relative importance in the production of sugar.

11. Plot the following figures relating to wholesale prices and the supply of currency and deposit money in India on a full page graph and comment on their relationship :—

Year 1952	Jan.	Feb.	March	April	May	June	July	August	Sept.
Wholesale price index	430	416	378	378	367	375	384	387	389
Money Supply (in crores of Rs.)	1885	1898	1887	1890	1873	1850	1832	1816	1797

M.A. EXAMINATION, 1955

ECONOMICS

Second (f) Paper—Theory and Practice of Statistics

Attempt any five *questions. All questions carry equal marks.*

1. 'Statistics are the straw out of which I like every other economist have to make the bricks.' Elucidate this statement.

2. How would you plan an enquiry about unemployment in Kanpur ? What published data would you utilize for this purpose ?

3. Comment on the methods adopted for estimating Indian National Income.

4. Explain the method of constructing *either* the Kanpur Cost of Living Index Numbers or Index Numbers of Wholesale Prices in India.

5. Examine the adequacy and accuracy of *either* labour *or* agricultural statistics in India.

6. Write short notes on *any three* of the following :—

(*a*) Stratified sampling.

(*b*) Economic barometers.

(*c*) Secular trend.

(*d*) The Lorenz curve

(*e*) Probable error.

7. The monthly incomes of ten families in a certain locality are given below :—

Family	Monthly income in rupees
A	85
B	70
C	15
D	75
E	500
F	20
G	45
H	250
I	40
J	36

Calculate the arithmetic average, the geometric mean and the harmonic mean of the above incomes. Which one of the above three averages represents the above figures the best? Give reasons.

8. A census revealed the following figures of the blind and the insane in two age-groups in a certain population :—

	Age-group 15—25 years	Age-group Over 75 years
Total population	270,000	160,200
Number of blind	1,000	2,000
Number of insane	6,000	1,000
Insane among the blind	19	9

(*a*) Obtain a measure of the association between blindness and insanity in each of the two age-groups.

(*b*) Do you consider that blindness and insanity are associated or diassociated with each other in the two age-groups or more in one age-group than in the other ?

9. The following table gives the Index Numbers of Whole-sale Prices in India and the Bombay Cost of Living Index Numbers :—

		Index numbers of wholesale prices	Bombay cost of living index number
April	1953	385	342
May	,,	398	346
June	,,	406	353
July	,,	408	355
August	,,	410	358
September	,,	404	353
October	,,	394	350
November	,,	391	344
December	,,	390	342
January	1954	399	346
February	,,	395	331
March	,,	394	332

Calculate the Coefficient of Correlation between changes in wholesale prices and cost of living in Bombay.

10. The following table gives the index numbers of wholesale prices in India :—

Year	Food articles	Industrial raw materials	Semi-manufactures	Manufactured articles	General index
1947-48	306	377	262	286	308
1948-49	383	445	327	346	376
1949-50	391	472	332	347	385
1950-51	416	523	349	354	409
1951-52	399	592	374	401	435
1952-53	358	437	344	371	381

What conclusions would you draw from these figures regarding changes in prices in India from 1947-48 to 1952-53 ?

11. Plot the figures given in Question 10 on a graph paper.

AGRA UNIVERSITY

M. COM. (PREVIOUS AND FINAL) EXAMINATIONS, 1954

Previous—SEVENTH PAPER

Final—ELEVENTH PAPER

STATISTICS

1. Discuss the importance of the study of statistics and explain how it can help businessmen in handling problems relating to market research, sales management, personnel relations, quality control and business fluctuations.

2. Write a critical note on the census of population conducted in India in 1951. What improvements would you suggest for the next census ?

3. How would you construct an index number of prices that would exhibit with great sensitiveness movement in the

general price level? Examine from this point of view the Economic Adviser's index number of wholesale prices in India.

4. Describe the existing statistical set-up in the Uttar Pradesh Government (or in your own State Government). What improvements would you suggest to make it more useful for economic planning and development ?

5. Write a note on the availability of industrial statistics in India through official and non-official sources.

6. Write short notes on *any three* of the following :—

(*a*) Trend; (*b*) Kurtosis; (*c*) Pie charts; (*d*) Stratified sampling; (*e*) Coefficient of concurrent deviation.

7. (*a*) In what circumstances would you consider the arithmetic mean, the geometric mean, the harmonic mean, respectively, the most suitable statistics to describe the central tendency of a distribution ?

(*b*) Determine the Mode and the Median from the following figures :—

25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, 20.

8. The following table gives class frequency distribution of 45 clerks in a business office according to age and pay. Find the correlation, if any, between age and pay.

Pay

60—70—80—90—100—110

Age	60—70	70—80	80—90	90—100	100—110
20—30	4	3	1	—	—
30—40	2	5	2	1	—
40—50	1	2	3	2	1
50—60	—	1	3	5	2
60—70	—	—	1	1	5

9. (*a*) Name the various methods of interpolation and indicate their importance.

(*b*) Estimate the expectation of life at age 22 from the following data :—

Age	10	15	20	25	30	35
Expectation of life in year	35.4	32.2	29.1	26.0	23.1	20.4

10. (*a*) What is Illusory Association ?

(*b*) From the figures given in the following table, compare the association between literacy and unemployment in rural and urban areas and give reasons for the difference, if any :—

	Urban	Rural
Total adult males	25 lacs	200 lacs
Literate males	10 ,,	40 ,,
Unemployed males	5 ,,	12 ,,
Literate and unemployed males	3 ,,	4 ,,

AGRA UNIVERSITY

M. COM. (PREVIOUS AND FINAL) EXAMINATION, 1955

Group B (Optional)

SEVENTH PAPER

STATISTICS

1. Comment on the following statements :—

   (*a*) Statistics are not worth the cost and labour involved in their collection and maintenance in ordinary business.

   (*b*) Statistics should be handled only by experts.

2. Describe the procedure you would adopt for assessing the changes in the economic condition of the people in a village during the last five years.

Give questions and tables you might use for the purpose.

3. Compare the different measurements of frequency distribution, pointing out the particular advantages and uses of each.

4. What do you understand by 'sample survey'? Are any such surveys carried on in India ? Give a detailed account of *any one* of them.

5. What is Regression ? Why should there be two regression equations ?

The following are the corresponding prices of shares *A* and *B* :—

A	...	110,	115,	112,	118,	120,	125,	130,	135,	140
B	...	325,	333,	327,	335,	336,	342,	347,	355,	360

Which shares are more sensitive to market conditions ?

What will be the price of *A* when that of *B* is 345 ?

6. (*a*) 750 candidates appeared and 470 passed at an examination. 465 had attended classes and 58 of them failed. Prove the utility of the classes.

(*b*) An astrologer assured 400 candidates of their success in the examination. 320 of them passed. Do you admit his claim to power of knowing future events?

7. What is the meaning of the term 'statistically significant ?

Two samples S_1 and S_2 of 100 items each, yield the following results :—

S_1 ... mean, 20, standard deviation, 3.
S_2 .. mean, 22, standard deviation, 4.

What conclusion do you draw ?

8. Explain the methods used in forecasting the growth of population.

The population of a certain town is given below in the years mentioned. Estimate it for the year 1957.

Year	Population
1921	22,000
1931	27,000
1941	34,000
1947	39,000
1951	42,000

9. Write notes on the use of *any two* of the following :—

(*a*) Normal curve of error.

(*b*) Analysis of time series.

(*c*) Logarithmic curves.

10. Name *any two* statistical publications of the Government of India, mention their contents and express your views on the same.

AGRA UNIVERSITY

B. COM. (PART II) EXAMINATION, 1954

COMMERCE

SECOND PAPER—Statistics

1. Discuss fully the importance of the study of statistics.

2. (*a*) State and explain the law of statistical regularity.

(*b*) Discuss the importance of the method of random sampling in an investigation extending over a wide area.

3. 'Each type of average has its own particular field of usefulness'. In the light of this statement discuss characteristic features of the chief averages used in statistics.

4. Give a brief description of the different kinds of diagram generally used to represent statistical data.

5. Discuss briefly problems involved in the construction of price index numbers.

6. The marks (out of a maximum of 100) obtained by candidates in an examination are shown in the following frequency table. Calculate the arithmetic average and the mode.

Marks	Number of candidates
17.5—22.5	2
22.5—27.5	8
27.5—32.5	33
32.5—37.5	80
37.5—42.5	170
42.5—47.5	243
47.5—52.5	213
52.5—57.5	145
57.5—62.5	67
62.5—67.5	35
67.5—72.5	4

7. Calculate the Median and the Quartiles from the frequency table given in Question 6 above.

8. Calculate the mean deviation and the standard deviation from the following data :—

Size of item	Frequency
3—4	3
4—5	7
5—6	22
6—7	60
7—8	85
8—9	32
9—10	8

9. Calculate Pearson's Coefficient of Correlation between 'wages' and 'cost of living' from the following data:—

Index Numbers

Wages	Cost of living
100	98
101	99
103	99
102	97
100	95
99	92
97	95
98	94
96	90
95	91

AGRA UNIVERSITY

B. COM. (PART II) EXAMINATION, 1955

(Group II)

COMMERCE

SECOND PAPER—Statistics

1. Classify the methods generally employed in the collection of statistical data and state briefly their respective merits and demerits.

2. Discuss the main features of population statistics in India.

3. 'Either for one's own use or for the use of others, the data must be presented in some suitable form'. Comment on this statement and discuss the function and importance of tabulation in a scheme of investigation. What points should be taken into consideration in tabulating statistical data' ?

4. Show clearly the necessity and importance of diagrams in statistics. What precautions should be taken in drawing a good diagram ?

5. What points would you take into consideration in choosing the base and determining the weights in the preparation of the 'Cost of Living Index Numbers' ?

6. What points should be borne in mind in the interpretation of statistical data ?

7. The following table gives the heights of students in an institution :—

Height (centimetres)	Number of students	Height (centimetres)	Number of students
155—157	4	169—171	184
157—159	9	171—173	127
159—161	28	173—175	92
161—163	56	175—177	50
163—165	94	177—179	12
165—167	151	179—181	3
167—169	193	181—183	2

Calculate the Median, the Quartiles and the third decile

8. Find out Karl Pearson's Coefficient of Skewness from the following data :—

Size	Frequency	Size	Frequency
2—4	5	12—14	12
4—6	12	14—16	10
6—8	15	16—18	8
8—10	28	18—20	3
10—12	14	20—22	2

9. Calculate Karl Pearson's Coefficient of Correlation between the values of X and of Y given below :—

X	42	44	58	55	89	98	66
Y	56	49	53	58	65	76	58

APPENDIX III

USE OF LOGARITHMS

In statistical work sometimes very complicated and tedious calculations are involved. The use of Logarithms facilitates work to an appreciable extent. The Logarithm of given number is the power to which a particular quantity is raised to obtain the given number. The particular quantity is called the base. Though any quantity can be taken as a base, 10 is taken as the base generally as the numerical system is based on 10 and it is easier to compute the tables. In the more advanced mathematical works, natural or Napierin Logarithms are used in which the base is $e=2.71828$.

The tables which are generally used in statistical works are based on 10 and therefore the Logarithms used imply the power to which the base 10 should be raised in order to equal a given number, which will be clear from the following:—

$1000=10^3$ $\quad\therefore$ Log $1000=3$

$100=10^2$ $\quad\therefore$ Log $100=2$

$10=10^1$ $\quad\therefore$ Log $10=1$

$1=10^0$ $\quad\therefore$ Log $1=0$

$.1=10^{-1}$ $\quad\therefore$ Log $.1=-1$

$.01=10^{-2}$ $\quad\therefore$ Log $.01=-2$

$.001=10^{-3}$ $\quad\therefore$ Log $.001=-3$

Thus, the Logarithms of any quantity between 10 and 100 will be between 1 and 2, that of any quantity between 100 and 1000 will be between 2 and 3. Therefore, the Log of any quantity consists of a whole number and a fraction, technically known as Characteristic and Mantissa.

(a) Characteristic—The characteristic is the positive or negative integral number of a certain Logarithm and is determined from the number of significant digits composing a given number, if the number is more than unity and the

number of significant zeros immediately after the decimal point if the quantity is less than unity. To determine the characteristic of any given quantity the following two rules as derived from the above may be used.

(i) If the given quantity is greater than one, the positive characteristic is obtained by the formula $(n-1)$ where n stands for the number of digits before the decimal point.

(ii) If the quantity of which the Log is to be computed is less than one, the negative characteristic is obtained by the formula $(n+1)$ where n stands for the number of significant zeros after the decimal point. A Bar is put over a negative characteristic.

(b) Mantissa—The Mantissa is the fractional part of the Logarithm expressed in decimal points. It is always positive and is obtained by reference to the Logarithmic tables. Two tables are given, one is called the Logarithmic table and the other the Anti-Logarithmic table. The former gives mantissa for given numbers and the latter the significant figures corresponding to a known mantissa. Thus, if a number is known its log can be found and if a log is known the number can be determined by reference to these tables. Tables are prepared for three, five or seven significant digits. A table of three digits is useful for ordinary work and is given in the following pages.

Logarithmic Table—In this table Mantissa of figures is given to four digits only. Mantissa of a number is the same irrespective of the position of a decimal point provided the first three digits are the same. If there are more than 3 digits they will be ignored but if the fourth digit is 5 or more the third will be increased by one in order to get the best approximation. The characteristic is ascertained by inspection as already explained.

Anti-Logarithmic Table—In this table four significant figures are given corresponding to the first three digits in the Mantissa. From the characteristic of the Log. the position of the decimal point can easily be determined, that is, if the characteristic is positive the decimal point will be placed

after counting one more digit in the integrals. If the characteristic is negative the decimal point will be placed by putting number of zeros one less than the characteristic to the left.

By the use of Log the process of multiplication can be reduced to a process of addition, that of division to a process of subtraction, the process of raising any amount to a power can be reduced to a process of multiplication and that of finding roots to a process of division.

Symbolically,

(1) $a \times b = A.L.$ (Log a + Log b)

(2) $\frac{a}{b} = A.L$ (Log a—Log b)

(3) $a^n = A.L.$ (n log a)

(4) $n\sqrt{a}$ =Anti log $\left(\frac{1}{n} \text{ log } a\right)$

Examples

(1) $a \times b$ = Anti log (log a + log b)
9487 × 3578 = Anti log (3·9773 + 35539)
=Anti log 75·312
=339600.00

(2) $\frac{a}{b}$ = Anti log (log a—log b)
9487 × 3578 = $A.L.$ (3·9773—3·5539)
=Anti log ·4234
=2·649

(2) $a^n = A.L.$ (n log a)
94873 = $A.L.$ (3·9773 × 3)
=Anti log 11·9319
=855100000000

(4) $n\sqrt{a}$ = Anti log $\left(\frac{1}{n}\text{log } a\right)$

5 $\sqrt{9487}$ = Anti log $\left(\frac{1}{5} \text{ log } 3\cdot9773\right)$
=Anti log ·7955
=6·225

(5) Geometric Mean of 8.72; 148; 242; 85.6 will be—

Anti=log $\frac{1}{5}$ (log 8 + log 72 + log 148 +

log 242 + log 85·6)

$=\text{Anti log } \frac{9{\cdot}2470}{5}$

=Anti log 1·8492

=70·63

USE OF RECIPROCALS

The use of Reciprocals facilitates the process of division. Instead of dividing a certain quantity by a number we multiply the same by its reciprocal. For example, if 46752 is to be divided by 402, the same may be multiplied by the reciprocal of 402 to obtain the result.

The use of reciprocals is also made for computing the Harmonic Average which is nothing but the Reciprocal of the arithmetic mean of the Reciprocals of the given quantities. To obtain reciprocals of the given quantities, the Reciprocal tables are generally used. In the tables the number from 1.0 to 9.9 are given in the first column and the relative reciprocals are stated in the same row in the column headed by the third digit. To consult the table, the first two significant digits should be found in the first column and the reciprocal taken from the column of the 3rd digit in the same row. In order to obtain the original number from the number given in the table the decimal point will have to be moved either to the left or right and consequently the decimal point in the reciprocal will have to be adjusted in the opposite direction to the same extent. The following table illustrates this.

Original number	Given number	Reciprocal of given No.	Reciprocal of original No.
·175	1 75	·5714	5·714
1·75	1·75	·5714	·5714
17·5	1·75	·5714	·0571
175	1·75	·5714	·0057

The Harmonic average of these quantities will be :—

$$\frac{5}{\frac{1}{\cdot175}+\frac{1}{1\cdot75}+\frac{1}{17\cdot5}+\frac{1}{175}}$$

$$=\text{Reciprocal } \frac{5\cdot714+5\cdot714+\cdot0571+\cdot0057}{5}$$

$$=\text{Reciprocal } \frac{5\cdot7056}{5}$$

$$=\text{Reciprocal } 1\cdot1411$$

$$=\cdot0772$$

APPENDIX V

MATHEMATICAL TABLES

CONTENTS

Logarithms	*ii—iii*
Anti-logarithms	*iv—v*
Squares	*vi—vii*
Square Roots	*viii—xii*
Reciprocals	*xiii—xiv*

INSTRUCTIONS

Tables of Squares–In this table upto 316 one zero and from 317 onwards two zeros are omitted in each square. If in the given figure the decimal point moves by one digit to the left then the decimal point moves by two digits to the left in the Square.

Tables of Square roots–This table gives two square roots for each number. For odd digits in the given number the upper figure and for even digits the lower figure should be taken. If in the given number the decimal point moves by two digits to the left then the decimal point moves by one digit to the left in square roots.

Natural Numbers	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Proportional Parts 1	2	3	4	5	6	7
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6
49	6902	6911	6920	6928	6937	6964	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	

Numbers	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Proportional Parts								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Logarithms	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											Proportional Parts								
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Logarithms	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Proportional Parts 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4788	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

SQUARES

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1000	1020	1040	1061	1082	1103	1124	1145	1166	1188
11	1210	1232	1254	1277	1300	1323	1346	1369	1392	1416
12	1440	1464	1488	1513	1538	1563	1588	1613	1638	1664
13	1690	1716	1742	1769	1796	1823	1850	1877	1904	1932
14	1960	1988	2016	2045	2074	2103	2132	2161	2190	2220
15	2250	2280	2310	2341	2372	2403	2434	2465	2496	2528
16	2560	2592	2624	2657	2690	2723	2756	2789	2822	2856
17	2890	2924	2958	2993	3028	3063	3098	3133	3168	3204
18	3240	3276	3312	3349	3386	3423	3460	3497	3534	3572
19	3610	3648	3686	3725	3764	3803	3842	3881	3920	3960
20	4000	4040	4080	4121	4162	4203	4244	4285	4326	4368
21	4410	4452	4494	4537	4580	4623	4666	4709	4752	4796
22	4840	4884	4928	4973	5018	5063	5108	5153	5198	5244
23	5290	5336	5382	5429	5476	5523	5570	5617	5664	5712
24	5760	5808	5856	5905	5954	6003	6652	6101	6150	6200
25	6250	6300	6350	6401	6452	6503	6554	6605	6656	6708
26	6760	6812	6864	6917	6970	7023	7076	7129	7182	7236
27	7290	7344	7398	7453	7508	7563	7618	7673	7728	7784
28	7840	7896	7952	8009	8066	8123	8180	8237	8294	8352
29	8410	8468	8526	8585	8644	8703	8762	8821	8880	8940
30	9000	9060	9120	9181	9242	9303	9364	9425	9486	9548
31	9610	9672	9734	9797	9860	9923	9986	1005	1011	1018
32	1024	1030	1037	1043	1050	1056	1063	1069	1076	1082
33	1089	1096	1102	1109	1115	1122	1129	1136	1142	1149
34	1156	1163	1170	1176	1183	1190	1197	1204	1211	1218
35	1225	1232	1239	1246	1253	1260	1267	1274	1282	1289
36	1296	1303	1310	1318	1325	1332	1340	1347	1354	1362
37	1369	1376	1384	1391	1399	1406	1414	1421	1429	1436
38	1444	1452	1459	1467	1475	1482	1490	1498	1505	1513
39	1521	1529	1537	1544	1552	1560	1568	1576	1584	1592
40	1600	1608	1616	1624	1632	1640	1648	1656	1665	1673
41	1681	1689	1697	1706	1714	1722	1731	1739	1747	1756
42	1764	1772	1781	1789	1798	1806	1815	1823	1832	1840
43	1849	1858	1866	1875	1884	1892	1901	1910	1918	1927
44	1936	1945	1954	1962	1971	1980	1989	1998	2007	2016
45	2025	2034	2043	2052	2061	2070	2079	2088	2098	2107
46	2116	2125	2134	2144	2153	2162	2172	2181	2190	2200
47	2209	2218	2228	2237	2247	2256	2266	2275	2285	2294
48	2304	2314	2323	2333	2343	2352	2362	2372	2381	2391
49	2401	2411	2421	2430	2440	2450	2460	2470	2480	2490
50	2500	2510	2520	2530	2540	2550	2560	2570	2581	2591
51	2601	2611	2621	2632	2642	2652	2663	2673	2683	2694
52	2704	2714	2725	2735	2746	2756	2767	2777	2788	2798
53	2809	2820	2830	2841	2852	2862	2873	2884	2894	2905
54	2916	2927	2938	2948	2959	2970	2981	2992	3003	3014

The position of the decimal point must be determined by inspection

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	3025	3036	3047	3058	3069	3080	3091	3102	3114	3125
56	3136	3147	3158	3170	3181	3192	3204	3215	3226	3238
57	3249	3260	3272	3283	3295	3306	3318	3329	3341	3352
58	3364	3376	3387	3399	3411	3422	3434	3446	3457	3469
59	3481	3493	3505	3516	3528	3540	3552	3564	3576	3588
60	3600	3612	3624	3636	3648	3660	3672	3684	3697	3709
61	3721	3733	3745	3758	3770	3782	3795	3807	3819	3832
62	3844	3856	3869	3881	3894	3906	3919	3931	3944	3956
63	3969	3982	3994	4007	4020	4032	4045	4058	4070	4083
64	4096	4109	4122	4134	4147	4160	4173	4186	4199	4212
65	4225	4238	4251	4264	4277	4290	4303	4316	4330	4343
66	4356	4369	4382	4396	4409	4422	4436	4449	4462	4476
67	4489	4502	4516	4529	4543	4556	4570	4583	4597	4610
68	4624	4638	4651	4665	4679	4692	4706	4720	4733	4747
69	4761	4775	4789	4802	4816	4830	4844	4858	4872	4886
70	4900	4914	4928	4942	4956	4970	4984	4998	5013	5027
71	5041	5055	5069	5084	5098	5112	5127	5141	5155	5170
72	5184	5198	5213	5227	5242	5256	5271	5285	5300	5314
73	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	5461
74	5476	5491	5506	5520	5535	5550	5565	5580	5595	5610
75	5625	5640	5655	5670	5685	5700	5715	5730	5746	5761
76	5776	5791	5806	5822	5837	5852	5868	5883	5898	5914
77	5929	5944	5960	5975	5991	6006	6022	6037	6053	6068
78	6084	6100	6115	6131	6147	6162	6178	6194	6209	6225
79	6241	6257	6273	6288	6304	6320	6336	6352	6368	6384
80	6400	6416	6432	6448	6464	6480	6496	6512	6529	6545
81	6561	6577	6593	6610	6626	6642	6659	6675	6691	6708
82	6724	6740	6757	6773	6790	6806	6823	6839	6856	6872
83	6889	6906	6922	6939	6956	6970	6989	7006	7022	7039
84	7056	7073	7090	7106	7123	7140	7157	7174	7191	7208
85	7225	7242	7259	7276	7293	7310	7327	7344	7362	7379
86	7396	7413	7430	7448	7465	7482	7500	7517	7534	7552
87	7569	7586	7604	7621	7639	7656	7674	7691	7709	7726
88	7744	7762	7779	7797	7815	7832	7850	7868	7885	7903
89	7921	7939	7957	7974	7992	8010	8028	8046	8064	8082
90	8100	8118	8136	8154	8172	8190	8208	8226	8245	8263
91	8281	8299	8317	8336	8354	8372	8391	8409	8427	8446
92	8464	8482	8501	8519	8538	8556	8575	8593	8612	8630
93	8649	8668	8686	8705	8724	8742	8761	8780	8798	8817
94	8836	8855	8874	8892	8911	8930	8949	8968	8987	9006
95	9025	9044	9063	9082	9101	9120	9139	9158	9178	9197
96	9216	9235	9254	9274	9293	9312	9332	9351	9370	9390
97	9409	9428	9448	9467	9487	9506	9526	9545	9565	9584
98	9604	9624	9643	9663	9683	9702	9722	9742	9761	9781
99	9801	9821	9841	9860	9880	9900	9920	9940	9960	9980

The position of the decimal point must be determined by inspection.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1000 3162	1005 3178	1010 3194	1015 3209	1020 3225	1025 3240	1030 3256	1034 3271	1039 3286	1044 3302
11	1049 3317	1054 3332	1058 3347	1063 3362	1068 3376	1072 3391	1077 3406	1082 3421	1086 3435	1091 3450
12	1095 3464	1100 3479	1105 3493	1109 3507	1114 3521	1118 3536	1122 3550	1127 3564	1131 3578	1136 3592
13	1140 3606	1145 3619	1149 3633	1153 3647	1158 3661	1162 3674	1166 3688	1170 3701	1175 3715	1179 3728
14	1183 3742	1187 3755	1192 3768	1196 3782	1200 3795	1204 3808	1208 3821	1212 3834	1217 3847	1221 3860
15	1225 3873	1229 3886	1233 3899	1237 3912	1241 3924	1245 3937	1249 3950	1253 3962	1257 3975	1261 3987
16	1265 4000	1269 4012	1273 4025	1277 4037	1281 4050	1285 4062	1288 4074	1292 4087	1296 4099	1300 4111
17	1304 4123	1308 4135	1311 4147	1315 4159	1319 4171	1323 4183	1327 4195	1330 4207	1334 4219	1338 4231
18	1342 4243	1345 4254	1349 4266	1353 4278	1356 4290	1360 4301	1364 4313	1367 4324	1371 4336	1375 4347
19	1378 4359	1382 4370	1386 4382	1389 4393	1393 4405	1396 4416	1400 4427	1404 4438	1407 4450	1411 4461
20	1414 4472	1418 4483	1421 4494	1425 4506	1428 4517	1432 4528	1435 4539	1439 4550	1442 4561	1446 4572
21	1449 4583	1453 4593	1456 4604	1459 4615	1463 4626	1466 4637	1470 4648	1473 4658	1476 4669	1480 4680
22	1483 4690	1487 4701	1490 4712	1493 4722	1497 4733	1500 4743	1503 4754	1507 4764	1510 4775	1513 4785
23	1517 4796	1520 4806	1523 4817	1526 4827	1530 4837	1533 4848	1536 4858	1539 4868	1543 4879	1546 4889
24	1549 4899	1552 4909	1556 4919	1559 4930	1562 4940	1565 4950	1568 4960	1572 4970	1575 4980	1578 4990
25	1581 5000	1584 5010	1587 5020	1591 5030	1594 5040	1597 5050	1600 5060	1603 5070	1606 5079	1609 5089
26	1612 5099	1616 5109	1619 5119	1622 5128	1625 5138	1628 5148	1631 5158	1634 5167	1637 5177	1640 5187
27	1643 5196	1646 5206	1649 5215	1652 5225	1655 5235	1658 5244	1661 5254	1664 5263	1667 5273	1670 5282

The first significant figure and the position of the decimal point must be determined by inspection.

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28	1673 5292	1676 5301	1679 5310	1682 5320	1685 5329	1688 5339	1691 5348	1694 5357	1697 5367	1700 5376
29	1703 5385	1706 5394	1709 5404	1712 5413	1715 5422	1718 5431	1720 5441	1723 5450	1726 5459	1729 5468
30	1732 5477	1735 5486	1738 5495	1741 5505	1744 5514	1746 5523	1749 5532	1752 5541	1755 5550	1758 5559
31	1761 5568	1764 5577	1766 5586	1769 5595	1772 5604	1775 5612	1778 5621	1780 5630	1783 5639	1786 5648
32	1789 5657	1792 5666	1794 5675	1797 5683	1800 5692	1803 5701	1806 5710	1808 5718	1811 5727	1814 5736
33	1817 5745	1819 5753	1822 5762	1825 5771	1828 5779	1830 5788	1833 5797	1836 5805	1838 5814	1841 5822
34	1844 5831	1847 5840	1849 5848	1852 5857	1855 5865	1857 5874	1860 5882	1863 5891	1865 5899	1868 5908
35	1871 5916	1873 5925	1876 5933	1879 5941	1881 5950	1884 5958	1887 5967	1889 5975	1892 5983	1895 5992
36	1897 6000	1900 6008	1903 6017	1905 6025	1908 6033	1910 6042	1913 6050	1916 6058	1918 6066	1921 6075
37	1924 6083	1926 6091	1929 6099	1931 6107	1934 6116	1936 6124	1939 6132	1942 6140	1944 6148	1947 6156
38	1949 6164	1952 6173	1954 6181	1957 6189	1960 6197	1962 6205	1965 6213	1967 6221	1970 6229	1972 6237
39	1975 6245	1977 6253	1980 6261	1982 6269	1985 6277	1987 6285	1990 6293	1992 6301	1995 6309	1997 6317
40	2000 6325	2002 6332	2005 6340	2007 6348	2010 6356	2012 6364	2015 6372	2017 6380	2020 6387	2022 6395
41	2025 6403	2027 6411	2030 6419	2032 6427	2035 6434	2037 6442	2040 6450	2042 6458	2045 6465	2047 6473
42	2049 6481	2052 6488	2054 6496	2057 6504	2059 6512	2062 6519	2064 6527	2066 6535	2069 6542	2071 6550
43	2074 6557	2076 6565	2078 6573	2081 6580	2083 6588	2086 6595	2088 6603	2090 6611	2093 6618	2095 6626
44	2098 6633	2100 6641	2102 6648	2105 6656	2107 6663	2110 6671	2112 6678	2114 6686	2117 6693	2119 6701
45	2121 6708	2124 6716	2126 6723	2128 6731	2131 6738	2133 6745	2135 6753	2138 6770	2140 6768	2142 6775

The first significant figure and the position of the decimal point must be determined by inspection.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	2145 6782	2147 6790	2149 6797	2152 6804	2154 6812	2156 6819	2159 6826	2161 6834	2163 6841	2166 6848
47	2168 6856	2170 6863	2173 6870	2175 6877	2177 6885	2179 6892	2182 6899	2184 6907	2186 6914	2189 6921
48	2191 6928	2193 6935	2195 6943	2198 6950	2200 6957	2202 6964	2205 6971	2207 6979	2209 6986	2211 6993
49	2214 7000	2216 7007	2218 7014	2220 7021	2223 7029	2225 7036	2227 7043	2229 7050	2232 7057	2234 7064
50	2236 7071	2238 7078	2241 7085	2243 7092	2245 7099	2247 7106	2249 7113	2252 7120	2254 7127	2256 7134
51	2258 7141	2261 7148	2263 7155	2265 7162	2267 7169	2269 7176	2272 7183	2274 7190	2276 7197	2278 7204
52	2280 7211	2283 7218	2285 7225	2287 7232	2289 7239	2291 7246	2293 7253	2296 7259	2298 7266	2300 7273
53	2302 7280	2304 7287	2307 7294	2309 7301	2311 7308	2313 7317	2315 7321	2317 7328	2319 7335	2322 7342
54	2324 7348	2326 7355	2328 7362	2330 7369	2332 7376	2335 7382	2337 7389	2339 7496	2341 7403	2343 7409
55	2345 7416	2347 7423	2349 7430	2352 7436	2354 7443	2356 7450	2358 7457	2360 7463	2362 7470	2364 7477
56	2366 7483	2369 7490	2371 7497	2373 7503	2375 7510	2377 7517	2379 7523	2381 7530	2383 7537	2385 7543
57	2387 7550	2390 7556	2392 7563	2394 7570	2396 7576	2398 7583	2400 7589	2402 7596	2404 7603	2406 7609
58	2408 7616	2410 7622	2412 7629	2415 7635	2417 7642	2419 7649	2421 7655	2423 7662	2425 7668	2427 7675
59	2429 7681	2431 7688	2433 7694	2435 7701	2437 7707	2439 7714	2441 7720	2443 7727	2445 7733	2447 7740
60	2449 7746	2452 7752	2454 7759	2456 7765	2458 7772	2460 7778	2462 7785	2464 7791	2466 7797	2468 7804
61	2470 7810	2472 7817	2474 7823	2476 7829	2478 7836	2480 7842	2482 7849	2484 7855	2486 7861	2488 7868
62	2490 7874	2492 7880	2494 7887	2496 7893	2498 7899	2500 7906	2502 7912	2504 7918	2506 7925	2508 7931
63	2510 7937	2512 7944	2514 7950	2516 7956	2518 7962	2520 7969	2522 7975	2524 7981	2526 7987	2528 7994

The first significant figure and the position of the decimal point must be determined by inspection.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
64	2530 8000	2532 8006	2534 8012	2536 8019	2538 8025	2540 8031	2542 8037	2544 8044	2546 8050	2548 8056
65	2550 8062	2551 8068	2553 8075	2555 8081	2557 8087	2559 8093	2561 8099	2563 8106	2565 8112	2567 8118
66	2569 8124	2571 8130	2573 8136	2575 8142	2577 8149	2579 8155	2581 8161	2583 8167	2585 8173	2587 8179
67	2588 8185	2590 8191	2592 8198	2594 8204	2596 8210	2598 8216	2600 8222	2602 8228	2604 8234	2606 8240
68	2608 8246	2610 8252	2612 8258	2613 8264	2615 8270	2617 8276	2619 8283	2621 8289	2623 8295	2625 8301
69	2627 8307	2629 8313	2631 8319	2632 8325	2634 8331	2636 8337	2638 8343	2640 8349	2642 8355	2644 8361
70	2646 8367	2648 8373	2650 8379	2651 8385	2653 8390	2655 8396	2657 8402	2659 8408	2661 8414	2663 8420
71	2665 8426	2666 8432	2668 8438	2670 8444	2672 8450	2674 8456	2676 8462	2678 8468	2680 8473	2681 8479
72	2683 8485	2685 8491	2687 8497	2689 8503	2691 8509	2693 8515	2694 8521	2696 8526	2698 8532	2700 8538
73	2702 8544	2704 8550	2706 8556	2707 8562	2709 8567	2711 8573	2713 8579	2715 8585	1717 8591	2718 8597
74	2720 8602	2722 8608	2724 8614	2726 8620	2728 8626	2729 8631	2731 8637	2733 8643	2735 8649	2737 8654
75	2739 8660	2740 8666	2742 8672	2744 8678	2746 8683	2748 8689	2750 8695	2751 8701	2753 8706	2755 8712
76	2757 8718	2759 8724	2760 8729	2762 8735	2764 8741	2766 8746	2768 8752	2769 8758	2771 8764	2773 8769
77	2775 8775	2777 8781	2778 8786	2780 8792	2782 8791	2784 8803	2786 8809	2787 8815	2789 8820	2791 8826
78	2793 8832	2795 8837	2796 8843	2798 8849	2800 8854	2802 8860	2804 8866	2805 8871	2807 8877	2809 8883
79	2811 8888	2812 8894	2814 8899	2816 8905	2818 8911	2820 8916	2821 8922	2823 8927	2825 8933	2827 8939
80	2828 8944	2830 8950	2832 8955	2834 8961	2835 8967	2837 8972	2839 8978	2841 8983	2843 8989	2844 8994
81	2846 9000	2848 9006	2850 9011	2851 9017	2853 9022	2855 9028	2857 9033	2858 9039	2860 9044	2862 9050

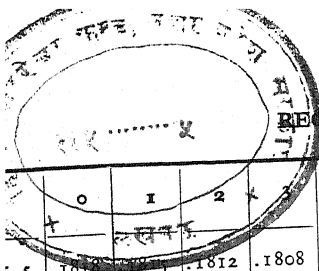
The first significant figure and the position of the decimal point must be determined by inspection.

SQUARE ROOTS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
82	2864 9055	2865 9061	2867 9066	2869 9072	2871 9077	2872 9083	2874 9088	2876 9094	2877 9099	2879 9105
83	2881 9110	2883 9116	2884 9121	2886 9127	2888 9132	2890 9138	2891 9143	2893 9149	2895 9154	2897 9160
84	2898 9165	9290 1710	2902 9176	2903 9182	2905 9187	2907 9192	2909 9198	2910 9203	2912 9209	2914 9214
85	2915 9220	2917 9225	2919 9230	2921 9236	2922 9241	2924 9247	2926 9252	2927 9257	2929 9263	2931 9268
86	2933 9274	2934 9279	2936 9284	2938 9290	2939 9295	2941 9301	2943 9306	2944 9311	2946 9317	2948 9322
87	2950 9327	2951 9333	2953 9338	2955 9343	2956 3949	2958 9354	2960 9359	2961 9365	2963 9370	2965 9375
88	2966 9381	2968 9386	2970 9391	2972 9397	2973 9402	2975 9407	2977 9413	2978 9418	2980 9423	2982 9429
89	2983 9434	2985 9439	2987 9445	2988 9450	2990 9455	2992 9460	2993 9466	2995 9471	2997 9476	2998 9482
90	3000 9487	3002 9492	3003 9497	3005 9503	3007 9508	3008 9513	3010 9518	3012 9524	3013 9529	3015 9534
91	3017 9539	3018 9545	3020 9550	3022 9555	3023 9560	3025 9566	3027 9571	3028 9576	3030 9581	3032 9586
92	3033 9592	3035 9597	3036 9602	3038 9607	3040 9612	3041 9618	3043 9623	3045 9628	3046 9633	3048 9638
93	3050 9644	3051 9649	3053 9654	3055 9659	3056 9664	3058 9670	3059 9675	3061 9680	3063 9685	3064 9690
94	3066 9695	3068 9701	3069 9706	3071 9711	3072 9716	3074 9721	3076 9726	3077 9731	3079 9777	3081 9742
95	3082 9747	3084 9752	3085 9757	3087 9762	3089 9767	3090 9772	3092 9778	3094 9783	3095 9788	3097 9793
96	3098 9798	3100 9803	3102 9808	3103 9813	3105 9818	3106 9823	3108 9829	3110 9834	3111 9839	3113 9844
97	3114 9849	3116 9854	3118 9859	3119 9864	3121 9869	3122 9874	3124 9879	3126 9884	3127 9889	2129 9894
98	3130 9899	3132 9905	3134 9910	3135 9913	3137 9920	3138 9925	3140 9930	3142 9935	3143 9940	3145 9945
99	3146 9950	3148 9955	3150 9960	3151 9965	3153 9970	3154 9975	3156 9980	3158 9985	3159 9990	3161 9995

The first significant figure and the position of the decimal point must be determined by inspection.

RECIPROCALS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.0000	.9901	.9804	.9709	.9615	.9524	.9434	.9346	.9259	.9174
1.1	.9091	.9009	.8929	.8850	.8772	.8696	.8621	.8547	.8475	.8403
1.2	.8333	.8264	.8197	.8130	.8065	.8000	.7937	.7874	.7813	.7752
1.3	.7692	.7634	.7576	.7519	.7463	.7407	.7353	.7299	.7246	.7194
1.4	.7143	.7092	.6993	.7042	.6944	.6897	.6849	.6803	.6757	.6711
1.5	.6667	.6623	.6579	.6536	.6494	.6452	.6410	.6369	.6329	.6289
1.6	.6250	.6211	.6173	.6135	.6098	.6061	.6024	.5988	.5952	.5917
1.7	.5882	.5848	.5814	.5780	.5747	.5714	.5682	.5650	.5618	.5587
1.8	.5556	.5525	.5495	.5464	.5435	.5405	.5376	.5348	.5319	.5291
1.9	.5263	.5236	.5208	.5181	.5155	.5128	.5102	.5076	.5051	.5025
2.0	.5000	.4975	.4950	.4926	.4902	.4878	.4854	.4831	.4808	.4785
2.1	.4762	.4739	.4717	.4695	.4673	.4651	.4630	.4608	.4587	.4566
2.2	.4545	.4525	.4505	.4484	.4464	.4444	.4425	.4405	.4386	.4367
2.3	.4348	.4329	.4310	.4292	.4274	.4255	.4237	.4219	.4202	.4184
2.4	.4167	.4149	.4132	.4115	.4098	.4082	.4065	.4049	.4032	.4016
2.5	.4000	.3984	.3968	.3953	.3937	.3922	.3906	.3891	.3876	.3861
2.6	.3846	.3831	.3817	.3802	.3788	.3774	.3759	.3745	.3731	.3717
2.7	.3704	.3690	.3776	.3663	.3650	.3636	.3623	.3610	.3597	.3584
2.8	.3571	.3559	.3546	.3534	.3521	.3509	.3497	.3484	.3472	.3460
2.9	.3448	.3436	.3425	.3413	.3401	.3390	.3378	.3367	.3356	.3344
3.0	.3333	.3322	.3311	.3300	.3289	.3279	.3268	.3257	.3247	.3236
3.1	.3226	.3215	.3205	.3195	.3185	.3175	.3165	.3155	.3145	.3135
3.2	.3125	.3115	.3106	.3096	.3086	.3077	.3067	.3058	.3049	.3040
3.3	.3030	.3021	.3012	.3003	.2994	.2985	.2976	.2967	.2959	.2950
3.4	.2941	.2933	.2924	.2915	.2907	.2899	.2890	.2882	.2874	.2865
3.5	.2857	.2849	.2841	.2833	.2825	.2817	.2809	.2801	.2793	.2786
3.6	.2778	.2770	.2762	.2755	.2747	.2740	.2732	.2725	.2717	.2710
3.7	.2703	.2695	.2688	.2681	.2674	.2667	.2660	.2653	.2646	.2639
3.8	.2632	.2625	.2618	.2611	.2604	.2597	.2591	.2584	.2577	.2571
3.9	.2564	.2558	.2551	.2545	.2538	.2532	.2525	.2519	.2513	.2506
4.0	.2500	.2494	.2488	.2481	.2475	.2469	.2463	.2457	.2451	.2445
4.1	.2439	.2433	.2427	.2421	.2415	.2410	.2404	.2398	.2392	.2387
4.2	.2381	.2375	.2370	.2364	.2358	.2353	.2347	.2342	.2336	.2331
4.3	.2326	.2320	.2315	.2309	.2304	.2299	.2294	.2288	.2283	.2278
4.4	.2273	.2268	.2262	.2257	.2252	.2247	.2242	.2237	.2232	.2227
4.5	.2222	.2217	.2212	.2208	.2203	.2198	.2193	.2188	.2183	.2179
4.6	.2174	.2179	.2165	.2160	.2155	.2151	.2146	.2141	.2137	.2132
4.7	.2128	.2123	.2119	.2114	.2110	.2105	.2101	.2096	.2092	.2088
4.8	.2083	.2079	.2075	.2070	.2066	.2062	.2058	.2053	.2049	.2045
4.9	.2041	.2037	.2033	.2028	.2024	.2020	.2016	.2012	.2008	.2004
5.0	.2000	.1996	.1992	.1988	.1984	.1980	.1976	.1972	.1969	.1965
5.1	.1961	.1957	.1953	.1949	.1946	.1942	.1938	.1934	.1931	.1927
5.2	.1923	.1919	.1916	.1912	.1908	.1905	.1901	.1898	.1894	.1890
5.3	.1887	.1883	.1880	.1876	.1873	.1869	.1866	.1862	.1859	.1855
5.4	.1852	.1848	.1845	.1842	.1838	.1835	.1832	.1828	.1825	.1821

RECIPROCALS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.1818	.1815	.1812	.1808	.1805	.1802	.1799	.1795	.1792	.1789
5.6	.1786	.1783	.1779	.1776	.1773	.1770	.1767	.1764	.1761	.1757
5.7	.1754	.1751	.1748	.1745	.1742	.1739	.1736	.1733	.1730	.1727
5.8	.1724	.1721	.1718	.1715	.1712	.1709	.1706	.1704	.1701	.1698
5.9	.1695	.1692	.1689	.1686	.1684	.1681	.1678	.1675	.1672	.1669
6.0	.1667	.1664	.1661	.1658	.1656	.1653	.1650	.1647	.1645	.1642
6.1	.1639	.1637	.1634	.1631	.1629	.1626	.1623	.1621	.1618	.1616
6.2	.1613	.1610	.1608	.1605	.1603	.1600	.1597	.1595	.1592	.1590
6.3	.1587	.1585	.1582	.1580	.1577	.1575	.1572	.1570	.1567	.1565
6.4	.1563	.1560	.1558	.1555	.1553	.1550	.1548	.1546	.1543	.1541
6.5	.1538	.1536	.1534	.1531	.1529	.1527	.1524	.1522	.1520	.1517
6.6	.1515	.1513	.1511	.1508	.1506	.1504	.1502	.1499	.1497	.1495
6.7	.1493	.1490	.1488	.1486	.1484	.1481	.1479	.1477	.1475	.1473
6.8	.1471	.1468	.1466	.1464	.1462	.1460	.1458	.1456	.1453	.1551
6.9	.1449	.1447	.1445	.1443	.1441	.1439	.1437	.1435	.1433	.1431
7.0	.1429	.1427	.1425	.1422	.1420	.1418	.1416	.1414	.1412	.1410
7.1	.1408	.1406	.1404	.1403	.1401	.1399	.1397	.1395	.1393	.1391
7.2	.1389	.1387	.1385	.1383	.1381	.1379	.1377	.1376	.1374	.1372
7.3	.1370	.1368	.1366	.1364	.1362	.1361	.1359	.1357	.1355	.1353
7.4	.1351	.1350	.1348	.1346	.1344	.1342	.1340	.1339	.1337	.1335
7.5	.1333	.1332	.1330	.1328	.1326	.1325	.1323	.1321	.1319	.1318
7.6	.1316	.1314	.1312	.1311	.1309	.1307	.1305	.1304	.1302	.1300
7.7	.1299	.1297	.1295	.1294	.1292	.1290	.1289	.1287	.1285	.1284
7.8	.1282	.1280	.1279	.1277	.1276	.1274	.1272	.1271	.1269	.1267
7.9	.1266	.1264	.1263	.1261	.1259	.1258	.1256	.1255	.1253	.1252
8.0	.1250	.1248	.1247	.1245	.1244	.1242	.1241	.1239	.1238	.1236
8.1	.1235	.1233	.1232	.1230	.1229	.1227	.1225	.1224	.1222	.1221
8.2	.1220	.1218	.1217	.1215	.1214	.1212	.1211	.1209	.1208	.1206
8.3	.1205	.1203	.1202	.1200	.1199	.1198	.1196	.1195	.1193	.1192
8.4	.1190	.1189	.1188	.1186	.1185	.1183	.1182	.1181	.1179	.1178
8.5	.1176	.1175	.1174	.1172	.1171	.1170	.1168	.1167	.1166	.1164
8.6	.1163	.1161	.1160	.1159	.1157	.1156	.1155	.1153	.1152	.1151
8.7	.1149	.1148	.1147	.1145	.1144	.1143	.1142	.1140	.1139	.1138
8.8	.1136	.1135	.1134	.1133	.1131	.1130	.1129	.1127	.1126	.1125
8.9	.1124	.1122	.1121	.1120	.1119	.1117	.1116	.1115	.1114	.1112
9.0	.1111	.1110	.1109	.1107	.1106	.1105	.1104	.1103	.1101	.1100
9.1	.1099	.1098	.1906	.1095	.1094	.1093	.1092	.1091	.1989	.1088
9.2	.1087	.1086	.1085	.1083	.1082	.1081	.1080	.1079	.1078	.1076
9.3	.1075	.1074	.1073	.1072	.1071	.1070	.1068	.1067	.1066	.1065
9.4	.1064	.1063	.1062	.1060	.1059	.1058	.1057	.1056	.1055	.1054
9.5	.1053	.1052	.1050	.1049	.1048	.1047	.1046	.1045	.1044	.1043
9.6	.1042	.1041	.1040	.1038	.1037	.1036	.1035	.1034	.1033	.1032
9.7	.1031	.1030	.1029	.1028	.1027	.1026	.1025	.1024	.1022	.1021
9.8	.1020	.1019	.1018	.1017	.1016	.1015	.1014	.1013	.1012	.1011
9.9	.1010	.1009	.1008	.1007	.1006	.1005	.1004	.1003	.1002	.1001